<36636477060015

<36636477060015

Bayer. Staatsbibliothek

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Lehrbuch
der
Mechanik feſter Körper.

Verfaßt
von

Maurus Magold,
Königl. baier. geiſtl. Rath und öffentl. ordentl. Profeſſor der Mathematik allda, dann correſpondirendem Mitgliede der Königl. Academie der Wiſſenſchaften in München.

II. Band,
welcher die angewandte Mechanik enthält.

Mit 8 Kupfertafeln und 8 gedruckten Tabellen.

Landshut,
bei Philipp Krüll, Univerſitätsbuchhändler.
1813.

Vorrede.

Den Plan der Bearbeitung habe ich bereits in der Vorrede zum erſten Bande der Mechanik feſter Körper vorgelegt; die gute Aufnahme dieſes Bandes ermunterte mich den gegenwärtigen zweiten Band nach eben dieſem Plane mit allem möglichen Fleiße zu bearbeiten. Schon aus der Natur einer practiſchen Wiſſenſchaft läßt ſich einſehen, wie ſchwer es iſt bei dem Vortrage ſtets die ſyſtematiſche Form beizubehalten, Vollſtändigkeit mit Kürze, Gründlichkeit mit Faßlichkeit zu vereinbaren.

Die Männer, deren Schriften ich vorzüglich benützte, ſind entweder ſchon in der Vorrede des erſten Bandes genannt, oder werden im gegenwärtigem Bande an den geeigneten Stellen angezeigt.

Im dritten Hauptſtück von der Reibung ſind §. 89. Schobers Verſuche aus deſſen Schrift: Verſuch einer Theorie von der Ueberwucht, Leipzig, bei Joh. Weidler. 1751. genommen.

Im vierten Hauptſtück vom Maaße der körperlichen Kräfte eines Menſchen liegen Coulombs Abhandlung aus den Mémoires de l'Institut nat. an VII, ferner aus den Mémoires der Berliner, und Acten der Petersburger Academien Eulers und Lamberts Abhandlungen zum Grunde.

Im fünften Hauptſtücke des zweiten Theiles beziehen ſich die Citaten der höhern Geometrie von §. 358 bis 379. auf die zweite Ausgabe des Lehrbuches der höhern Geometrie, oder, was einerlei iſt, auf die zweite Ausgabe des dritten Theils zweite Abtheilung meines mathematiſchen Lehrbuches. Die Beſitzer der erſten Ausgabe, wo ſich die höhere Geometrie mit dem §. 357. endet, können obigen Zuwachs, durch welchen ſich die zweite Ausgabe von der erſten unterſcheidet, auf Verlangen unter dem Titel einer Abhandlung über die Epicycloide abgeſondert erhalten.

Landshut, den 12 April,
1813.

Magold.

Inhalt.

Inhalt.

Mechanik feſter Körper.

Zweite Abtheilung.
Die angewandte Mechanik.
I. Theil.
Allgemeine Maſchinenlehre.

Erſtes Hauptſtück.

Von den erſten Begriffen und Grundſätzen der Maſchinenlehre. . . . . Seite 1

Zweites Hauptſtück.

Von der Feſtigkeit der Materialien. . . 36

I. Abſchnitt.

Von der abſoluten Feſtigkeit der Körper. . . 39

II. Abſchnitt.

Von der reſpectiven Feſtigkeit der Körper. . Seite 56

I. Von der reſpectiven Feſtigkeit ſpröder Körper. 58

II. Von der reſpectiven Feſtigkeit dehnbarer und zuſammendrückbarer Körper. . 72

III. Von der reſpectiven Feſtigkeit bloß dehnbarer Körper. . . 103

III. Abſchnitt.

Von der Feſtigkeit einer Säule. . . . 116

Drittes Hauptſtück.

Von der Nebenlaſt. . . . 126

I. Abſchnitt.

Von der Reibung feſter Körper bey gleitender Bewegung. 129

II. Abſchnitt.

Von der Steifigkeit eines Seils, dann von der Reibung bey wälzender Bewegung, und eines Seils, welches um einen Cylinder gelegt iſt. . . . 165

III. Abſchnitt.

Von der Reibung bey umdrehender Bewegung. . 195

Viertes Hauptſtück.

Von den mechaniſchen Kräften der Thiere, und vorzüglich des Menſchen. 223

I. Abſchnitt.

Kraftäuſſerung eines Menſchen, wenn er auf wagrechtem Boden, oder auf einer ſchiefen Ebene eine Laſt trägt. 227

II. Abſchnitt.

Kraftäuſſerung eines Menſchen, welcher eine Laſt zieht oder ſchiebt. . . Seite 259

III. Abſchnitt.

Kraftäuſſerung eines Menſchen bey unveränderter Stelle mittels ſeiner Arme. . . . 274

IV. Abſchnitt.

Kraftäuſſerung der Laſtthiere. . . 290

II. Theil.

Specielle Maſchinenlehre.

Erſtes Hauptſtück.

Von der Anwendung des Hebels. . . . 296

I. Abſchnitt.

Von dem phyſiſchen Hebel als Hebewerkzeug. . . 297

II. Abſchnitt.

Von der Wage. . . . 307

III. Abſchnitt.

Von der Walze. . . 319

Zweites Hauptſtück.

Von der ſchiefen Ebene. . . . 332

I. Abſchnitt.

Von der phyſiſchen ſchiefen Ebene. . Seite 333

II. Abſchnitt.

Vom Keil. . . . 344

III. Abſchnitt.

Von der Schraube. . . 349

Drittes Hauptſtück.

Von der Rolle. . . 375

I. Abſchnitt.

Von der einfachen Rolle. . . 375

II. Abſchnitt.

Von der Zuſammenſetzung mehrerer Rollen. . . 391

Viertes Hauptſtück.

Vom Rade an der Welle. . . 423

I. Abſchnitt.

Von dem Haſpel. . . . 426

II. Abſchnitt.

Von dem Göpel. . . . 442

III. Abſchnitt.

Von dem Schwungrade. . . 453

Fünftes Hauptſtück.

Von der Verbindung mehrerer einfacher Maſchinen. . 469

I. Abſchnitt.

Vom Räderwerke überhaupt. . . 470

II. Abſchnitt.

Von der Verbindung eines Stirn-Rades mit einem Getriebe. . . . Seite 488

III. Abſchnitt.

Von der Verbindung eines Stirnrades mit einem Trilling. 524

IV. Abſchnitt.

Von der Verbindung eines Kammrades mit einem Getriebe, oder einem Trilling. 543

V. Abſchnitt.

Von der Schraube ohne Ende. . . . 579

Mechanik feſter Körper.

II. Abtheilung.

Die angewandte Mechanik.

I. Theil.

Allgemeine Maſchinenlehre.

I. Hauptſtück.

Von den erſten Begriffen und Grundſätzen der Maſchinenlehre.

§. 1.

Erklärungen.

a Jede Vorrichtung, wodurch Kräfte nach einem gewiſſen Zwecke zu wirken beſtimmt werden, heißt ein **Werkzeug**, **Inſtrument** oder auch **Maſchine** im weitern Sinne.

b. Dient die Vorrichtung dazu, um durch ſie ein Gleichgewicht, oder eine Bewegung mit Vortheil, das iſt, mit Erſparung der Kraft, oder mit einer beſtimmten Geſchwindigkeit hervorzubringen, ſo heißt ſie eine **Maſchine** im engern Sinne (machina).

c Sind die Theile einer Vorrichtung ſelbſt ſchon Maſchinen, ſo heißt ſie eine **zuſammengeſetzte**; Sonſt eine **einfache Maſchine**.

Anmerk. Unter Maſchinen ohne Beyſaz werden in der Folge ſtets die Maſchinen im engern Sinne verſtanden.

§. 2.

Erklärung.

Die Wiſſenſchaft, welche aus den Geſetzen der reinen Mechanik, ſowohl die Wirkung einer gegebenen Maſchine, als für einen beſtimmten Zweck die vortheilhafteſte Einrichtung der entſprechenden Maſchine anzugeben lehret, heißt Maſchinenlehre, practiſche Mechanik, angewandte Mechanik (Reine Mech. §. 9. und Arithmet. §. 7. A.).

I. Anmerk. Die Maſchinenlehre iſt eigentlich nur ein Theil der angewandten Mechanik, denn auf die Lehren der Reinen Mechanik ſtützen ſich ebenfalls die aſtronomiſchen (mechanica coeleſtes), und architectoniſchen Wiſſenſchaften.

II. Anmerk. Gegenwärtig iſt ferner nur von feſten Körpern die Rede, mithin kann nur die eine Hälfte der Maſchinenlehre hier vorgetragen werden, die andere, wo flüſſige Körper in Verbindung kommen, gehört in die Hydraulik.

§. 3.

Erklärung.

Wenn an einer Maſchine, oder überhaupt auf eine feſte Maſſe eine oder mehrere Kräfte F, G, H u. ſ. w. wirken, und ſolche entweder in Bewegung ſezen, oder andern entgegengeſezten Kräften das Gleichgewicht halten, ſo heißt die auf einen gegebenen Punct angebrachte Kraft P, welche die nemliche Wirkung hervorbringt, die auf dieſen Punct reducirte Kraft.

I. Zuſaz. Die auf einen Punct reducirte Kraft P iſt allemal den ſämtlichen übrigen Kräften F, G, H u. ſ. w. an ihren Stellen gleichgeltend (Reine Mech.

§. 4. III. Zuſ.), und kann daher an ihre Stelle geſetzt werden.

II. Zuſaz. Giebt man der reducirten Kraft eine entgegengeſezte Richtung, ſo hält ſie den übrigen Kräften an ihren Stellen zuſammen das Gleichgewicht.

§. 4.

Erklärungen.

a. Der geſammte Widerſtand, welchen die Vorrichtung der bewegenden Kraft entgegenſetzt, heißt die Laſt, und zwar

α. jener Theil des Widerſtandes, deſſen Hebung Zweck der Maſchine iſt, die Haupt- oder Nutz-Laſt;

β. jener Theil des Widerſtandes hingegen, deſſen Ueberwältigung nicht zum eigentlichen Zweck der Maſchine gehört, ſondern welcher durch die Einrichtung der Maſchine ſelbſt und ihre Umgebungen entſteht, heißt die Neben-laſt.

b. Eine Kraft Q, welche, auf irgend einen gegebenen Punct angebracht, eben den Widerſtand leiſtet, wie die Laſt, heißt die auf den gegebenen Punct reducirte Laſt (Reine Mech. §. 6.).

I. Zuſaz. Die reducirte Laſt iſt alſo der geſammten Laſt gleichgeltend, und kann an ihre Stelle geſetzt werden.

II. Zuſaz. Giebt man der reducirten Laſt eine entgegengeſetzte Richtung, ſo hält ſie mit der geſammten gegebenen Laſt das Gleichgewicht.

§. 5.

Erklärungen.

a. Die Stelle, oder Punct, auf welchen die geſammte wirkende Kraft reducirt wird, heißt der von der Kraft P angegriffene, auch ohne Beyſaz der angegriffene Punct, oderauch Kraftpunct, und

b. jener Punct, auf welchen die geſammte Laſt reducirt wird, der von der Laſt Q angegriffene, auch der leidende Punct, oder kürzer Laſtpunct.

c. Werden Kraft und Laſt auf eben denſelben Punct reducirt, ſo heißt der Unterſchied zwiſchen der reducirten Kraft und reducirten Laſt, das iſt: $P - Q$ die Ueberwucht.

Zuſaz. Keine Maſchine kömmt ohne anfängliche Ueberwucht in Bewegung.

§. 6.

Aufgabe.

Die Maſſe M eines feſten Körpers bekömmt durch eine oder mehrere zugleich wirkende Kräfte F, G, H u. ſ. f. eine fortſchreitend geradlinigte Bewegung, von welcher ihre Richtung, und für jede Zeit t die Geſchwindigkeit v gegeben iſt, man ſoll die geſammten Kräfte auf den Schwerpunct der Maſſe reduciren (§.3.), das iſt, die den geſammten Kräften am Schwerpuncte gleichgeltende Kraft P angeben.

Auflöſung.

Nach der Richtung, nach welcher ſich die geſammte Maſſe, mithin der Schwerpunct bewegt (Reine Mech. §. 43. III. Zuſ.), bringe man auf ihn die Kraft

$$P = \frac{M\,d\,v}{2\,g\,d\,t},$$ ſo iſt ſie die geſuchte.

Beweis.

1. Wenn die Kraft P auf den Mittel- oder Schwerpunct der feſten Maſſe M nach der angeführten Richtung ſtets wirkt, ſo bekömmt nach eben dieſer Richtung die Maſſe eine fortſchreitende Bewegung (Reine Mech. §. 43. III und IV. Zuſ.).

2. Ferner erlangt dadurch die Maſſe am Ende jeder beliebigen Zeit t eine ſolche Geſchwindigkeit u, daß

3. $du = \frac{2gPdt}{M}$ (Reine Mech. §. 136.) alſo

$$= \frac{2gdt}{M} \cdot \frac{Mdv}{2gdt} = dv$$ wird, mithin

4. bekömmt die Maſſe von der Kraft P in jedem Moment eben den Zuwachs an Geſchwindigkeit und nach eben der Richtung, folglich eben dieſelbe Bewegung, wie von den Kräften F, G, H zuſammen genommen, folglich

5. iſt $P = \frac{Mdv}{2gdt}$ die auf den Schwerpunct reducirte Kraft.

I. Zuſaz. Giebt man der Kraft P im Schwerpuncte eine der vorigen entgegengeſezte Richtung, ſo hält ſie den ſämmtlichen Kräften F, G, H zuſammen das Gleichgewicht (Reine Mech. §. 4. III. Zuſ.).

II. Zuſaz. Wenn alſo eine Kraft P, am Schwerpuncte einer Maſſe, den ſämmtlichen Kräften F, G, H u. ſ. w. zuſammen das Gleichgewicht hält, ſo iſt ſie nach der entgegengeſezten Richtung die auf den Schwerpunct reducirte Kraft.

§. 7.

Aufgabe.

Auf die feſte Maſſe M wirken eine oder mehrere Kräfte F, G, H u. ſ. w. an verſchiedenen Stellen und

ertheilen ihr eine geradlinigte fortſchreitende Bewegung, man ſucht für die beliebige Zeit t die Geſchwindigkeit v, welche die Maſſe am Ende dieſer Zeit erlangt, und den Weg s, welchen ſie während dieſer Zeit hinterlegt hat.

Auflöſung.

1. Man ſuche aus den Kräften F, G, H u. ſ. w. und ihren Stellen, wo ſie angebracht ſind, die Kraft P zu beſtimmen, welche am Schwerpuncte der Maſſe ihnen zuſammen das Gleichgewicht hält, ſo iſt P, wenn man ihr die entgegengeſezte Richtung giebt, die auf den Schwerpunct reducirte Kraft (§. 6. II. Zuſ.).

2. Da alſo dieſe Kraft P allein der Maſſe die nemliche Bewegung ertheilen würde, wie die Kräfte F, G, H zuſammen, ſo iſt

3. $dv = \frac{2gPdt}{M}$, und $d^2s = \frac{2gPdt^2}{M}$

(Reine Mech. §. 136.), oder auch $ds = vdt$ (Reine Mech. §. 38.), wodurch alſo v ſowohl als s beſtimmt iſt.

I. Zuſaz. Auf die nemliche Art läßt ſich für die Maſſe N, welche ebenfalls durch eine oder mehrere Kräfte eine geradlinigte fortſchreitende Bewegung erhält, ſowohl die Geſchwindigkeit u, als der hinterlegte Weg s während der Zeit t beſtimmen, wenn man die Kraft Q angeben kann, welche am Schwerpuncte der Maſſe N den ſämmtlichen Kräften das Gleichgewicht hält; denn nach der entgegengeſezten Richtung würde Q die nemliche Bewegung hervorbringen, und da nun wieder $du = \frac{2gQdt}{N}$, und $ds = udt$, ſo iſt u ſowohl als s beſtimmt.

II. Zuſaz. Sind die beyden Maſſen M, N ſo miteinander verbunden, daß ſich die eine ohne die andere nicht bewegen kann, und erhalten nun beyde Maſſen jede eine fortſchreitende geradlinigte Bewegung, ſo laſſen ſich die wirkende Kräfte in 2 Theile ſondern, wovon der eine auf die Bewegung der Maſſe M, und der andere auf die Bewegung der Maſſe N verwendet wird; kann man nun die beyden Kräfte P, Q angeben, wovon P am Schwerpuncte der Maſſe M dem erſten Theile der geſammten Kräfte, und Q am Schwerpuncte der Maſſe N dem lezten Theile dieſer Kräfte das Gleichgewicht hält, ſo laſſen ſich für jede Zeit t die Geſchwindigkeiten, und die hinterlegten Räume beſtimmen.

III. Zuſaz. Sind mehrere Maſſen M, N, O u. ſ. f. verbunden, ſo läßt ſich auf ähnliche Art für jede dieſer Maſſen ihre Geſchwindigkeit, und der hinterlegte Weg, angeben.

§. 8.

Aufgabe. (Fig. 1.)

An den beyden Rollen (Reine Mechan. §. 73.), welche in verticaler Stellung aneinander befeſtiget ſind, und eine gemeinſchaftliche Axe haben, hangen vermittels ſehr biegſamer Schnüre die beyden ſchweren feſten Maſſen M, N, welche ſo wie die Halbmeſſer der Rollen AC = a, BC = b gegeben ſind; ferner iſt die Maſſe M ſo beſtimmt, daß ſie das Uebergewicht bekömmt, man ſoll für die Zeit t die Tiefe S, zu welcher während derſelben die Maſſe M ſinket, und die Geſchwindigkeit v angeben, welche eben dieſe Maſſe am Ende der Zeit t erlangt, ferner für eben dieſe Zeit die Geſchwindigkeit u, dann die Höhe s beſtimmen, zu welcher die andere Maſſe N ſteigt, wenn man dabey we-

der die Maſſen der Rollen und Schnüre, noch die übrigen Hinderniſſe der Bewegung in Anſchlag bringt.

Aufloͤſung.

1. Die Maſſe M ſinkt nach der lothrechten Richtung AM, und eben ſo ſteigt die Maſſe N nach der verticalen Richtung NB (Reine Mech §. 114 II. Zuſ.)

2. Bezeichnet nun v die Geſchwindigkeit, welche die Maſſe M am Ende der Zeit t erlangt, ſo iſt am Schwerpuncte die Kraft $P = \frac{M\,dv}{2g\,dt}$ nach der Richtung AM den Kräften, wodurch M ſinket, zuſammen gleichgeltend, mithin hält P nach der entgegengeſezten Richtung MA mit eben dieſen Kräften das Gleichgewicht (§. 6. nebſt I. Zuſ.).

3. Eben ſo, wenn u die Geſchwindigkeit der Maſſe N am Ende dieſer Zeit t iſt, ſo hält $Q = \frac{N\,du}{2g\,dt}$ am Schwerpuncte der Maſſe N nach der Richtung BN den Kräften, wodurch N ſteigt, das Gleichgewicht.

4. Stellet man ſich dieſe beyden Kräfte P, Q als wirklich vorhanden vor, ſo wirket am Schwerpuncte der Maſſe M, ihr Gewicht M nach der lothrechten Richtung AM, und P nach der entgegengeſezten Richtung MA, mithin iſt ihre algebraiſche Summe nach der Richtung AM = M — P, die man auf den Punct A des Umfanges der Rolle verlegen kann (Reine Mech. §. 4. IV. Zuſ.).

5. Eben ſo wirkt am Schwerpuncte der Maſſe N nach der Richtung BN, ſowohl ihr Gewicht N, als die Kraft Q, ſo, daß ihre Summe = N + Q iſt, wel-

che man ebenfalls auf den Punkt B der Rolle verlegen kann.

6. Da nun dieſe Kräfte untereinander, mithin auch die auf der einen Seite an A den Kräften an B auf der andern Seite das Gleichgewicht halten, ſo ſind ihre ſtatiſchen Momente gleich (Reine Mech. §. 82. IV. Zuſ.), mithin

7. $a\ (M - P) = b\ (N + Q)$, oder

$$a\left(M - \frac{M\,dv}{2g\,dt}\right) = b\left(N + \frac{N\,du}{2g\,dt}\right) \text{ (Nr. 2 u. 3.)}$$

$$a\,M\left(1 - \frac{dv}{2g\,dt}\right) = b\,N\left(1 + \frac{du}{2g\,dt}\right)$$

8. Nun hat allemal die Maſſe M mit dem Puncte A ihrer Rolle, woran ſie hängt, ſo wie die Maſſe N mit dem Puncte B ihrer Rolle, woran ſia befeſtiget iſt, die nemliche Geſchwindigkeit, bezeichnet alſo γ die gemeinſchaftliche Winkelgeſchwindigkeit der beyden miteinander verbundenen Rollen am Ende der Zeit t, ſo iſt die wahre Geſchwindigkeit des Punctes A, mithin der Maſſe M, alſo $v = a\gamma$ (Reine Mech. §. 169. II. Zuſ.), und eben ſo die wahre Geſchwindigkeit des Punctes B, mithin der Maſſe N, alſo $u = b\gamma$, folglich

9. $u : v = b : a$ mithin

$$u = \frac{b}{a}\ v, \text{ und}$$

10. $du = \frac{b}{a}\ dv$

11. Sezet man dieſen Werth ſtatt du in der Gleichung Nr. 7., ſo wird

12. $a\,M\left(1 - \frac{dv}{2g\,dt}\right) = b\,N\left(1 + \frac{b\,dv}{2a\,g\,dt}\right)$

$$aM - \frac{aM}{2gdt}dv = bN + \frac{b^2Ndv}{2agdt}$$

$$aM - bN = \left(\frac{aM}{2gdt} + \frac{b^2N}{2agdt}\right)dv$$

$$= \frac{a^2M + b^2N}{2agdt}dv, \text{ alſo}$$

13. $dv = \frac{aM - bN}{a^2M + b^2N} 2agdt$, folglich

14. $v = \frac{aM - bN}{a^2M + b^2N} 2agt$, wo keine Const. addirt werden darf.

15. $u = \frac{b}{a} v \ (9) = \frac{aM - bN}{a^2M + b^2N} 2bgt$

16. $dS = vdt$ (Reine Mech. §. 38.) $=$
$\frac{aM - bN}{a^2M + b^2N} 2agtdt$, alſo

17. $S = \frac{aM - bN}{a^2M + b^2N} agt^2$, wo ebenfalls keine Const. Statt hat, indem für $t = 0$, auch $S = 0$ iſt, folglich

$$S = \tfrac{1}{2} vt \ (\text{Nr. } 14.)$$

18. $ds = udt = \frac{aM - bN}{a^2M + b^2N} 2bgtdt$, mithin

19. $s = \frac{aM - bN}{a^2M + b^2N} bgt^2 = \frac{1}{2} ut$ (Nr. 15.) $= \frac{b}{a} S$ (Nr. 17.)

20. Durch Nr. 14, 15, 17 und 19. iſt die ganze Aufgabe aufgelöſet.

I. Zuſaz. Für $M = 12$ Loth, $N = 10$ Loth, ferner $a = 1$ Fuß, $b = \frac{1}{2} = 0,5$ Fuß, bair. Maaßes, und $t = 3$ Secund. wird

$aM - bN = 12 - 5 = 7$

$a^2M + b^2N = 12 + 2,5 = 14,5$

log. (aM - bN)	=	0,8450980	
log. 2a	=	0,3010300	
log. g	=	1,2253480	(R. M. §. 130. V.
log. t	=	0,4771213	u. VI. Zuſ.)
c. d. lg ($a^2M + b^2N$)	=	8,8386320 — 10,	alſo
log. v	=	1,6872293	(Nr. 14.)

folglich erlangt die Maſſe M am Ende der dritten Secunde die Geſchwindigkeit $v = 48,6664$, und ſinket während den 3 Secunden um $S = \frac{1}{2}$ vt (Nr. 17.) $= \frac{3}{2}$ v = 72,9996 Fuß.

Hingegen ſteigt während dieſer Zeit die Maſſe N um $s = \frac{b}{a}$ S (Nr. 19.) $= \frac{1}{2}$ S = 36,4998 bair. Fuß, und bekömmt am Ende derſelben die Geſchwindigkeit $u = \frac{b}{a}$ v (Nr. 9.) = 24,3332 bair. Fuß.

II. Zuſatz. Iſt nur eine Rolle vorhanden, um welche die Schnur, an deren beyden Enden die Maſſen M, N hangen, gelegt iſt, ſo iſt $b = a$, mithin

$$v = \frac{a(M - N)}{a^2(M + N)} 2agt = \frac{M - N}{M + N} 2gt,$$

$S = \frac{1}{2}$ vt, und für die Maſſe N wird nun, $u = v$, $s = S$.

III. Zuſatz. Für eine Rolle, wenn wieder $M = 12$, und $N = 10$ Loth, dann $t = 3$ Sec. iſt $M - N = 2$, $M + N = 22$, ferner

$$
\begin{aligned}
\log. 2 &= 0{,}3010300 \\
\log. g &= 1{,}2253480 \\
\log. (M-N) &= 0{,}3010300 \\
\log. t &= 0{,}4771213 \\
c.\,d.\log.(M+N) &= 8{,}6575773-10 \\
\hline
\log. v &= 0{,}9621066
\end{aligned}
$$

, alſo bekömmt am Ende der dritten Secunde die Maſſe M die Geſchwindigkeit $v = 9{,}1645$, und ſinkt während den 3 erſten Secunden um $S = \frac{1}{2} v t = 13{,}7467$ bair. Fuß, und eben ſo hoch ſteigt indeſſen die Maſſe N, und bekömmt mit M einerley Geſchwindigkeit.

§. 9.

Aufgabe (Fig. 2.)

Die feſte Maſſe M bewegt ſich durch das Zuſammenwirken mehrerer Kräfte U, W, Y u. ſ. w. fortſchreitend ſo, daß ihr Schwerpunct die Curve C, E, E beſchreibt, nebſt der Maſſe M iſt für jede beliebige Zeit t das Verhältniß ihrer drey Coordinaten $CF = x$, $FG = y$, $GE = z$, die zu den 3 aufeinander in C ſenkrechtſtehenden Linien CA, CB, CD parallel ſind, gegeben, man ſucht die Richtungen und Größe der Kräfte, welche am Schwerpuncte der Maſſe eben dieſelbe Bewegung ertheilen.

Auflöſung.

1. Man nehme drey Kräfte P, Q, R, die ſtets auf den Schwerpunct nach Richtungen wirken, welche der Ordnung nach zu CA, CB, CD parallel ſind, von einer ſolchen Beſchaffenheit, daß

2. Die Kraft $P = \frac{M d^2 x}{2 g d t^2}$

3. Die Kraft $Q = \frac{M d^2 y}{2 g d t^2}$, und

4. $R = \frac{Md^2z}{2g\,dt^2}$, ſo ertheilen ſie der Maſſe M eben dieſelbe krummlinigte Bewegung.

Beweis.

5. Der Schwerpunct der Maſſe befinde ſich anfänglich in C, wirken nun die drey Kräfte P, Q, R auf ihn während der Zeit t nach den angeführten Richtungen, und man nimmt auf CA die Abſciſſen, ſo iſt

6. wenn x′, y′, z′ die drey entſprechenden Coordinaten bezeichnen,

7. $d^2x' = \frac{2gP\,dt^2}{M}$ (Reine Mech. §. 140.) $=$

$$\frac{2g\,dt^2}{M} \cdot \frac{Md^2x}{2g\,dt^2} \text{ (Nr. 2.)} = d^2x$$

8. $$d^2y' = \frac{2gQ\,dt^2}{M} = \frac{2g\,dt^2}{M} \cdot \frac{Md^2y}{2g\,dt^2} \text{ (Nr. 3.)} = d^2y$$

9. $$d^2z' = \frac{2gR\,dt^2}{M} = \frac{2g\,dt^2}{M} \cdot \frac{Md^2z}{2g\,dt^2} \text{ (Nr. 4.)} = d^2z.$$

10. Folglich bekömmt die Maſſe, in jedem Momente, nach eben denſelben drey Richtungen, den nemlichen Zuwachs an Geſchwindigkeit, wie durch die Kräfte U, W, Y, mithin die nemliche Bewegung.

I. Zuſaz. Wirken die drey Kräfte P, Q, R nach den entgegengeſetzten Richtungen am Schwerpuncte, ſo halten ſie den Kräften U, W, Y u. ſ. w. zuſammen das Gleichgewicht, mithin umgekehrt

II. Zuſaz. halten drey Kräfte P, Q, R nach Richtungen, die im Schwerpunct auf einander ſenk-

recht ſind, den ſämtlichen Kräften U, W, Y, welche auf eine Maſſe wirken, das Gleichgewicht, ſo ertheilen ſie nach den entgegengeſetzten Richtungen der Maſſe die nemliche Bewegung wie U, W, Y zuſammen.

III. Zuſaz. Bewegt ſich ein Syſtem mehrerer feſter Maſſen fortſchreitend in einer krummen Linie, ſo kann man auf ähnliche Art für jede Maſſe beſonders die 3 Kräfte beſtimmen, welche am Schwerpuncte ihr dieſelbe Bewegung ertheilen.

§. 10.

Lehrſatz.

Wenn die feſte Maſſe M eine fortſchreitende Bewegung erhält, und anfänglich von o bis auf eine gewiſſe Geſchwindigkeit c ſolche beſchleunigt, dann aber ſtets mit dieſer erlangten Geſchwindigkeit c ihre Bewegung gleichförmig fortſezet, ſo iſt in dieſem Zuſtande der gleichförmigen Bewegung die bewegende Kraft F mit dem ſämmtlichen Widerſtande oder Laſte R im Gleichgewichte.

Beweis.

1. Die Maſſe M, welche ihre Bewegung von o anfängt, habe am Ende der Zeit t durch die geſammte wirkende Kraft die Geſchwindigkeit v erlangt, ſo wird

2. am Schwerpuncte nach der entgegengeſezten Richtung die Kraft $P = \frac{M\,dv}{2g\,dt}$ den Kräften F und R zuſammen das Gleichgewicht halten (§. 6.).

3. Wenn nun $v = c$, alſo die Bewegung gleichförmig wird, ſo wird $dv = o$, mithin auch $P = o$; alſo

4. bleibt F mit R allein im Gleichgewichte.

I. Zuſaz. Umgekehrt wenn bey einer in Bewegung geſezten feſten Maſſe M die bewegende Kraft F der geſammten Laſt R das Gleichgewicht hält, ſo ſezet die Maſſe ihre Bewegung mit der erlangten Geſchwindigkeit gleichförmig fort. Denn wenn v die Geſchwindigkeit der Maſſe am Ende der Zeit t iſt, ſo hält am Schwerpuncte nach der entgegengeſezten Richtung die Kraft $P = \frac{M\,d\,v}{2g\,d\,t}$ mit der bewegenden Kraft F, und der geſammten Laſt R das Gleichgewicht, ſtehet alſo F mit R im Gleichgewichte, ſo kann ſolches nicht mehr bleiben, wenn P dazu kömmt, es muß alſo $P = 0$, mithin $dv = 0$, alſo die Geſchwindigkeit unveränderlich, folglich die Bewegung gleichförmig ſeyn.

II. Zuſaz. Der Zuſtand einer gleichförmigen Bewegung tritt ein, wenn anfänglich die bewegende Kraft F größer als der geſammte Widerſtand, oder Laſt R iſt, dann aber entweder F ſo lange abnimmt, bis ſie der Laſt gleich wird, oder aber bey unveränderter Kraft der Widerſtand mit der wachſenden Geſchwindigkeit zunimmt, bis zwiſchen Kraft und dem geſammten Widerſtande Gleichgewicht entſteht, und dann alles unverändert bleibt.

Anmerk. Die meiſten Kräfte, die zur Bewegung der Maſchinen gebraucht werden, z. B. die Kräfte der Menſchen und Thiere, die Geſchwindigkeit des Waſſers und der Luft, ſind von der Art, daß ſie mit der Geſchwindigkeit der bewegten Maſſe abnehmen, ſo wie z. B. der Widerſtand der Luft im Gegentheile mit eben dieſer Geſchwindigkeit wächst.

§. 11.

Aufgabe.

Die Maſſe M drehet ſich durch die Einwirkung einer oder mehrerer Kräfte F, G, H u. ſ. w., um eine

feſte Axe; nebſt der Maſſe M iſt noch für jede Zeit t die entſprechende Winkelgeſchwindigkeit γ gegeben, man ſucht für eine gegebene oder ſelbſt gewählte Stelle, deren Entfernung von der feſten Axe = a iſt, die Kraft P, wodurch die Maſſe eben dieſelbe umdrehende Bewegung erhält.

Auflöſung.

1. Man beſtimme für die gegebene feſte Axe das Moment der Trägheit der Maſſe, nemlich $k^2 M$, (Reine Mech. §. 177.).

2. Dann nehme man die Kraft P ſo, daß ihr Umdrehungsmoment $aP = \frac{Mk^2 d\gamma}{2g dt}$, ſo iſt ſolche die geſuchte Kraft.

Beweis.

3. Wenn man die Kraft P auf die Maſſe M ſo in einer Entfernung von der feſten Axe anbringt, daß aP das Umdrehungsmoment derſelben ausdrückt, und

4. am Ende der Zeit t die dadurch erlangte Winkelgeſchwindigkeit = γ' geſezt wird, ſo iſt

5. $d\gamma' = \frac{2gaPdt}{Mk^2}$ (Reine Mech. §. 177. III. Zuſ.)

$= \frac{2gdt}{Mk^2} \cdot \frac{Mk^2 d\gamma}{2gdt}$ (Nr. 2.) $= d\gamma$, mithin

6. $\gamma' = \gamma$, das iſt, die Kraft P ertheilet der Maſſe M für jede beliebige Zeit t eben dieſelbe Winkelgeſchwindigkeit γ, wie die Kräfte F, G, H an ihren Stellen zuſammen, alſo die nemliche umdrehende Bewegung.

I. Zuſaz.

I. Zuſaz. Giebt man der Kraft P, deren Moment $aP = \frac{Mk^2 d\gamma}{2gdt}$ iſt, eine entgegengeſezte Richtung, ſo hält ſie mit den übrigen vorhandenen Kräften das gleichgewicht, und

II. Zuſaz. eine Kraft, welche an einer Stelle des Körpers, mit allen Kräften, die ihm eine umdrehende Bewegung ertheilen, ſtets im Gleichgewichte ſteht, ertheilet nach der entgegengeſezten Richtung allein der Maſſe eben dieſelbe umdrehende Bewegung.

III. Zuſaz. Kann man alſo für mehrere Kräfte F, G, H u. ſ. w., welche einer feſten Maſſe eine umdrehende Bewegung ertheilen, die Kraft P angeben, welche an einer gegebenen oder ſelbſt gewählten Stelle den ſämmtlichen Kräften das Gleichgewicht hält, ſo kann man, wenn ihre Richtung nun der vorigen entgegengeſezt angenommen wird, daraus die Beſchaffenheit der umdrehenden Bewegung entwickeln.

IV. Zuſaz. Eben ſo, wie es §. 7. bey der fortſchreitenden Bewegung geſchah, läßt ſich dieſe Zurückführung auf das Gleichgewicht einer ſelbſt angenommenen (virtuelen Kraft, wie ſie einige nennen) mit den wirklich vorhandenen Kräften bey mehrern miteinander verbundenen Maſſen anwenden, um daraus die Beſchaffenheit der Bewegung einer jeden einzelnen Maſſe anzugeben.

§. 12.

Aufgabe. (Fig. 3.)

Um eine unbewegliche Rolle, deren Halbmeſſer = a, und Maſſe = M, wird eine Schnur, wovon das

eine End am Umfange befeſtiget iſt, mehrmal geſchlungen, und an dem andern Ende das Gewicht Q angehangen, man ſucht die Beſchaffenheit der Bewegung, vorausgeſezt, daß ſich die Rolle nur um ihren Polzen in einer verticalen Lage drehen kann, und man das Gewicht der Schnur und die übrigen Hinderniſſe noch auſſer Acht laſſen darf.

Aufloͤſung.

1. Vermoͤg der Schwere wird das Gewicht nach verticaler Richtung ſinken, dadurch muß ſich eben ſo viel von der Schnur abwickeln, mithin jeder Punct des Umfanges der Rolle ſich mit eben der Geſchwindigkeit drehen, mit welcher das Gewicht Q ſinkt;

2. druͤckt alſo am Ende der Zeit t, fuͤr die fortſchreitende Bewegung v die Geſchwindigkeit der Laſt Q, und γ die Winkelgeſchwindigkeit eines jeden Punctes am Umfange der Rolle z. B. des Punctes A aus, ſo iſt

3. $v = a\gamma$, mithin $dv = a d\gamma$.

4. Betrachtet man jede dieſer beyden Bewegungen nach der Anleitung des vorhergehenden 11ten §. abgeſondert, ſo iſt

5. fuͤr die umdrehende Bewegung der Rolle das Moment der Traͤgheit $= \frac{1}{2} a^2 M$ (Reine Mech. §. 181. Zuſ.), und am Umfange wuͤrde die Kraft P, deren Moment $aP = \frac{M a^2 d\gamma}{4 g d t}$ iſt, nach der Richtung der Tangens AQ eben dieſelbe umdrehende Bewegung ertheilen, (§. 11.).

6. Eben ſo würde am Schwerpuncte der Laſt Q nach der verticalen Richtung A Q die Kraft $R = \frac{Q\,dv}{2g\,dt}$ (§. 6.) eben dieſelbe fortrückende Bewegung der Laſt Q ertheilen, das Moment dieſer Kraft, welche man ebenfalls nach A verlegen kann (Reine Mech. §. 4. IV. Zuſ.), iſt nun in Beziehung auf die Rolle $= aR = \frac{aQ\,dv}{2g\,dt} = \frac{a^2Q\,d\gamma}{2g\,dt}$ (Nr. 3.)

7. Die beyden Kräfte Nr. 5 u. 6. halten nun, wenn man ihre Richtungen entgegengeſezt nimmt, alſo nach der Richtung Q A mit der vorhandenen Kraft, das iſt mit dem an A angebrachten Gewichte Q das Gleichgewicht, alſo wird

8. $\frac{Ma^2d\gamma}{4g\,dt} + \frac{Qa^2d\gamma}{2g\,dt} = aQ$

$\frac{Ma\,d\gamma}{4g\,dt} + \frac{2Qa\,d\gamma}{4g\,dt} = Q$

$\frac{a\,d\gamma}{4g\,dt}(2Q+M) = Q$, alſo

9. $d\gamma = \frac{4gQ\,dt}{a(2Q+M)}$, mithin

10. $\gamma = \frac{4gQt}{a(2Q+M)}$, wo keine beſtändige Größe addirt werden darf; ferner (Nr. 3.)

11. $v = a\gamma = \frac{4gQt}{(2Q+M)}$, alſo

12. $ds = v\,dt = \frac{4gQt\,dt}{2Q+M}$, folglich

13. $s = \frac{2gQt^2}{2Q+M}$, wo ebenfalls keine Const. ad⸗dirt werden darf.

14. Durch Nr. 10. iſt die Winkelgeſchwindigkeit der Rolle, durch Nr. 11. die wahre Geſchwindigkeit der Laſt Q, welche ſie am Ende der Zeit t erlangt, und durch Nr. 13. die Länge der Schnur, die ſich während dieſer Zeit abwickelt, mithin die Tiefe, zu welcher die Laſt während dieſer Zeit ſinkt, mithin dadurch die ganze Beſchaffenheit der Bewegung beſtimmt.

I. Zuſaz. Wenn die umdrehende Bewegung aus einer beſchleunigten in eine gleichförmige übergeht, ſo hält im leztern Zuſtande die bewegende Kraft F der geſammten Laſt Q das Gleichgewicht; denn wenn die Vorrichtung, welche ihre Bewegung von der Ruhe anfängt, durch die bewegende Kraft am Ende der Zeit t die Winkelgeſchwindigkeit γ erlangt, ſo würde die Kraft P, deren Umdrehungsmoment $aP = \frac{Mk^2 d\gamma}{2g dt}$ (§. 11.), eben dieſer Vorrichtung die nemliche umdre⸗hende Bewegung ertheilen, und daher nach der ent⸗gegengeſezten Richtung mit den vorhandenen Kräften F, Q das Gleichgewicht halten; geht aber die anfangs beſchleunigte in eine gleichförmige Bewegung über, ſo wird γ unveränderlich, mithin $d\gamma = 0$, alſo auch $P = 0$, mithin ſteht nun F mit Q allein im Gleich⸗gewichte.

II. Zuſaz. Umgekehrt wenn die bewegende Kraft P mit der geſammten Laſt Q in's Gleichgewicht tritt, ſo wird $aP = \frac{Mk^2 d\gamma}{2g dt} = 0$, indem ſonſt zwiſchen F und Q das Gleichgewicht nicht mehr beſtehen kann,

mithin iſt nun auch $d\gamma = 0$, alſo die Winkelgeſchwin⸗digkeit γ unveränderlich, und daher die umdrehende Bewegung gleichförmig.

§. 13.

Erklärungen.

Jede Maſchine hat ihre beſtimmte Verrichtungen, die ſie bey fortdaurender Bewegung nur immer wie⸗derholet, man nennet daher

a. denjenigen Zuſtand der Maſchine, in welchem ſie ihre beſtimmte Verrichtung ſtets in eben derſelben Zeit wiederholet, ihren **Beharrungsſtand**, und

b. die zu jeder Wiederholung angewandte Zeit die **Wirkungsperiode**; ſezet nun

c. eine Maſchine während der Wirkungsperiode ihre Bewegungen gleichförmig fort, ſo heißt ſie eine **gleichförmigwirkende Maſchine**;

d. wirket ſie ungleichförmig, z. B. im Anfange der Periode beſchleunigt, dann wieder am En⸗de derſelben verzögernd, ſo heißt ſie eine **ungleichförmigwirkende Maſchine**.

I. **Zuſaz.** Bey gleichförmig wirkenden Maſchi⸗nen hält im Beharrungsſtande die geſammte bewegen⸗de Kraft dem ganzen Widerſtande das Gleichgewicht (§. 10 und 12. I. Zuſ.).

II. **Zuſaz.** Wenn bey einer Maſchine in ihrem Beharrungsſtande die bewegende Kraft ſtets mit der geſammten Laſt im Gleichgewichte ſteht, ſo iſt ſie eine gleichförmig wirkende Maſchine, denn die in Bewe⸗

gung geſezte Maſchine wird vermög der Trägheit mit der erlangten Geſchwindigkeit ſolche gleichförmig fortſezen.

III. Zuſaz. Bey ungleichförmig wirkenden Maſchinen kann nicht während der ganzen Wirkungsperiode Gleichgewicht zwiſchen der bewegenden Kraft, und dem Widerſtande, ſtatt haben; und wenn nicht ſtets dieſes Gleichgewicht vorhanden iſt, ſo kann die Maſchine nicht gleichförmig wirken.

§. 14.

Lehrſaz. (Fig. 4.)

Wenn am Hebel am Puncte A die Kraft P mit der Laſt Q am Puncte B das Gleichgewicht hält; und die Richtungen der beyden Kräfte auf die Hebelsarme ſenkrecht ſind, ſo verhalten ſich die beyden Kräfte umgekehrt wie die Wege, welche im erſten unendlich kleinen Zeittheilchen dt die von ihnen ergriffenen Puncte nach den Richtungen ihrer Kräfte hinterlegen würden.

Beweis.

1. Wenn ſich der Hebel während dem Zeittheilchen dt um den unendlich kleinen Winkel, deſſen Maaß für den Halbmeſſer $1 = d\varphi$ iſt, drehet, ſo beſchreibt

2. der von der Kraft P ergriffene Punct A den unendlich kleinen Bogen $Aa = AC\, d\varphi$ (Reine Mech. §. 169. II. Zuſ.), welcher als Stückgen der Tangens mit der Kraft einerley Richtung hat.

3. In eben dieſem unendlich kleinen Zeittheilchen iſt $Bb = CB \,.\, d\varphi$ der vom Laſtpuncte hinterlegte unendlich kleine Bogen, welcher ebenfalls als Stückgen der Tangens eine der Laſt Q entgegengeſezte Richtung hat, mithin

4. $Bb : Aa = CB : AC$.

5. Nun iſt aber für den Zuſtand des Gleichgewichts am Hebel überhaupt:

$P : Q = CB : AC$ (Reine Mech. §. 30. II. Zuſ.); folglich

6. $P : Q = Bb : Aa$.

I. Zuſaz. Bey einer Maſchine, welche ſich um eine feſte Axe drehen läßt, verhält ſich im Zuſtande des Gleichgewichtes die bewegende Kraft zum geſammten Widerſtande, wie der Weg des Laſtpunctes im erſten unendlich kleinen Zeittheilchen, zu den Weg des Kraftpunctes in eben dieſem Zeittheilchen. Denn wenn die geſammte Kraft ſowohl, als der geſammte Widerſtand oder Laſt, jede auf einen Punct reducirt wird, ſo, daß ſie nach den Richtungen der Tangenten ihrer Umdrehungskreiſe wirken, ſo verhält ſich alles wie beym Hebel (Reine Mech. §. 82. II. Zuſ.).

II. Zuſaz. Umgekehrt, wenn ſich bey einer Maſchine, die ſich um eine feſte Axe dreht, die Kraft zur Laſt, umgekehrt wie die Wege verhalten, welche die von ihnen ergriffenen Puncte im erſten Zeittheilchen dt hinterlegen würden, ſo ſtehen ſie miteinander im Gleichgewichte.

III. Zuſaz. Bezeichnet v die Geſchwindigkeit, mit welcher der von P ergriffene Punçt ſeine Bewegung anfangen würde, ſo iſt $Aa = vdt$ (Reine Mech. §. 38.), ferner wenn eben ſo u die Geſchwindigkeit des von Q ergriffenen Punctes B bezeichnet, ſo iſt $Bb = udt$, mithin im Zuſtande des Gleichgewichtes; $P : Q = udt : vdt$, das iſt: Im Zuſtande des Gleichgewichtes verhalten ſich bey Maſchinen, welche

ſich um eine feſte Axe drehen, die Kräfte umgekehrt wie die Geſchwindigkeiten, mit welchen die von ihnen ergriffenen Puncte ihre Bewegung anfangen würden.

§. 15.

Lehrſatz. (Fig. 5.)

Wenn bey der ſchiefen Ebene, in der Ebene des Neigungswinkels BAC (Reine Mech. §. 155.), die Kraft S auf den Schwerpunct G einer feſten Maſſe, deren Gewicht P iſt, wirket, und mit dieſem das Gleichgewicht hält, ſo verhält ſich S zu P wie der Weg, welchen der Schwerpunct nach der Richtung der Schwere im erſten unendlich kleinen Zeittheilchen hinterlegen würde, zu jenem, welchen eben dieſer Schwerpunct in eben dieſem Zeittheilchen nach der Richtung der Kraft S durchlaufen würde.

Beweis.

1. Die Vorrichtung geſtattet dem feſten Körper keine andere Bewegung als längſt der Richtung AB auf- oder abwärts,

2. bewegt ſich nun ſolcher während dem unendlich kleinen Zeittheilchen dt aufwärts, ſo daß der Schwerpunct G dadurch nach G′ kömmt, ſo iſt der hinterlegte Weg GG′ zu AB parallel.

3. Man fälle aus G′ auf die Richtung GE der Kraft S die ſenkrechte G′e, ſo iſt Ge der Weg, welchen in eben dieſem Zeittheilchen der Schwerpunct nach der Richtung der Kraft S durchläuft.

4. Zieht man von G′ auf die wagrechte Baſis AC die verticale G′c′, und auf dieſe von G die ſenkrechte Linie Gg, iſt G′g die Höhe, um welche indeſ-

ſen der Schwerpunct ſteigt, mithin der Weg, welchen der Schwerpunct nach der entgegengeſezten Richtung der Schwere, oder Kraft P hinterlegt.

5. Schneidet die Richtung GE der Kraft S die Baſis der ſchiefen Ebene unter dem Winkel φ, und bezeichnet α die Neigung der ſchiefen Ebene, ſo iſt

6. der Winkel $G'Gg = \eta = \alpha$, und
$gGE = \vartheta = \varphi$, mithin

7. in den Dreyecken $G'Ge$, und $G'Gg$
$GG' : Ge = 1 : \cos(\vartheta + \eta) = 1 : \cos(\varphi + \alpha)$
$GG' : G'g = 1 : \sin \eta = 1 : \sin \alpha$, alſo

8. $G'g : Ge = \sin \alpha : \cos(\varphi + \alpha)$ (Arithm. §. 218.).

9. Da aber der Vorausſezung gemäß S mit P im Gleichgewichte ſteht, ſo iſt:

$S : P = \sin \alpha : \cos(\varphi + \alpha)$ (Reine Mech. §. 159. Nr. 4.), folglich

10. $S : P = G'g : Ge$.

11. Würde die Kraft S nach der Richtung GI wirken, mithin nicht wie Nr. 5. ſie ſelbſt, ſondern nach der entgegengeſezten Seite zu, die Baſis in II ſchneiden, ſo iſt nun Ge' der Weg, welchen der Schwerpunct während dt nach der Richtung GI hinterlegt.

12. Ferner, wenn man wieder $GIIE = \varphi'$ ſezet, ſo iſt der Winkel $e'GG' = e'Gg - \eta = \varphi' - \eta = \varphi' - \alpha$.

13. $GG' : Ge' = 1 : \cos(\varphi' - \alpha)$
$GG' : G'g = 1 : \sin \alpha$ (Nr. 7.), mithin

14. $G'g : Ge' = \sin \alpha : \cos(\varphi' - \alpha)$
$S : P = \sin \alpha : \cos(\varphi' - \alpha)$ (Reine Mech. §. 159. II. Zuſ.), alſo

15. S : P = G′g : Gc′, folglich iſt der Satz für jede Richtung der Kraft S erwieſen.

I. Zuſaz. Wenn bey der ſchiefen Ebene die Kraft S auf den Schwerpunct einer feſten Maſſe, deren Gewicht P iſt, wirkt, und ſich dieſe beyden Kräfte umgekehrt wie die Wege verhalten, welche der Schwerpunct im erſten Zeittheilchen nach ihren Richtungen hinterlegen würde, ſo hält S mit P das Gleichgewicht; denn wenn S : P = G′g : Gc (Nr. 10.)

= G′g : Gc′ (Nr. 15.), ſo iſt im erſten Falle S : P = sin α : cos (φ + α) (Nr. 8 u. 9.)

im zweyten = sin α : cos (φ + α) (Nr. 13 u. 14), folglich hält allemal S mit P das Gleichgewicht (Reine Mech. §. 159.).

II. Zuſaz. Bezeichnen v, u die Geſchwindigkeiten, mit welchen der Schwerpunct die Bewegung nach den beyden Richtungen der Kräfte S und P anfangen würde, ſo iſt Nr. 8 u. 14. Gc = vdt, und eben ſo G′g = udt, mithin S : P = udt : vdt = u : v.

III. Zuſaz. In wieferne ſich alſo eine Maſchine auf den Hebel, oder die ſchiefe Ebene zurückführen läßt, ſo verhält ſich bey ihr im Zuſtande des Gleichgewichts die auf einen Puncte reducirte Kraft, zu der ebenfalls auf einen Punct reducirten Laſt, wie die Geſchwindigkeit, mit welcher der von der Laſt ergriffene Punct ſeine Bewegung anfangen würde, zur Geſchwindigkeit des von der Kraft ergriffenen Punctes.

Anmerk. Man nimmt leztern Saz gewöhnlich als Grundſaz der ganzen Maſchinenlehre, allein da der angeführte Beweis nicht allgemein iſt, ſo werde ich auch nur unter den angeführten Bedingungen, wo ſich nemlich die Maſchine auf einen Hebel oder ſchiefe Ebene reduciren läßt, von ihm Gebrauch machen.

§ 16.

Erklärungen.

a Das Product der Kraft in die anfängliche Geſchwindigkeit des von der Kraft angegriffenen Punctes der Maſchine, heißt das mechaniſche Moment der Kraft, und eben ſo

b. das Product der Laſt in die anfängliche Geſchwindigkeit des Leidenden, das iſt, des von der Laſt ergriffenen Punctes, heißt das mechaniſche Moment der Laſt.

I. Zuſaz. Im Beharrungsſtande iſt bey gleichförmig wirkenden Maſchinen das mechaniſche Moment der geſammten Kraft P, dem mechaniſchen Momente der geſammten Laſt Q gleich. Denn im Beharrungsſtande iſt bey gleichförmig wirkenden Maſchinen P mit Q im Gleichgewichte (§. 13. I. Zuſ.), bezeichnet nun C die Geſchwindigkeit des Kraftpunctes, und c die Geſchwindigkeit, mit welcher der Laſtpunct ſeine Bewegung fortſezen würde, ſo iſt $P : Q = c : C$ (§. 15. III. Zuſ.), alſo $P . C = Q . c$

II. Zuſaz. Bezeichnet Q nur die Nutz- hingegen F die geſammte Nebenlaſt, wenn ſie auf den Laſtpunct reducirt wird, ſo iſt für gleichförmig wirkende Maſchinen im Beharrungsſtande $P . C = (Q + F) c$.

III. Zuſaz. Bezeichnen B, b die während der Wirkungsperiode gleichförmig durchloffenen Räume des Kraft- und Laſtpunctes, ſo iſt $C : c = B : b$, alſo $P : Q = b : B$, und $P = \frac{b}{B} Q$.

§. 17.

Aufgabe.

Für eine Maſchine, welche ſich um eine Axe dreht, iſt bey ihrem Beharrungsſtande die auf einen Punct reducirte Kraft P, nebſt den Wegen B, b, wovon erſtern der Kraft-, den andern der Laſtpunct, während der Zeit t hinterlegt, gegeben, man ſoll dieſe Kraft auf den Laſtpunct reduciren.

Auflöſung.

1. Wenn P′ die geſuchte reducirte Kraft bezeichnet, ſo muß ſolche am Laſtpunct das nemliche Umdrehungsmoment, wie P am Kraftpuncte haben (§. 3.), mithin

2. muß P′ mit P nach entgegengeſezter Richtung das Gleichgewicht halten.

3. Nimmt man alſo $P' : P = B : b$, mithin

4. $P' = \frac{B}{b} P$, ſo iſt ſie die geſuchte auf den Laſtpunct reducirte Kraft (Reine Mech. §. 25. II. Zuſ.).

I. Zuſaz. Eben ſo läßt ſich die geſammte Laſt Q auf den Kraftpunct reduciren, es iſt nemlich die reducirte Laſt $Q' = \frac{b}{B} Q$.

II. Zuſaz. Da die Lage des Kraftpunctes gegen den Laſtpunct ſtets unverändert vermög der feſten Vorrichtung bleibt, ſo entſpricht ihnen immer eben dieſelbe Winkelgeſchwindigkeit, mithin, wenn β, γ die Entfernungen des Kraft- und Laſtpunctes von der Axe bezeichnen, ſo iſt für jede Zeit t, allemal $B : b = \beta : \gamma$.

III. Zuſaz. Bekömmt der Kraftpunct am Ende der Zeit t die Geſchwindigkeit C; ſo iſt die entſprechen-

de Geſchwindigkeit des Laſtpunctes $C' = \frac{b}{B} C$; denn bezeichnet V die gemeinſchaftliche Winkelgeſchwindigkeit am Ende der Zeit t, ſo iſt $C = \beta V$, und $C' = \gamma V$ (Reine Mech. §. 169. II. Zuſ.), alſo $C' : C = \gamma : \beta = b : B$ (II. Zuſ.), folglich $C' = \frac{b}{B} C$.

IV. Zuſaz. Umgekehrt bezeichnet c die Geſchwindigkeit des Laſtpunctes, ſo iſt die entſprechende Geſchwindigkeit des Kraftpunctes $c' = \frac{B}{b} c$.

§. 18.

Aufgabe.

Eine Maſchine, welche ſich um eine feſte Axe drehet, muß periodiſch eine ruhende Maſſe N + O in Bewegung ſezen, ſolche am Ende der Zeit t wieder verlaſſen, und in der nächſtfolgenden Zeit t eben dieſe Vorrichtung wiederholen. Die beſtändig in Bewegung bleibende Maſſe ſey = M; ferner die für den Beharrungsſtand nothwendige auf einen Punct reducirte unveränderliche Kraft = P, der während der Wirkungsperiode vom Kraftpuncte hinterlegte Weg = B, die auf einen Punct reducirte unveränderliche geſammte Laſt = Q, und der vom Laſtpuncte während der Wirkungsperiode t hinterlegte Weg = b; man ſucht die Beſchaffenheit der Bewegung, und das Verhältniß zwiſchen den angeführten Größen, vorausgeſezt, daß M, N, O die ebenfalls auf den Laſtpunct nach Reiner Mech. §. 171. I. Zuſ. reducirten Maſſen bezeichnen.

Auflöſung.

1. Die Vorrichtung der Maſchine beſteht der Annahme gemäß in dem, daß ſie eine ruhende Maſſe

$N + O$ in Bewegung ſezt, dann ſie wieder fahren läßt, aber ſogleich wieder eine eben ſo große ruhende Maſſe ergreift, und ſie auf die nemliche Art, und in eben der Zeit t wie vorher in Bewegung ſezt, daß ſie alſo ſtets dieſe Verrichtungen in der nemlichen Zeit wiederholet.

2. Wenn am Ende einer Periode, alſo am Ende der Zeit t der Kraftpunct die Geſchwindigkeit C erlangt, ſo iſt die entſprechende Geſchwindigkeit des Laſtpunctes $= \frac{b}{B}\ C$ (§. 17. III. Zuſ.).

3. Nun verläßt aber die Maſchine einen Theil der Maſſe, ſo daß nur noch M vermög der Trägheit die Bewegung mit der Geſchwindigkeit $\frac{b}{B}\ C$ fortſezen würde, wenn nicht

4. ſogleich die ruhende Maſſe $N + O$ ergriffen würde, dadurch entſteht ein Stoß, durch welchen offenbar die Geſchwindigkeit des Kraftpunctes vermindert wird, ſezet man nun, daß nach dem Stoße die Geſchwindigkeit des Kraftpunctes $= c$, ſo iſt die entſprechende Geſchwindigkeit des Laſtpunctes nach dem Stoße $= \frac{b}{B}\ c$.

5. Indem ferner die während dem Stoße verfloſſene Zeit ſehr kurz iſt, ſo kann man dieſe Zeit ſowohl, als die während dieſer ſehr kleinen Zeit durch die Uebermucht ertheilte Beſchleunigung zur Erleichterung der Auflöſung auſſer Acht laſſen, mithin

6. $M \frac{b}{B}\ C = (M + N + O) \frac{b}{B}\ c$ ſezen (Reine Mech. §. 232. VI. Zuſ.). dadurch wird alſo

7. $c = \frac{M.\ C}{M + N + O}$

8. Nun iſt die auf den Laſtpunct reducirte Kraft $= \frac{B}{b} P$ (§. 17.), mithin

9. $\frac{B}{b} P - Q$ die Ueberwucht der Kraft. (§. 5.)

10. Die Ueberwucht iſt nun während der ganzen Periode oder Zeit t wirkſam, mithin iſt nach §. 133. V. Zuſ. Reine Mech. der vom Laſtpunct in dieſer Zeit hinterlegte Weg

$$b = \frac{b}{B} ct + \frac{\frac{B}{b} P - Q}{M+N+O} g t^2, \text{ und}$$

11. am Ende dieſer Zeit die Geſchwindigkeit des Laſtpunctes

$$\frac{b}{B} c + \frac{\frac{B}{b} P - Q}{M+N+O} 2gt = \frac{b}{B} C \text{ (Nr. 2.)}$$ mithin, wenn man für c deſſen Werth Nr. 7. ſezet, ſo iſt

$$12.\ \frac{M}{M+N+O} \cdot \frac{b}{B} C + \frac{\frac{B}{b} P - Q}{M+N+O} 2gt = \frac{b}{B} C$$

$$\frac{b}{B} \left[1 - \frac{M}{M+N+O} \right] C = \frac{\frac{B}{b} P - Q}{M+N+O} 2gt$$

$$\frac{b}{B} C \cdot \frac{N+O}{M+N+O} = \frac{\frac{B}{b} P - Q}{M+N+O} 2gt, \text{ und}$$

$$13.\ \frac{b}{B} C = \frac{\frac{B}{b} P - Q}{N+O} 2gt.$$

14. Sezet man in die Gleichung Nr. 10. ebenfalls ſtatt c deſſen Werth aus Nr. 7., ſo iſt

$$b = \frac{M}{M+N+O} \cdot \frac{b}{B} Gt + \frac{\frac{B}{b} P - Q}{M+N+O} gt^2$$

$$= \frac{M}{M+N+O} \cdot \frac{\frac{B}{b} P - Q}{N+O} 2gt^2 + \frac{\frac{B}{b} P - Q}{M+N+O} gt^2$$

(Nr. 13.)

$$= \frac{M\left(\frac{B}{b} P - Q\right) 2gt^2 + (N+O)\left(\frac{B}{b} P - Q\right) gt^2}{(N+O)\,(M+N+O)}$$

folglich

15. $(N+O)\,(M+N+O)\,b = (2M+N+O)$ $\left(\frac{B}{b} P - Q\right) gt^2$; wodurch zwiſchen den in der Aufgabe angeführten Größen ihr Verhältniß beſtimmt iſt.

I. Zuſaz. Da vermög Nr. 15. $\frac{B}{b} P - Q = \frac{(N+O)\,(M+N+O)\,b}{gt^2\,(2M+N+O)}$, ſo iſt für den Beharrungsſtand einer ſolchen ungleichförmig wirkenden Maſchine die erfoderliche Kraft,

$$P = \frac{b}{B} \left[Q + \frac{(N+O)\,(M+N+O)\,b}{gt^2\,(2M+N+O)} \right]$$

II. Zuſaz. Für eben dieſe Laſt Q, und während dieſer Zeit t von dem Kraft- und Laſtpuncte hinterlegten Wege B, b, würde bey einer gleichförmig wirkenden Maſchine die erfoderliche Kraft $P' = \frac{b}{B} Q$ ſeyn (§. 16. III. Zuſaz.), folglich iſt bey der ungleichförmig wirkenden Maſchine die erforderliche Kraft P um $\frac{b}{B} \cdot \frac{(N+O)\,(M+N+O)\,b}{gt^2\,(2M+N+O)}$ größer.

III. Zu-

III. Zuſaz. Sezet man die ſtets nothwendige auf den Laſtpunct reducirte Ueberwucht $\frac{B}{b}$ P - Q (Nr. 9.) = V, ſo iſt

$$V = \frac{(N+O)}{gt^2} \frac{(M+N+O)\,b}{(2M+N+O)} \text{ (I. Zuſ.)}$$

Wenn nun N + O in Beziehung der beſtändig in Bewegung bleibenden Maſſe ſehr gering iſt, ſo kann man $V = \frac{bM(N+O)}{2gt^2M} = \frac{b}{2gt^2} \cdot (N+O)$ ſezen.

IV. Zuſaz. Würde hingegen M in Beziehung auf N + O ſehr gering ſeyn, ſo würde

$$V = \frac{b(N+O)^2}{gt^2(N+O)} = \frac{b}{gt^2}\,(N+O)$$ alſo

um die Hälfte gröſer als im dritten Zuſaz ſeyn.

V. Zuſaz. Je gröſer alſo die beſtändig in Bewegung bleibende Maſſe M in Beziehung auf die ruhende N + O, welche periodiſch in Bewegung geſezt werden muß, iſt, deſto geringer darf die Ueberwucht der Kraft ſeyn; indeſſen da N + O gegen M nie ganz verſchwinden kann, ſo wird doch ſtets $V > \frac{b}{2gt^2} \cdot (N+O)$ ſeyn.

VI. Zuſaz. Da die am Ende der Wirkungsperiode jederzeit erlangte gröſte Geſchwindigkeit des Kraftpunctes $C = \frac{B}{b} \cdot \frac{\frac{B}{b}P - Q}{N+O} \cdot 2gt$ (Nr. 13.);

$= \frac{B}{b} \cdot \frac{V}{N+O}\, 2gt$ (III. Zuſ.), ſo nimmt C

ab, wenn man die Maſſe M vermehrt, denn in dieſem Falle wird V kleiner. (V. Zuſ.)

VII. Zuſaz. Die im Anfange der Wirkungsperiode eintrettende kleinſte Geſchwindigkeit des Kraftpunctes iſt $c = \frac{M}{M+N+O} C$ (Nr. 7.), mithin

$$C - c = C - \frac{M}{M+N+O} C = \frac{N+O}{M+N+O} C.$$

Wird alſo die beſtändig in Bewegung bleibende Maſſe M vermehret, ſo wird nicht nur C kleiner (VI. Zuſ.), ſondern auch der Nenner des Bruches größer, alſo der Bruch kleiner, folglich der Unterſchied $C - c$ in doppelter Beziehung vermindert.

VIII. Zuſaz. $C + c = C + \frac{M}{M+N+O} C = \frac{2M+N+O}{M+N+O} C$; mithin wird die mittlere Geſchwindigkeit; oder $\frac{C+c}{2} = \frac{1}{2} C \frac{2M+N+O}{M+N+O}$; iſt nun M in Beziehung auf $N+O$ ſehr groß, ſo wird beynahe $\frac{C+c}{2} = \frac{1}{2} C \frac{2M}{M} = C = c$ (Nr. 7.), ſo, daß ſich alſo die Bewegung der gleichförmigen ſtets mehr nähert, je größer M in Beziehung auf $N+O$ iſt.

Anmerk. Die Nr. 5. willkürlich angenommene Bedingung, die freylich nie ganz ſtatt haben kann, wird wohl keine bedeutende Abweichung hervorbringen, ſo daß Hr. Langsdorf, aus deſſen Grundlehren der mechaniſchen Wiſſenſchaften ich gegenwärtige Säze genommen habe, in dieſer Hinſicht ausruft: Möchte doch die ganze Maſchinenlehre nur auf ſolchen Fictionen beruhen!

§. 19.

Erklärungen.

a. Da die Schwungkraft einer Maſchine, welche ſich um eine feſte Axe dreht, im geraden Verhältniſſe mit der Größe der bewegten Maſſe ſteht (Reine Mech. §. 165. I Zuſ.), ſo heißt eine Maſſe, welche nur zur Vermehrung dieſer Schwungkraft angebracht wird, nach Verſchiedenheit ihrer Geſtalt, ein Schwungkolben, Schwungrad u. ſ. f.

b. Wird einer Maſchine mehr Maſſe beygefügt, als ihre Feſtigkeit, und Beförderung ihres beſtimmten Zweckes erfodert, ſo heißt ſie überſezt.

I. Zuſaz. Eine gleichförmig wirkende Maſchine darf nicht mehr Maſſe enthalten, als zu ihrer Feſtigkeit erfoderlich iſt, denn die überflüſſig beygefügte Maſſe vermehrt die Nebenlaſt, und iſt daher ſchädlich.

II. Zuſaz. Bey ungleichförmig wirkenden Maſchinen iſt Vermehrung der beſtändig in Bewegung bleibenden Maſſe nüzlich. (§. 18. V - VIII. Zuſ.)

§. 20.

Erklärung.

Die Größe der Wirkung einer Maſchine beſteht in der Größe der bewegten Laſt, und der dem Laſtpuncte ertheilten Geſchwindigkeit, mithin in dem mechaniſchen Momente der Laſt (§. 16.), man unterſcheidet alſo

a. den Totaleffect der Maſchine, das iſt, das mechaniſche Moment der geſammten Laſt, und

b. den **reellen** oder **Nutz⸗Effect** derſelben (§. 4.), nemlich das mechaniſche Moment der Nutzlaſt.

I. **Zuſaz.** Die Vollkommenheit einer Maſchine beſteht in der Größe des Nutz⸗Effectes.

II. **Zuſaz.** Zweckmäßige Anordnung einer Maſchine ſezt alſo Kenntniſſe voraus

a. von der Feſtigkeit der Materialien, damit durch Mangel an Maſſe die Maſchine nicht zerbrechlich, oder durch Ueberfluß überſezt wird.

b. Von der Nebenlaſt, und der Art ſie zu vermindern.

c. Vom Maaße der Kräfte, welche zur Bewegung der Maſchine angewendet werden.

II. Hauptſtück.

Von der Feſtigkeit der Materialien.

§. 21.

Erfahrungsſaz.

Bey keinem der bekannten phyſiſchen feſten Körper iſt der Zuſammenhang ſeiner Theile ſo groß, daß er nicht durch irgend eine Kraft getrennet werden könnte.

§. 22.

Erklärungen.

a. Wenn eine Kraft den Zuſammenhang der Theile eines Körpers zu trennen ſtrebt, ſo heißt der Widerſtand, welchen der Körper dieſer Kraft entgegenſezet, überhaupt die **Feſtigkeit** deſſelben.

b. Die Größe dieſes Widerſtandes, welchen ein Körper vermög des Zuſammenhanges ſeiner Theile obiger Kraft entgegenzuſezen im Stande iſt, heißt die Größe der Feſtigkeit, oder die beſtimmte Feſtigkeit des Körpers.

I. Zuſaz. Die Feſtigkeit eines Körpers verhält ſich nur leidend, das iſt, der Widerſtand äuſſert ſich nur, wenn eine Kraft den Zuſammenhang der Theile zu trennen ſtrebt, er nimmt ſelbſt mit der Kraft ſo lange zu, bis die trennende Kraft ſo groß, als die Kraft iſt, wodurch der Zuſammenhang der Theile des Körpers bewirkt wird.

II. Zuſaz. Die Größe der Feſtigkeit eines Körpers iſt alſo durch die Größe der Kraft Q beſtimmt, welche mit ihr im Gleichgewichte ſteht, ſo daß bey mindeſter Zunahme von Q die Trennung der Theile folgt.

§. 23.

Lehnſaz.

Ein Körper von einerley Materie läßt ſich als Aggregat unzähliger gleichartiger Faſern betrachten, deren Richtungen miteinander parallel laufen.

I. Zuſaz. Die Feſtigkeit eines Körpers hängt von der Feſtigkeit ſeiner einzelnen Faſern, und von der Menge dieſer Faſern ab.

II. Zuſaz. Die Feſtigkeit der einzelnen Faſern läßt ſich nur durch Verſuche angeben.

III. Zuſaz. Zur Erleichterung der Unterſuchung werden ſenkrechte Prismen und Cylinder gewählet, deren Seiten mit den Faſern parallel ſind, ſo daß alſo die Faſern auf den Grundflächen ſenkrecht ſtehen, im gegenwärtigen Hauptſtücke werden daher unter

Prismen und Cylindern ſtets ſenkrechte mit der angeführten Beſchaffenheit verſtanden.

Anmerk. Daß die Lehre über Feſtigkeit nie genaue Reſultate geben kann, leuchtet bey dem Mangel der Kenntniß der innerlichen Beſchaffenheiten der Körper, und ihrer unendlichen Mannigfaltigkeit für ſich ein, man darf daher nie auf genaue Uebereinſtimmung derſelben mit der Erfahrung rechnen, ſondern muß ſich mit einer Annäherung begnügen.

§. 24.

Erklärungen. (Fig. 6–8.)

Wenn ein ſenkrechtes Prisma oder Cylinder mit einem andern Körper L M ſo verbunden oder unterſtüzt wird, daß die gemeinſchaftliche Durchſchnittsebene A B C D (in den Figuren 6 und 8 iſt nur der Diameter A B dieſer Durchſchnitts-Kreiſe ſichtbar) zur Grundfläche parallel iſt, und

a. die Kraft Q nach der Richtung K Q (Fig. 6.) zur Seite des Cylinders parallel den Cylinder zu **zerreiſſen** ſtrebt, ſo heißt der Widerſtand, welchen der Cylinder dieſer Kraft entgegenzuſezen im Stande iſt, deſſen **abſolute Feſtigkeit** (cohaerentia absoluta).

b. Wirket hingegen die Kraft ſenkrecht auf eine Seite des Cylinders oder Prisma (Fig. 7.), ſo daß ſie den Körper zu **zerbrechen** ſtrebt, ſo heißt der vom Cylinder oder Prisma mögliche Widerſtand die **relative Feſtigkeit** deſſelben (cohaerentia respectiva, relativa).

c. Drückt hingegen die Kraft Q (Fig. 8.) den Cylinder gegen die Unterſtüzung zur Seite parallel, ſo daß ſie ſolchen zu **zerdrücken** oder zu **zerknicken**

ſtrebt, ſo heißt der Widerſtand, welchen der Cylinder entgegenzuſetzen vermag, die Feſtigkeit des zuſammengedrückten Körpers (cohaerentia corporum compressorum), oder die Feſtigkeit einer Säule oder Pfeilers.

Zuſaz. Wenn allemal die Kraft gerade ſo groß iſt, daß ſie mit dem Zuſammenhange noch im Gleichgewicht ſteht, ſo giebt ſie die Größe der Feſtigkeit an (§. 22. II. Zuſ.).

Anmerk. Girard nennet die Feſtigkeit zuſammengedrückte Körper ihre negative abſolute Feſtigkeit, und Eytelwein ihre zurückwirkende Feſtigkeit, beyde Benennungen ſcheinen mir nicht paſſend.

I. Abſchnitt.

Von der abſoluten Feſtigkeit der Körper.

§. 25.

Lehrſaz. (Fig. 6.)

Wenn ein ſenkrechtes Prisma oder Cylinder eines gleichdichten Körpers in verticaler Stellung durch einen andern Körper LM oben ſo befeſtiget wird, daß die gemeinſchaftliche Durchſchnittsebene AB zur Grundfläche parallel iſt, und eine Kraft Q, welche den Körper nach der zu den Seiten des Prisma parallelen, alſo auf AB ſenkrechten Richtung KQ, zu zerreiſſen ſtrebt, ſo lange vermehrt wird, bis ſie die Ueberwucht bekömmt, ſo muß,

a. wenn die Maſſe bloß träg ohne Schwere ſeyn würde, die Trennung der Theile an allen Stellen des Körpers zugleich erfolgen;

b. bey einer ſchweren Maſſe hingegen kann die Trennung nur bey jenen Theilen ſtatt haben, welche in der Durchſchnittsfläche AB liegen.

Beweis.

Wenn der Körper gleichförmig dicht, aber nicht ſchwer iſt, ſo verhält ſich bey einem ſenkrechten Prisma, und Cylinder an allen Stellen alles auf gleiche Art, ſoll alſo eine Trennung der Theile geſchehen; ſo muß ſie nothwendig allenthalben ſtatt haben. Wenn aber die Maſſe des Prisma oder Cylinders ſchwer iſt, ſo wirkt auf jeden Theil nicht nur die Kraft Q, ſondern auch das Gewicht der tiefer liegenden Theile, mithin leiden die Theile, welche ganz oben in der Durchſchnittsfläche AB liegen, die größte Gewalt, folglich muß in dieſer Fläche bey der Ueberwucht von Q die Trennung erfolgen.

§. 26.

Erklärung. (Fig. 6.)

Die Fläche des Körpers, wo die Theile bey erfolgter Ueberwucht der Kraft Q ſich trennen, heißt die Brechungsfläche.

I. Zuſaz. Bey ſenkrechten Cylindern und Prismen, welche in verticaler Stellung an dem obern Ende mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene LM verbunden ſind, und am untern Ende die Laſt Q vertical abwärts zieht, iſt die Brechungsfläche eben, und fällt mit der Durchſchnittsebene AB zuſammen.

II. Zuſaz. Bezeichnen für 2 ſenkrechte Prismen oder Cylinder von der nemlichen Materie, und bey der eben angeführten Vorrichtung, B, b ihre Grundflächen, mithin ihre Brechungsebenen, und Q, q die zum Zer-

reiſſen erfoderlichen Kräfte bezeichnen, ſo iſt: Q : q = B : b.

Denn da die Brechungsebene mit den Grundflächen congruent ſind, ſo verhalten ſich offenbar die Kräfte Q, q, welche die Trennung der Theile bewirken, wie die Menge der Theile, welche getrennt werden, und in den Brechungsebenen einander berühren, alſo wie die Ebenen B, b.

III. Zuſaz. Wenn für irgend ein Material, welches die Form eines ſenkrechten Cylinders oder Prisma von der Grundfläche b hat, die zum Zerreiſſen erfoderliche Kraft oder abſolute Feſtigkeit q bekannt iſt, ſo kann man für jeden Cylinder, oder Prisma, deſſen Grundfläche B iſt, die abſolute Feſtigkeit Q angeben.

IV. Zuſaz. Drückt man die Grundflächen in Quadratzollen aus, und ſezet b = 1, ſo wird

Q : q = B : 1, mithin $q = \frac{Q}{B}$, das iſt, kennet man für ein Material aus Verſuchen die Kraft Q, welche zum Zerreiſſen eines ſenkrechten Prisma oder Cylinders von der Grundfläche B in Quadratzollen ausgedrückt, ſo iſt dadurch die Kraft q beſtimmt, welche ein Prisma, oder Cylinder von eben dieſem Material zerreiſſen würde, deren Grundfläche einen Quadratzoll hält.

§. 27.

Abſolute Feſtigkeit für verſchiedene Holzarten nach Muſſchenbroek's Verſuchen.

Holzart.	ſenkrechter Cylinder. Durchmeſſer. Rhl.Z.	Q Amſtd. ℔	q Amſtd. ℔	q' Berl. ℔	ſenkrechtes Prisma. Seite. RZ.	Q Amſtd. ℔	q Amſtd. ℔	q' Berl. ℔
Lignum Tiliae Lindenholz	0,27	720	12575	13263	0,27	1000	13717	14467
Lignum Alni Erlenholz	0,27	800	13972	14736	0,27 0,2	*1000 555	13717 13875	14467 14634
Lignum Piceae Röhren-Kiefer.	0,27	*800	13972	14736	0,2	306	7650	8068
Lignum Abietis Weiß-Tannenh.	0,27	650	11353	11974	0,27 0,2	600 333	8230 8325	8680 8780
Lignum Quercus Eichenholz	0,27	1150	20085	21183	0,27	1150	15775	16638
Lignum Ulmi Ulm-Rüſterholz	0,26	850	16010	16885	0,27 0,2	950 528	13032 13200	13745 14051
Lignum Fagi Buchenholz	0,26	1150	21660	22845	0,26 0,2	1250 693	18491 17325	19502 18272
Lignum Piri Birnbaumholz	0,24	450	9947	10491	0,25	700	11200	11812
Lignum Nucis Nußbaumholz	0,26	800	15068	15892	0,26	808	11834	12481
Lignum Salicis Weidenholz	0,26	*1000	18835	19865	0,26 0,2	*900 500	13314 12500	14042 13184
Lignum Fraxini Eſchenholz	0,26	*1050	19777	20858	0,25	*1250	20000	21094
Lignum Piceae Roth-Tanneh.	0,26	*850	16010	16885	0,26	*550	8136	8581
Lignum Pruni Pflaumenbaumholz	0,25	600	12223	12891	0,25 0,2 0,2	550 444 500	8800 11100 12500	9281 11707 13184
Lignum Pomi Apfelbaumholz.	0,25	500	10186	10743	0,25	550	8800	9281

I. Zuſaz. Dieſe Verſuche, nebſt der Beſchreibung der dazu gebrauchten Vorrichtung, machte Muſſchenbroek theils in einer eigenen Abhandlung: Introductio ad cohaerentiam corporum firmorum, theils in ſeinem Werke: Introductio ad Philosophiam naturalem Tom. I. bekannt, in der Tabelle ſind nur davon einige angeführt.

II. Zuſaz. Bey der voranſtehenden Tabelle enthält

a. die verticale Spalte die zum Verſuche gebrauchte Holzart, wo aber nicht allemal ſolche beſtimmt genug angegeben iſt;

b. die zweyte verticale Spalte giebt für die Grundfläche des gebrauchten Cylinders den Diameter in rheinländiſchen Duodecimalzollen an.

c. Für die ſenkrechten Prismen, deren Grundflächen Quadrate waren, enthält die ſechste Spalte ebenfalls in Rheinl. Zollen die Länge einer Seite dieſer Grundflächen.

d. Die dritte und ſiebente Spalte giebt das durch die Verſuche gefundenen Gewichte Q, wodurch jedesmal der Körper zerriſſen wurde, in Amſterdamer Pfunden an.

e. Die vierte und achte Spalte beſtimmt ebenfalls in Amſterdamer Pfunden nach §. 26. IV. Zuſ. das Gewicht q, welches von eben dieſer Holzart einen Cylinder oder Prisma, deren Grundfläche einen rheinländiſchen Quadratzoll hält, zerreiſſen würde.

f. Zur Vergleichung dieſer Tabelle mit der nachſtehenden wurde jedesmal noch aus q in der fünften und neunten Spalte die Anzahl q′ in Berliner Pfund berechnet, ſo daß q′ für einen Cylinder oder

Priſma von der Grundfläche eines rheinländiſchen Quadratzolles das zum Zerreiſſen erfoderliche Gewicht in Berliner Pfund ausdrückt, vorausgeſezt, daß ſich das Amſterdamer Pfund zum Berliner Pfund verhält = 10280 : 9747. (Arithm. Anh. II. Abth. F).

III. Zuſaz. So vielen Dank der vortreffliche Mann für dieſe ſo mühvollen Verſuche, und ihre Bekanntmachung verdient, ſo muß man doch geſtehen, daß man Urſache habe, bey der Anwendung der ſich daraus ergebenden Reſultate ſehr behutſam zu ſeyn; denn

a. Die Benennung der gebrauchten Holzart iſt nicht allemal beſtimmt genug angezeigt, z. B. es giebt mehrere Arten von Linden, Eichen u. ſ. w.

b. Wie vieles kömmt bey eben derſelben Holzart auf den Boden, wo ſie wächst, auf das Alter u. ſ. w. an?

c. Vom nemlichen Stamme hat das Holz mehr oder weniger Feſtigkeit, je nachdem es vom Kern, oder zwiſchen Kern und Splint, oder vom Splinte genommen wird.

d. Nirgends wurde der Einfluß von der Temperatur der Luft bey den Verſuchen in Anſchlag gebracht.

e. Wie leicht kann bey ſo kleinen Dimenſionen der Cylinder und Priſmen ein kleiner Fehler ſtatt haben, und doch iſt der Einfluß deſſelben ſo bedeutend, überhaupt bleibt es allemal ſehr bedenklich, aus Verſuchen, die ſo ſehr im Kleinen gemacht werden, Reſultate für die Anwendung im Großen zu ziehen.

§. 28.

Abſolute Feſtigkeit einiger Holzarten nach Eytelweins Verſuchen.

Holzart.		Q Berlin. ℔	q Berlin. ℔	q'' mittler Werth ℔
Kiefer, Löhre Pinus Sylvestris.	vom Kern	5540	22160	21400
		5160	20640	
	dit. etwas harzig	4040	16160	16160
	zwiſchen Kern und Splint	5100	20400	20873
		5240	20960	
		5510	22040	
		5400	21600	
		4680	18720	
		5380	21520	
	dit. etwas harzig	2900	11600	12520
		3360	13440	
	vom Splint	4400	17600	18320
		4760	19040	
Sommereiche Quercus foemina	vom Kern	7020	28080	26600
		6280	25120	
	zwiſchen Kern und Splint.	4740	18960	21940
		4460	17840	
		6900	27600	
		5840	23360	
	vom Splint	3420	13680	14760
		3960	15840	
Steineiche Quercus robur	zwiſchen Kern und Splint	5640	22560	22120
		5420	21680	
Rothtanne Pinus Picea.	zwiſchen Kern und Splint	2700	10800	10920
		2760	11040	
Weißtanne Pinus Abies	zwiſchen Kern und Splint	3860	15440	15400
		3840	15360	
Weißbuchen Hornbaum Carpinus Betulus	zwiſchen Kern und Splint	5240	20960	20400
		4960	19840	
Rothbuche Fagus sylvatica	zwiſchen Kern und Splint	5500	22000	22360
		5680	22720	
Erle Betula Alnus.	zwiſchen Kern und Splint	6400	25600	24740
		5970	23880	

I. Zuſaz. Dieſe Verſuche hat man Hrn. Eytelwein, Königl. Preuß. geheimen Oberbaurathe, zu verdanken. Er wählte dazu nur Hölzer aus einheimiſchen Forſten, welche ſchon zwey Jahre gefällt, und trocken aufbewahret waren, an welchen man weder Aeſte, noch ſonſt einen Tadel, auffinden konnte. Beſonders ſtrengte er alle Aufmerkſamkeit an, um ſolche Holzſtücke zu zerreiſſen, bey welchen durchgängig die Faſern parallel mit den Seitenflächen angeſehen werden konnten. Die Hölzer waren ſämmtlich ſenkrechte Prismen, ihre Grundflächen Quadrate, wovon eine Seite einen halben rheinländiſchen Zoll, mithin jede Grundfläche $\frac{1}{4}$ rheinländiſchen Quadratzoll hielt. Die durch Klammern in der Tabelle verbundenen Paare waren allemal von einerley Stamme, und kein bemerkbarer Unterſchied wahrzunehmen. Man ſehe Eytelweins Handbuch der Statik feſter Körper II. Band 15. Kapitel.

II. Zuſaz. In der Tabelle giebt die dritte verticale Spalte in Berliner Pfund das Gewicht Q an, von dem das ſenkrechte Prisma zerriſſen wurde; ſo wie die vierte Spalte ebenfalls in Berliner Pfund das Gewicht q beſtimmt, welches ein ſenkrechtes Prisma, deſſen Grundfläche einen rheinl. Quadrat Duodec. Zoll hält, zerreiſſen würde. In der lezten Spalte iſt q′ das arithmetiſche Mittel für eben dieſes Prisma.

III. Zuſaz. Nach Hrn. Schranks baieriſchen Flora ſcheinen in der Tabelle die beyden Eichen verwechſelt zu ſeyn; denn Quercus Robur iſt die Sommereiche, Haſeleiche, oder Rotheiche, hingegen Quercus fructipendula die Steineiche, Wintereiche, Traubeneiche. Ferner iſt Carpinus Betulus die Hagenbuche, und Betula Alnus die Rotherle.

IV. Zuſaz. Vergleicht man die beyden Tabellen, ſo ſieht man bedeutende Verſchiedenheit in ihren Reſultaten, die aber leicht erklärbar iſt, und den III. Zuſaz des vorhergehenden §. beſtättiget.

§. 29.

Abſolute Feſtigkeit einiger Metalle nach Muſſchenbroek's Verſuchen.

Metall	gegoſſenes ſenkrechtes Prisma.		Cylindriſcher Drath.	
	l = 0, 17	l = 1 Rhl. Zoll.	d = 0, 1	bas. = 1 □ Zoll.
	Q Amſterd ℔	q Amſterd. ℔	Q Amſterd ℔	q Amſterd. ℔
Reines Gold	578	20000	500	63662
Reines Silber	1156	40000	370	47110
Schwediſches Kupfer	1054	36471	299 1/4	38102
Ungariſches Kupfer	895	30969		
Deutſches Eiſen	1930	66782	450	57296
Engl. weißes Zinn	150 188	5190 6505	49 1/4	6271
Engliſches Bley	25	865	29 1/4	3724
Spießglaß	30	1038		
Goßlar = Zink	76 83	2630 2872		
Wismuth	85 92	2941 3183		
Meſſing	549	18997	360	45837

I. Zuſaz. In der gegenwärtigen Tabelle, welche ebenfalls aus den beyden oben angeführten Muſſchenbroekiſchen Werken ausgehoben iſt, beſtand das ſenkrechte Prisma aus gegoſſenem Metalle, die Grundfläche war allemal ein Quadrat, deſſen Seite genau 0,17 rhl. Zoll hielt. Ferner giebt die erſte Spalte für dieſe Prismen das gebrauchte Metall, die zweyte das zum Zerreiſſen gebrauchte Gewicht Q in Amſterdamer ℔ an, woraus wieder das für das ſenkrechte Prisma, deſſen Grundfläche einen rhnl. Quadrat-Zoll hält, zum Zerreiſſen erfoderliche Gewicht q in der nächſten Spalte in Amſterdamer ℔ berechnet iſt.

II. Zuſaz. Bey den Cylindern wurde legirtes Gold und Silber genommen, nemlich Piſtoleten-Gold, und Silber aus Philippsthalern, ferner ſind die übrigen nemlich Kupfer-, Eiſen-, Zinn-, Bley- und Meſſingdräthe nicht weiter beſtimmt. Sämmtliche Dräthe hielten 0,1 rheinl. Zoll im Durchmeſſer. Endlich gelten für Q und q die nemliche Bedeutungen wie bey den Prismen.

III. Zuſaz. Aus den zahlreichen Muſſchenbroekiſchen Verſuchen ergiebt ſich, daß gegoſſenes, gehämmertes, als Drath gezogenes Metall verſchiedene Feſtigkeit hat, ſo wie durch Beymiſchung eines andern Metalles die Feſtigkeit bald vermehrt, oder auch vermindert wird; man muß darüber die oben angeführten Werke ſelbſt nachſchlagen.

IV. Zuſaz. Hr. Eytelwein führet in ſeinem II. Bande der Statik noch vier im Jahre 1789. vom Hrn. Schiffbau-Director Quantin gemachte Verſuche mit ſchleſiſchem Eiſen an, nemlich

1. Eine 18 Zoll lange Stange vom geſchmiedeten ſchleſiſchen Eiſen, deren Querſchnitt ein Quadrat bildete,

dete, wovon eine Seite 6 Linien, alſo $\frac{1}{2}$ rheinl. Zoll groß war, zerriß durch eine Kraft von 2160 Berliner Pfunden, ſo daß alſo für eine Stange, deren Grundfläche einen rhnl. Quadrat-Zoll hält, die erforderliche Kraft q = 84640 Berl. ℔ = 80252 Amſterdamer ℔.

2. Eine Stange von eben dieſen Dimenſionen zerriß bey Q = 17560 Berl. ℔, mithin q = 70240 Berl. ℔ = 66598 Amſterd. ℔.

3. Eine Stange von geſchmiedetem Eiſen, wovon die Seite der quadratiſchen Grundfläche 2 Linien = $\frac{1}{6}$ rhnl. Zoll hielt, zerriß bey Q = 2600, ſo daß alſo q = 93600 Berl. ℔ = 88747 Amſterdamer ℔.

4. Eine der vorigen, dem Anſcheine ganz gleiche Stange Eiſen wurde von Q = 1780 Berl. ℔ zerriſſen, ſo daß q = 64080 Berl. ℔ = 60758 Amſterd. ℔ war. Nimmt man aus allen vier Verſuchen das arithmetiſche Mittel, ſo wird q = 78140 Berl. ℔ = 74089 Amſterd. ℔.

V. Zuſaz. Will man für einen prismatiſchen Körper (Fig. 6.) von Holz oder Metall die Laſt Q in Amſterdamer ℔ beſtimmen, welche er zu tragen im Stande iſt, ſo reducire man das Gewicht dieſes prismatiſchen Körpers P ebenfalls auf Amſterdamer Pfunde, und deſſen Grundfläche B auf rheinländiſche Quadrat-Duodecimal-Zoll, und nehme aus den voranſtehenden Tabellen für das Material dieſes Prisma die entſprechende abſolute Feſtigkeit q, ſo iſt $1 : B = q : Q + P$ (§. 26. IV. Zuſ.), mithin $Q + P = Bq$; alſo $Q = Bq - P$.

Anmerk. Zur Sicherheit räth Hr. Eytelwein bey Holzarten nur den dritten, und bey Metallen nur die Hälfte von q zu nehmen, ſo daß für die Holzarten $Q = \frac{1}{3} Bq - P$; und bey Metallen $Q = \frac{1}{2} Bq - P$ wird.

§. 30.

Abſolute Feſtigkeit der Seile.

Gemachte Beobacht.	Beſchaffenheit des Seiles.	Durchmeſſer in rheinl. Linien.	Umfang in rheinl. Linien.	Y Amſterd. ℔	Für d = 12 l. q Amſtd. ℔
Nr. 1. Petri van Muſſchenbroek Diſſ. Phyſ. experim. et Geomet. Intr. ad cohaerent. corp. firmorum.	3 bis 4 Ellen lange Schnur.	0,36	1,130976	13	14444*
		0,6384024	2,0	92	32688*
	Gebleichtes Seil a. 3 Lizen	0,572952	1,8	32	14037*
	dit. aus 5 Lizen	1,031328	3,24	87	11779*
	dit. aus 6 Lizen	2,29176	7,2	210	5757
	gewöhnl. Seil aus 6 Lizen	0,6384624	2,0	92	32688*
	dit. aus 6 Lizen	1,52784	4,8	160	9869,6
	dit. ans 6 Lizen	2,06268	6,48	240	8123
Nr. 2. Petri van Muſſchenbroek Intr. ad Philoſ. naturalem Tom. I.	Schnur	0,31831	1,0	27	38373*
		1,9099	6,0	120	4737,4*
	Seil	1,9099	6	190	7500,9
		2,5465	8	330	7328,2
		3,1831	10	540	7674,6
		3,8197	12	750	7402,2
		4,1380	13	840	7064,1
		4,7748	15	990	6253,4
		5,0930	16	1030	5718,2
		6,3662	20	2080	7390,4
		7,6394	24	3000	7402,2
		9,5493	30	4730	7469,3
		11,4592	36	7900	8663,3
Nr. 3. Eytelwein Statik. II. Band.	Neues Seil von 3 Lizen zu 2 Fäden.	2,0690	6,5	247,468	8324,4
	dit. v. 4 Lizen	3,2627	10,25	578,37	7823,9

I. Zuſaz. Bey den Verſuchen Nr. I. giebt Muſſchenbroek bey dem erſten Verſuche den Diameter, und bey den übrigen den Umfang des Seiles in rheinl. Duodec.

Zoll und Linien an, woraus im erſten Falle der Umfang, und im zweyten der Diameter jedesmal in rheinl. Duodec. Linien berechnet wurde.

II. Zuſaz. Bey den Verſuchen Nr. 2. läßt Muſſchenbroek durch den Ausdruck Dicke des Seils in Linien die Angabe ſehr unbeſtimmt. Daß man unter Linien rheinl. Duodec. Linien zu verſtehen habe, kann man aus ſeinen übrigen Verſuchen mit Zuverläſſigkeit vermuthen, aber nicht ſo leicht läßt ſich die Beſchaffenheit der Dicke des Seils ausmitteln. Gewöhnlich bezeichnet Muſſchenbroek den ganzen Querſchnitt mit der Benennung Dicke, allein da würde man den Seilen eine auſſerordentlich große Feſtigkeit beylegen müſſen, und Muſſchenbroek hätte jedesmal den Querſchnitt aus dem gemeſſenen Durchmeſſer, oder Umfange berechnen müſſen, ohne den mindeſten Vortheil für die Sache. Nimmt man hingegen für die Dicke den Durchmeſſer, ſo erhält man eine ſo geringe Feſtigkeit, daß ſolche mit den vorigen, und den nachfolgenden Eytelweinkſchen Verſuchen im zu auffallenden Contraſt ſteht. Es wurde alſo in der Tabelle nach Eytelweins Vorſchlag ſtatt Dicke der Umfang des Seils geſezt, und daraus wieder der Durchmeſſer berechnet. Dieſe leztere Vermuthung erhält durch nachſtehenden Verſuch, welchen Hr. Placidus Heinrich in Regensburg in dieſer Abſicht machte, und mir mittheilte, neue Beſtärkung. Es wurde nemlich ein Seil, deſſen Durchmeſſer 3 rheinl. Duodec. Linien, mithin deſſen Umfang 9,424... Linien hielt, durch das Gewicht Q = 335 Regensburger ℔ = 384,27 Amſterdamer ℔ zerriſſen, woraus ſich für ein Seil, deſſen Diameter = 12 rheinl. Duodec.

Linien hält, die Feſtigkeit q = 6148,3 Amſterdamer Pfund ergiebt.

III. Zuſaz. Die vorlezte Spalte enthält in Amſterdamer Pfund das Gewicht Q, wodurch jedesmal das Seil zerriſſen wurde; aus dieſem wurde ebenfalls in Amſterdamer Pfund in der lezten Spalte das Gewicht q berechnet, wodurch ein Seil, deſſen Durchmeſſer einen rheinl Zoll, oder 12 rheinl. Linien hält, zerriſſen würde, wenn man als wahr annehmen darf, daß ſich die Feſtigkeiten wie die Querſchnitte, alſo wie die Quadrate der Durchmeſſer, oder Umfänge verhalten.

IV. Zuſaz. Die verſchiedene Güte des Hanfes, und ſeine Bearbeitung, ferner die Beſchwerniß, vorzüglich bey ſehr dünnen Seilen, deſſen Umfang oder Durchmeſſer mit Schärfe anzugeben, laſſen im Voraus von einander abweichende Reſultate vermuthen, bey dünnen Seilen ergab ſich allemal eine größere Feſtigkeit q, bey dickern bleibt ſich ſolche gleichförmiger.

V. Zuſaz. Mit Hinweglaſſung der mit * bezeichneten, wenn man in der lezten Spalte alle übrigen für q erhaltenen Werthe addirt, und die Summe durch die Anzahl derſelben, durch 16, dividirt, ſo erhält man als Mittelwerth für q = 7485,3 Amſterdamer Pfund.

Von dieſem Werthe räth Hr. Eytelwein bey der Anwendung nur den dritten Theil anzunehmen, wenn man für ein gegebenes Seil das Gewicht beſtimmen will, welches dadurch getragen werden kann. Bezeichnet nemlich D den Durchmeſſer eines Seils in rheinl. Linien, ferner P deſſen Gewicht in Amſterdamer Pfund,

ſo iſt $P+Q : q = D^2 : 12^2$, mithin $P+Q = q\frac{D^2}{12^2}$
alſo $Q = q\frac{D^2}{12^2} - P$.

VI. Zuſaz. Muſſchenbroek machte ferner noch nachſtehende Verſuche: Von 3 Seilen, die gleiche Durchmeſſer hatten, und aus einerley Hanfe verfertiget waren, trug das erſte, wo die Schnüre durch das Eindrehen um $\frac{1}{3}$ ihrer Länge verkürzt wurden 4098 Pf.; das zweyte, bey einer Verkürzung $\frac{1}{4}$ dieſer Länge, hielt 4850 Pfund; das dritte, deſſen Verkürzung nur $\frac{1}{5}$ der Länge war, trug 6205 Pfund. Je mehr alſo ein Seil gedreht iſt, deſto geringer iſt ſeine Feſtigkeit, bey dieſen drey Seilen verhielten ſich nemlich ihre Feſtigkeiten

$= 4098 : 4850 : 6205$
$= 1 : 1{,}1835 : 1{,}5141$, mithin beynahe
$= 1 : 1{,}2 : 1{,}5$.

VII. Zuſaz. Von zwey gleichen Seilen hielt das Trockene 5400, das naſſe nur 4000 Pfund; ein andersmal trug ein Seil trocken 7800 Pfund, und zerriß naß gemacht von 5800 Pfund; folglich verhält ſich die Feſtigkeit des trockenen zu jener des naſſen Seiles

nach dem erſten Verſuche
$= 5400 : 4000 = 54 : 40 = 1 : 0{,}741$

nach dem zweiten Verſuche
$= 7800 : 5800 = 78 : 58 = 1 : 0{,}743$.

VIII. Zuſaz. Ein trockenes Seil, welches 4733 Pfund erhielt, trug, nachdem es gepickt wurde, nur 3316 Pfund, folglich war die Feſtigkeit des trockenen zu jener des gepickten Seiles
$= 4733 : 3316 = 1 : 0{,}700$.

Durch das Picken verliert daher zwar das Seil an Feſtigkeit, aber doch weniger, als wenn es naß geworden, mithin iſt das Picken vortheilhaft, um ſo mehr, als das Seil dadurch dauerhafter wird.

§. 31.

Aufgabe. (Fig. 9.)

Die Form des Körpers CEFD anzugeben, welcher allenthalben gleiche abſolute Feſtigkeit hat.

Auflöſung.

1. Wenn der Körper an allen Stellen gleichförmige Feſtigkeit haben ſoll, ſo müſſen deſſen Querſchnitte ſo beſchaffen ſeyn, daß an jeder Stelle der Körper nicht nur die Laſt Q, ſondern auch das Gewicht des unter dieſer Stelle liegenden Theils des Körpers zu tragen im Stande iſt.

2. Wenn nun das Gewicht des ganzen Körpers CEFD $= P$, der obere zur Feſtigkeit erforderliche Querſchnitt EF $= B$.

3. Ferner in der beliebigen Entfernung KI $= x$, der erforderliche Querſchnitt GH $= z$, und das Gewicht des darunter liegenden Stückes CGHD $= P'$ geſezt wird, ſo iſt

4. $z : B = Q + P' : Q + P$ (§. 26. II. Zuſ.), mithin
$z(Q + P) = BQ + BP'$,
$BP' = (Q + P)z - BQ$, und differentiirt
$BdP' = (Q + P)dz$, alſo

5. $dP' = \frac{Q + P}{B} dz$

6. Bezeichnet noch p das Gewicht des gebrauchten Körpermaaßes, ſo iſt

7. das körperliche Element GghH $= z dx$; und das Gewicht dieſes Elementes $= pzdx$

8. Eben dieſes Gewicht $pzdx$ iſt aber das Differential um welches P' abnimmt, wenn KI um Ii, alſo x um dx wächst, mithin

9. $-dP' = pzdx = -\frac{Q+P}{B} dz$ (Nr. 5.) und

$$-\frac{Bp}{P+Q} dx = \frac{dz}{z}$$, folglich

10. $\log. nat. z = -\frac{Bp}{P+Q} x + const$ (Arithm. §. 325.)

Da nun für $x = 0$, $z = B$, ſo wird

$\log. nat. B = const.$ folglich

11. $\log. nat. z = \log. nat B - \frac{Bp}{P+Q} x$, und

$$\log. nat. \frac{z}{B} = -\frac{Bp}{P+Q} x$$

12. Sezet man die veränderliche Größe

$$-\frac{Bp}{P+Q} x = y$$, mithin

13. $\log. nat. \frac{z}{B} = y$, ſo wird

$\frac{z}{B} = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{1.2.} + \frac{y^3}{1.2.3.} + \ldots$ (Arithm. II. und III. Ausg. §. 238. III. Zuſ.)

14. Nun wird allemal $y = -\frac{Bp}{P+Q} x$ ein ächter und zwar ſehr kleiner Bruch ſeyn, ſo daß man die Potenzen von y weglaſſen darf, mithin

15. $\frac{z}{B} = 1 + y = 1 - \frac{B.p}{P+Q} x$, und

16. $z = B - \frac{B^2.p}{P+Q} x$, ſo daß alſo der Querſchnitt abnimmt, wenn x wächst, folglich muß der Körper eine kegelförmige Form haben.

II. Abſchnitt.

Von der reſpectiven Feſtigkeit der Körper.

§. 32.

Lehrſatz. (Fig. 7.)

Wenn ein ſenkrechtes Prisma AH mit einem andern unbeweglichen Körper LM ſo verbunden wird, daß die Durchſchnittsebene ABCD zur Grundfläche des Prisma parallel, alſo auf ihr die Seiten des Prisma, mithin auch die Faſern ſenkrecht ſind (§. 23. III. Zuſ.), und am andern Ende bey K die Kraft Q zur obigen Ebene ABCD parallel, alſo ebenfalls auf die Faſern ſenkrecht wirkt, und daher das Prisma zu zerbrechen ſtrebt, ſo geſchieht der Bruch, wenn ſolcher erfolgt, in der Ebene ABCD, das iſt, die Durchſchnittsebene iſt zugleich die Brechungsebene.

Beweis.

Der Bruch muß offenbar an jener Stelle des Prisma erfolgen, für welche das Moment der Kraft Q am größten iſt; da nun die Durchſchnittsebene ABCD am weiteſten von der Kraft entfernt iſt, ſo hat für ſie die Kraft das größte Moment, folglich iſt ſie zugleich die Brechungsebene.

I. Zuſaz. Wenn die Kraft Q das ſenkrechte hervorragende Prisma AH zu zerbrechen ſtrebt, ſo iſt entweder das Material deſſelben ſo ſpröde, daß ſich die Fibern weder ausdehnen, noch zuſammen drücken, mithin gar nicht biegen laſſen, oder die Fibern laſſen ſich zwar ausdehnen, aber nicht, wenigſtens nicht merklich zuſammen drücken, oder endlich es hat beydes ſtatt,

nemlich die Fibern werden an einigen Stellen ausgedehnt, und an einigen Stellen des Körpers zuſammengedrückt. Die erſte Vorausſezung legte Galilaeus, die zweyte Mariotte und Leibniz, die dritte endlich Jacob Bernoulli bey den Unterſuchungen zum Grunde.

II. Zuſaz. Wenn a die Länge AE des hervorragenden Stückes des Prisma bezeichnet, ſo iſt, weil ABCD zu EFHI parallel, bey einem ſpröden Körper a zugleich die Entfernung der Kraft Q von der Brechungsebene (Geom. §. 172. V. Zuſ.), folglich aQ das Moment der Kraft für die Brechungsebene.

III. Zuſaz. Bey Körpern, welche durch die Kraft Q eine Biegung erhalten, iſt die Entfernung der Kraft ein von K auf die Brechungsebene gezogener Perpendikel, welcher aber, wenn die Biegung ſehr gering iſt, von a ſehr wenig unterſchieden iſt, ſo, daß man ebenfalls aQ als das Moment der Kraft ſezen darf.

IV. Zuſaz. Wird das Prisma in wagrechter Lage befeſtiget, und bezeichnet P das Gewicht des hervorragenden Theiles AH, ſo liegt der Schwerpunct des Prisma AH von der Brechungsebene ABCD um $\frac{1}{2}$ a entfernt (Reine Mechan. §. 105. VIII. Zuſ.), mithin iſt $\frac{1}{2}$ aP das Moment des Gewichtes, folglich die ganze Gewalt, welche das Prisma zu zerbrechen ſtrebt, $= aQ + \frac{1}{2}aP = a(Q + \frac{1}{2}P)$.

V. Zuſaz. Da ſich für einen Cylinder und jedes ſenkrechte Prisma das Moment ſeines eigenen Gewichtes, wenn ſolches ſo beträchtlich iſt, daß man es in Anſchlag bringen muß, leicht beſtimmen läßt, ſo wird in der Folge, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil angezeigt iſt, keine Rückſicht auf ſolches genommen, ſondern nur die Kraft Q beſtimmt.

I.

Von der reſpectiven Feſtigkeit ſpröder Körper.

§. 33.

Aufgabe. (Fig. 7.)

Das ſenkrechte Prisma AH von ſpröder Materie iſt mit dem unbeweglichen Körper LM ſo verbunden, daß die Durchſchnittsebene ABCD zur Grundfläche EFHI parallel iſt, man ſucht die Kraft Q, welche, am Ende des Prisma bey K zur Grundfläche parallel alſo auf die Seiten des Prisma ſenkrecht angebracht, ſo eine Größe hat, daß ſie bey geringſter Vermehrung das Prisma zu zerbrechen vermag.

Auflöſung.

1. Durch den tiefſten Punct der Durchſchnittsebene ABCD, welche zugleich die Brechungsebene iſt, (§. 32.) lege man eine Ebene AF ſo, daß ſie zugleich auf der Brechungsebene ABCD, und der Richtung der Kraft KQ ſenkrecht ſteht (in der gezeichneten Figur hat das Prisma ſo eine Lage, daß die Ebene AF mit einer Seitenfläche des Prisma zuſammenfällt, dieſes iſt aber nur zufällig).

2. Dieſe Ebene AF wird nun die Brechungsebene in der geraden Linie AB, und die Richtung der Kraft in einem Puncte K ſchneiden (Geometr. §. 161. I u. II. Zuſ.).

3. Zieht man ferner in der Ebene AF von K auf AB die ſenkrechte KO, ſo ſteht ſie zugleich auf der Brechungsebene ſenkrecht (Geometr. §. 170. I. Zuſ.), und iſt alſo der Seite AE des Prisma gleich und parallel.

4. Sezet man die Länge des hervorragenden Prisma AH, das iſt, AE = KO = a, ſo ſtrebt die Kraft Q am Hebelarm a das Prisma, mithin auch die Brechungsebene ABCD um die Axe AB zu drehen, und ihr Moment iſt = a. Q.

5. An jeder Stelle der Brechungsebene leiſtet aber der Zuſammenhang, oder die Feſtigkeit der Fibern Widerſtand, es iſt alſo gerade ſo viel, als wenn in allen Puncten der Brechungsebene gleiche Kräfte auf ſie nach ſenkrechten, alſo unter ſich parallelen Richtungen wirkten, die alſo einen gemeinſchaftlichen Mittelpunct haben (Reine Mechan. §. 22. II. Zuſaz.).

6. Fällt nun dieſer Mittelpunct, oder, da ſich alles wie bey der Schwere verhält, der Schwerpunct der Brechungsebene auf den Punct G, und bezeichnet B den Flächeninhalt, ferner q für das gebrauchte Flächenmaaß die abſolute Feſtigkeit der Fibern (§. 26. IV. Zuſ.), ſo wirkt im Schwerpuncte G die Kraft Bq nach einer auf die Brechungsebene ſenkrechten Richtung.

7. Fällt man auf die Axe AB, die ſenkrechte Linie GO, ſo ſtrebt an dieſem Hebelsarm die Kraft Bq die Brechungsebene um die Axe AB nach einer der Kraft Q (Nr. 4.) entgegengeſezten Seite zu drehen, und ihr Moment iſt = GO. qB.

8. Soll nun Q die reſpective Feſtigkeit angeben (§. 24. b.), ſo muß

9. aQ = GO. qB ſeyn, wodurch alſo Q beſtimmt iſt.

I. Zuſaz. Wenn das ſenkrechte Prisma ſo, wie in der 7ten Figur mit LM befeſtiget wird, daß nemlich die durch A gelegte Ebene AF (Nr. 1.) mit einer

Seitenfläche, folglich die Axe AB mit einer Seite der Grundfläche des hervorragenden Prisma zuſammenfällt, und man nimmt auf AB die Abſciſſen von A aus, ſo iſt für rechtwinklichte Coordinaten $B = \int y\,dx$ (höhere Geometr. §. 268.), und $GO = \frac{\int \frac{1}{2} y^2 dx}{\int y\,dx}$ (Reine Mechan. §. 94. IV. Zuſ.), mithin

$$aQ = q. \int y\,dx. \frac{\int \frac{1}{2} y^2 dx}{\int y\,dx} \text{ (Nr. 9.) } = \tfrac{1}{2} q \int y^2 dx.$$

II. Zuſaz. Für ein rechtwinklichtes Parallelepipedum AH, deſſen Breite $AB = b$, Höhe $AC = c$, und Länge $AE = a$ geſezt wird, iſt Nr. 9. $B = bc$, und $GO = \frac{1}{2} c$ (Reine Mechan. §. 100. II. Zuſ.), mithin bey der angeführten Lage (I Zuſ.)

$$aQ = \tfrac{1}{2} q b c^2, \text{ und } Q = \tfrac{1}{2} q \frac{bc^2}{a}.$$

Für ein anders rechtwinklichtes Parallelepipedum vom nemlichen Material, deſſen Breite $= b'$, Höhe $= c'$, und Länge $= a'$, würde bey ähnlicher Lage:

$$a'Q' = \tfrac{1}{2} q b' c'^2, \text{ oder } Q' = \tfrac{1}{2} q \frac{b'c'^2}{a'}, \text{ folglich}$$

$$Q : Q' = \frac{bc^2}{a} : \frac{b'c'^2}{a^1},$$ das iſt, für einerlei Material verhalten ſich bey ſenkrechten Parallelepipeden ihre reſpective Feſtigkeiten gerade wie die Producte ihrer Breiten in die Quadrate ihrer Höhen, und umgekehrt wie ihre Längen.

III. Zuſaz. Für ein ſenkrechtes Prisma, deſſen Grundfläche ein rechtwinklichtes Dreyeck ABD (Fig. 10.) iſt, wenn es in einer ſolchen Lage befeſtiget wird, daß die Axe AB mit einem Catheten der Grundfläche oder Brechungsebene zuſammenfällt, und man ſezet $AB = b$; $BD = c$, und die Länge des Prisma $= a$, ſo iſt

$B = \frac{1}{2} bc$, und $GO = \frac{1}{3} c$ (Reine Mechan. §. 99. Nr. 18.), mithin $aQ = \frac{1}{6} qbc^2$, und $Q = \frac{1}{6} q \frac{bc^2}{a}$

IV. Zuſaz. Wird hingegen eben dieſes dreyſeitige Prisma ſo befeſtiget, daß die Axe AB durch die Spize A der Grundfläche ACD geht, und der Cathet CA auf der Axe ſenkrecht ſteht, ſo iſt für $AC = c$, $CD = b$, $B = \frac{1}{2} bc$, und $GO = \frac{2}{3} c$, (Reine Mech. §. 99. I. Zuſ.), alſo $aQ = \frac{1}{3} qbc^2$, und $Q = \frac{1}{3} q \frac{bc^2}{a}$ folglich hat in dieſer Lage das Prisma eine nochmal ſo große Feſtigkeit, als in der vorhergehenden.

V. Zuſaz. Für ein Prisma, deſſen Grundfläche der Quadrant ADC (Fig. 11) iſt, wenn die Axe der Brechungsebene mit dem Halbmeſſer AC zuſammenfällt, iſt für $AC = r$, wenn man auf AC die Abſciſſen von A aus nimmt, $y^2 = 2rx - x^2$, mithin $\int y^2 dx = \int (2rx - x^2) dx = rx^2 - \frac{1}{3} x^3$, wo keine const. hinzukömmt, mithin für $x = r$, $\int y^2 dx = r^3 - \frac{1}{3} r^3 = \frac{2}{3} r^3$ alſo $aQ = \frac{1}{2} q \int y^2 dx$ (I. Zuſ.) $= \frac{1}{3} qr^3$.

VI. Zuſaz. Für ein ſenkrechtes Prisma, deſſen Grundfläche der Halbkreis ADB, und der Diameter AB zugleich die Axe der Brechungsebene iſt, wird für $x = AB = 2r$, $\int y^2 dx = rx^2 - \frac{1}{3} x^3 = 4r^3 - \frac{8}{3} r^3 = \frac{12-8}{3} r^3 = \frac{4}{3} r^3$, folglich $aQ = \frac{2}{3} qr^3$.

VII. Zuſaz. Für einen ſenkrechten Cylinder, welcher ſo befeſtiget iſt, daß die Axe AB des Brechungskreiſes (Fig. 12.) eine Tangens iſt, wird, wenn r den Halbmeſſer der Grundfläche, und a die Länge des hervorragenden Theiles bezeichnen, $B = r^2 \pi$,

und GO = r (Reine Mech. §. 98.) mithin $aQ = qr^3\pi$; und $Q = q\,\frac{r^3\pi}{a}$.

VIII. Zuſaz. Für ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, deſſen Grundfläche ABCD ein um den Kreis beſchriebenes Quadrat, und eine Seite deſſelben z. B. AB zugleich die Axe der Brechungsebene iſt, wird für AB = 2r, $B = 4r^2$, und GO = r, mithin

a. $Q' = q\,4r^3$, und $Q' = q\,\frac{4r^3}{a}$ folglich verhält ſich die reſpective Feſtigkeit dieſes ſenkrechten Parallelepipedums, deſſen Grundfläche ein Quadrat iſt, zu jener eines ſenkrechten Cylinders, deſſen Grundfläche ein in dieſes Quadrat beſchriebener Kreis iſt, oder

$$Q' : Q = q\,\frac{4r^3}{a} : q\,\frac{r^3\pi}{a} = 4 : \pi = 4 : 3,1415... = 1 : 0,785...$$

IX. Zuſaz. Für einen halben Cylinder, wenn die Achſe AB mit der Tangens der Brechungsebene oder Halbkreiſes EHF zuſammenfällt, iſt $B = \frac{1}{2} r^2\pi$, und $GO = r - \frac{4r}{3\pi}$ (Reine Mech. §. 103. II. Zuſ.)

$$= \frac{3r\pi - 4r}{3\pi} = r\,\frac{3\pi - 4}{3\pi}, \text{ mithin}$$

$$aQ' = q\tfrac{1}{2}r^2\pi.\,r.\,\frac{3\pi-4}{3\pi} = \frac{1}{6}\,qr^3(3\pi-4) = qr^3\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{2}{3}\right).$$

Vergleicht man dieſes mit dem VI. Zuſaz, ſo ſieht man, daß ſich für eben denſelben halben Cylinder ſeine reſpective Feſtigkeit, wenn die Axe mit den Durchmeſſer zuſammenfällt, zur reſpectiven Feſtigkeit, wenn die Axe der Brechungsebene die Tangens dieſes Halbkreiſes im Puncte H iſt, oder $Q : Q' = \frac{2}{3} : \frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}$ verhält.

X. Zuſatz. Für eine ſenkrechte cylindriſche Röhre (Fig. 13.), wenn die Axe der Brechungsebene mit der Tangens AB des größern Kreiſes zuſammenfällt, und R, r die Radien der beyden Kreiſe, dann a die Länge der cylindriſchen Röhre bezeichnen, ſo iſt

für den ganzen maſſiven größern Cylinder

$B = R^2\pi$; $GO = R$; alſo $aQ' = qR^3\pi$ (VII. Zuſ.).

Eben ſo iſt für den kleinern innern Cylinder

$B' = r^2\pi$, $G'O = r + e$, wenn man $FH = e$ ſezet, und daher $aQ'' = qr^2\pi\,(r + e)$, folglich für die Röhre $aQ = qR^3\Pi - qr^2\pi\,(r + e)$

$$= q\pi\,[R^3 - r^2\,(r + e)].$$

Man ſieht, daß die reſpective Feſtigkeit um ſo größer iſt, je kleiner e, das iſt, je näher der kleinere Kreis der Axe liegt, folglich am größten, wenn $e = o$, mithin die beyden Kreiſe die Axe zur gemeinſchaftlichen Tangens haben, in dieſem Falle wird

$$aQ = q\pi\,[R^3 - r^3]$$

XI. Zuſatz. Sind bey der Röhre die Kreiſe concentriſch, ſo iſt $e = R - r$, mithin

$$aQ = q\pi\,[R^3 - r^2\,(r + Rr) = q\pi\,[R^3 - r^2R]$$
$$= qR\pi\,[R^2 - r^2].$$

XII. Zuſatz. Aus den voranſtehenden Zuſäzen erhellet, daß, ſo wie durch die abſolute Feſtigkeit q und die gegebenen Dimenſionen eines prismatiſchen Körpers, deſſen reſpective Feſtigkeit Q beſtimmt iſt, auch umgekehrt aus eben dieſen Dimenſionen und der reſpectiven Feſtigkeit Q ſich allemal die abſolute Feſtigkeit q dieſes Körpers angeben läßt; z. B. da für ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, deſſen Länge $= a$, Breite $= b$, Höhe $= c$ und abſolute Feſtigkeit $= q$,

die reſpective Feſtigkeit, oder $Q = \frac{1}{2} q \frac{bc^2}{a}$ (II. Zuſaz) ſo iſt $q = \frac{2 Q . a}{bc^2}$; iſt alſo bey einem Material für ein rechtwinklichtes Parallelepipedum durch Verſuche deſſen reſpective Feſtigkeit Q gefunden, ſo iſt auch die abſolute Feſtigkeit dieſes Materials bekannt.

XIII. Zuſaz. Für eben daſſelbe Material verhalten ſich die reſpectiven Feſtigkeiten zweyer rechtwinklichten Parallelepipeden, oder $Q : Q' = \frac{bc^2}{a} : \frac{b'c'^2}{a'}$. (II. Zuz.), wenn alſo bey einem Material die reſpective Feſtigkeit Q eines daraus verfertigten ſenkrechten Parallelepipedums, deſſen Dimenſionen a, b, c ſind, gefunden iſt, ſo iſt dadurch für eines anderes Parallelepipedum von eben dieſem Material aus den gegebenen Dimenſionen a′, b′, c′ deſſen reſpective Feſtigkeit Q′ bekannt.

§. 34.

Aufgabe. (Fig. 14.)

Ein ſenkrechtes Prisma vom vollkommen ſpröden Material iſt an ſeinen beyden Enden bey EF, E′F′ in wagrechter Lage unterſtüzt; man ſucht die Größe der Kraft P, welche, zwiſchen den beyden Enden bey AB nach verticaler Richtung OP angebracht, mit der reſpectiven Feſtigkeit das Gleichgewicht hält.

Aufloſung.

1. Man ſtelle ſich vor, vom Prisma ſey anfänglich der Theil AH′ in eine verticale Wand LM (Fig 7.) eingelaſſen, und AH, deſſen Länge AE = x ſey der hervorragende Theil, welcher auf der Durchſchnitts-

mithin

mithin auf der Brechungs-Ebene ABCD (§. 32.) = B ſenkrecht;

2. ferner ſey der Schwerpunct der Brechungsebene in G, q bezeichne die abſolute, und Q die reſpective Feſtigkeit des hervorragenden Theiles, ſo iſt

3. $Q = q \frac{B.GO}{x}$ (§. 33.).

4. Wird nun das Prisma in AB unterſtüzt, und bringt man an das andere End in K′ eine Kraft Q′, welche das Steigen des Theiles AH′ verhindert, ſo bleibt alles unverändert.

5 Die Kraft Q′ muß daher nach verticaler Richtung K′Q′ wirken, und für OK′ = E′E - AE = a - x
$Q' : Q = x : a - x$, (Reine Mech. §. 16. I. Zuſ.), mithin

6. $Q' = Q. \frac{x}{a-x} = q. \frac{B.GO}{x}. \frac{x}{a-x}$ (Nr. 3.)
$= q. \frac{B.GO}{a-x}$ ſeyn.

7. Bringt man noch bey AB eine Kraft P nach verticaler Richtung aufwärts ſo an, daß

$P = Q + Q' = q. \frac{B.GO}{x} + q \frac{B.GO}{a-x}$ (Nr. 3 u. 6.)

$= \frac{a}{x(a-x)}.\ q.B.GO$, ſo kann man

8. die Unterlage wegnehmen (Reine Mech. §. 14. III. Zuſ.), und die 3 Kräfte Q, Q′, P halten mit der reſpectiven Feſtigkeit das Gleichgewicht.

9. Eben dieſes Gleichgewicht bleibt noch, wenn dieſe Kräfte entgegengeſezte Richtungen bekommen,

mithin die beyden Kräfte Q, Q′ vertical aufwärts, hingegen P vertical abwärts ziehen.

10. Endlich bleibt dieſes Gleichgewicht unverändert, wenn an den beyden Enden das Prisma unterſtüzt; hingegen die Kräfte weggenommen werden, folglich

11. Hält an AB die Kraft $P = \frac{a}{x(a-x)} q\,B.GO$ mit der reſpectiven Feſtigkeit das Gleichgewicht.

I. Zuſaz. Da für ein gegebenes Prisma die Größen a, B, GO und q unveränderlich ſind, ſo hängt der veränderliche Werth P vom veränderlichen Werthe x(a-x) ab, und P iſt um ſo kleiner, je größer dieſer Nenner (Nr. 11.) iſt, es iſt aber für $x = \frac{1}{2}a$ dieſer Nenner ein maximum (Arithm §. 321. 1. Aufg.), folglich iſt in der Mitte des Prisma die ſchwächſte Stelle, oder P am kleinſten, es wird nemlich

$$P = \frac{a}{\frac{1}{2}a(a-\frac{1}{2}a)} q\,B.GO = \frac{4q\,B.GO}{a}$$

II. Zuſaz. Sezet man in lezterer Gleichung B = bc, GO = ½ c; ſo iſt die größte Laſt, welche ein ſenkrechtes Parallelepipedum, wenn es in wagrechter Lage an beyden Enden unterſtüzt wird, in der Mitte tragen kann, $P = 2q.\frac{bc^2}{a}$.

§. 35.

Aufgabe. (Fig. 14.)

Das ſenkrechte Prisma vom ſpröden Materiale wird in wagrechter Lage an ſeinen beyden Enden unterſtüzt, man ſucht die größte Laſt R, welche das Prisma ohne zu zerbrechen tragen kann, wenn die Laſt

gleichförmig auf die ganze Länge a des Prisma vertheilet wird.

Auflöſung.

1. Da die Laſt gleichförmig vertheilet iſt, ſo leidet jede Stelle des Prisma einen gleichen Druck, folglich geſchieht der Bruch, wenn er erfolgt, an ſeiner ſchwächſten Stelle, nemlich in der Mitte (§. 34. I. Zuſ.).

2. Man ſtelle ſich nun wieder vor, die eine Hälfte AH′ des Prisma ſey in eine verticalſtehende Wand eingelaſſen, ſo, daß die andere hervorragende Hälfte AH auf der Brechungsebene ABCD = B ſenkrecht ſteht.

3. Für dieſes hervorragende Prisma, deſſen Länge = $\frac{1}{2}$ a, wenn q die abſolute, Q die reſpective Feſtigkeit bezeichnen, wird

4. $\frac{1}{2}$ a Q = q B. GO (§. 33.), das heißt, die Kraft Q würde an K nach verticaler Richtung KQ mit der reſpectiven Feſtigkeit des Prisma AH das Gleichgewicht halten.

5. Die auf das hervorragende Prisma AH vertheilte Laſt = $\frac{1}{2}$ R kann man ſich im Schwerpuncte, das iſt, in der Entfernung = $\frac{1}{4}$ a von der Brechungsebene (Reine Mech. §. 105. VIII. Zuſ.) vereinigt vorſtellen, und ihr Moment iſt daher

6. $\frac{1}{4}$ a. $\frac{1}{2}$ R = $\frac{1}{2}$ a. $\frac{1}{4}$ R.

7. Der Laſt $\frac{1}{2}$ R im Schwerpuncte iſt folglich am Ende in K die Laſt $\frac{1}{4}$ R gleichgeltend, das iſt, der auf den Endespunct K verlegte vierte Theil der Laſt R ſtrebt eben ſo den Zuſammenhang in der Ebene ABCD

zu trennen, als die auf das Prisma AH gleichförmig vertheilte halbe Laſt oder $\frac{1}{2}$ R.

7. Soll nun der Aufgabe gemäß die vertheilte Kraft R mit der Feſtigkeit des Prisma das Gleichgewicht halten, ſo muß

8. In der einen Hälfte AH

$\frac{1}{2}$ a. $\frac{1}{4}$ R $= \frac{1}{2}$ aQ $=$ qB. GO ſeyn (Nr. 4 u. 6.).

9. Unterſtüzet man das Prisma in AB, und bringt an das andere Ende ebenfalls $\frac{1}{4}$ R in K′, ſo bleibt alles unverändert, ſo, daß nun der Theil AH′ keiner Wande, oder andern Befeſtigung bedarf.

10. Die Kraft $\frac{1}{4}$ R an K′ ſtrebt wieder den Zuſammenhang der Theile in der Brechungsebene ABCD mit eben der Gewalt zu trennen, wie die auf AH′ vertheilte halbe Laſt oder $\frac{1}{2}$ R.

11. Aus Nr. 8. erhält man alſo die Größe der Laſt, oder $R = 8q \frac{B.GO}{a}$.

I. Zuſaz. Ein wagrechtes Prisma trägt alſo eine doppelt ſo große Laſt, wenn ſie auf die ganze Länge gleichförmig vertheilt iſt (z. B. wie bey einem aufgeſchütteten Getreide), als wenn die Laſt in der Mitte des Prisma vereinigt angebracht iſt; denn wenn R die vertheilte Laſt, und P die in der Mitte vereinigte Laſt, welche das Prisma tragen kann, bezeichnen, ſo iſt $R = 8q. \frac{B.GO}{a}$ (Nr. 11.), und

$P = 4q. \frac{B.GO}{a}$ (§. 34. I. Zuſ.), mithin $R = 2P$.

II. Zuſaz. Wenn ein ſenkrechtes Prisma in wagrechter Lage an ſeinen beyden Enden unterſtüzt iſt,

und man will bey Beſtimmung der reſpectiven Feſtigkeit das Gewicht des Prisma in Anſchlag bringen, ſo iſt's gerade ſo viel, als wenn in der Mitte das halbe Gewicht vereinigt wirkte.

§. 36.

Aufgabe. (Fig. 15.)

Ein ſenkrechtes Parallelepipedum von ſpröder Materie wird in eine verticale Wand LM ſo eingelaſſen, daß die beyden gegenüberſtehenden verticalen Seitenflächen A'I, und B'H wie Fig. 7 auf der Ebene LM ſenkrecht ſtehen, hingegen die obere Fläche CH ſowohl, als die untere A'F gegen die Wand LM unter dem gegebenen Winkel α geneigt ſind; man ſucht die Kraft P, welche am Ende auf der obern Fläche in K nach verticaler Richtung KP mit der reſpectiven Feſtigkeit des Parallelepipedums das Gleichgewicht hält, wenn auſſer α noch vom Parallelepipedum die Breite A' B' $=$ AB $=$ b, Höhe AC $=$ c, Länge der obern hervorragenden Seite CI $=$ a, und abſolute Feſtigkeit $=$ q gegeben ſind.

Auflöſung.

1. Die Brechungsebene, das iſt, die Durchſchnittsebene A'B'CD des Parallelepipedums mit der Wand iſt ein Rechteck, deſſen Grundlinie $A'B' = AB = b$, und deſſen Höhe $A'C \frac{AC}{\sin AA'C} = \frac{c}{\sin\alpha}$ iſt.

2. Da alle Fibern gegen die Brechungsebene unter dem Winkel α geneigt, das heißt, unter ſich parallel ſind, ſo kann man ſich wieder die Gewalt, mit welcher ſie der Trennung in der Brechungsebene Widerſtand leiſten, im Schwerpuncte G dieſer Ebene ver-

einigt vorſtellen (R. Mech. §. 24. III. Zuſ.), ſo, daß die Entfernung derſelben von der Axe A′B′, nemlich

$GO = \frac{1}{2} A'C$ (Reine Mech. §. 100. II. Zuſ.) $= \frac{c}{2 \sin \alpha}$

iſt.

3. Die Gewalt des Widerſtandes hängt von der Menge der Fibern ab, deren Zuſammenhang eine Kraft zu trennen ſtrebt, die Anzahl dieſer Fibern iſt nun in der Brechungsebene A′B′CD eben dieſelbe, wie in dem zur Grundfläche parallelen Querſchnitte ABCD, folglich iſt wieder der im Schwerpuncte G vereinigte Widerſtand $= q.b.c$, und

4. das Moment dieſes Widerſtandes in Beziehung auf die wagrechte Umdrehungsaxe A′B′ $= \frac{c}{2 \sin \alpha}$

$q b c = \frac{q.b.c^2}{2 \sin \alpha}$.

5. Die Richtung KP der Kraft P ſchneide ferner die untere Seitenfläche A′F in N, ſo kann man ſie auf den Punct N verlegen (Reine Mech. §. 4. IV. Zuſ.) ſo, daß nun die Kraft P am Hebelsarme NO ſchief unter dem Winkel $ONP = NOG = \alpha$ wirkt.

6. Man zerlege alſo dieſe Kraft in zwey Seitenkräfte, wovon die eine P′ die Richtung NO, und die andere P″ eine auf NO ſenkrechte Richtung NP″ hat, ſo wird nach Rein. Mech. §. 55. I. Zuſ.

7. $P' = P. \cos. ONP = P. \cos \alpha$, und

8. $P'' = P. \sin. ONP = P \sin \alpha$.

9. Erſtere Kraft, oder P′, drückt das Parallelepipedum gegen die Wand, und wird alſo dadurch aufgehoben;

10. leztere Kraft P'' hingegen ſtrebt das Parallelepipedum um die Axe $A'B'$ zu drehen, mithin ſolches zu zerbrechen, und da NO gleich und parallel iſt CI, alſo $NO = a$, ſo iſt ihr Moment $= a. P \sin \alpha$.

11. Soll endlich dieſe Kraft mit der reſpectiven Feſtigkeit das Gleichgewicht halten, ſo wird

12. $a. P. \sin \alpha = \frac{q b c^2}{2 \sin \alpha}$ (Nr. 4.), folglich

13. $P = \frac{q\, b. c^2}{2 a \sin \alpha^2}$.

I. Zuſaz. Behält die Kraft gegen die Seiten oder Fibern des Parallelepipedums die Neigung $ONP = \alpha$, ſtünde aber lezteres auf der Ebene LM ſenkrecht, ſo bleibt das Moment der Kraft noch $= a P \sin \alpha$ (Nr. 10), hingegen fällt nun die Brechungsebene $A'B'CD$ mit einem zur Grundfläche parallelen Querſchnitte alſo mit ABCD zuſammen, daher wird nun $GO = \frac{1}{2} c$ und das Moment des Widerſtandes (Nr. 4.) $= \frac{1}{2} q\, b. c^2$, folglich $a P \sin \alpha = \frac{1}{2} q b c^2$, und $P = \frac{q b c^2}{2 a \sin \alpha}$, wo alſo die Kraft P um ſo größer ſeyn muß, je kleiner α, mithin auch $\sin \alpha$ iſt; für $\alpha = 0$, iſt $a P \sin \alpha = 0$, folglich äuſſert die Kraft gar kein Streben den Körper zu zerbrechen, ſondern indem nun $P'' = P \cos \alpha = P$ iſt, verwendet ihre ganze Stärke auf den ſenkrechten Druck gegen die Wand.

II. Zuſaz. Behält das Parallelepipedum gegen die Wand die Neigung α, und iſt dagegen die Richtung der Kraft auf die Faſern ſenkrecht, ſo wird das Moment der Kraft $= AE'. P$, und $AE' = a + AA'$ da nun gewöhnlich $A'A$ in Beziehung auf a ſehr gering iſt, ſo kann man ſolches auſſer Acht laſſen, und das

Moment $= a.P.$ ſezen, folglich erhält man $aP = \frac{q.b.c^2}{2\sin\alpha}$ alſo wie im I. Zuſaz $P = \frac{q.b.c^2}{2a\sin\alpha}$.

III. Zuſaz. Stünde das Parallelepipedum auf der Brechungsebene, und die Richtung der Kraft auf den Faſern ſenkrecht, ſo iſt $\alpha = 90^\circ$, mithin $\sin\alpha = 1$, daher $P = \frac{q.b.c^2}{2a}$ wie §. 33. II. Zuſ.

Anmerk. Je gleichförmiger ein Körper, je weniger biegſam er iſt, mithin je mehr ein Körper den vom Galilaeus angenommenen Bedingungen (§. 32. I. Zuſ.) entſpricht, deſto genauer werden die Erfahrungen mit den angeführten Säzen §. 33—36. zuſammen ſtimmen, volle Uebereinſtimmung darf und wird man wohl nie erwarten. Die meiſten Gattungen von Stein, einige Metalle, und das Glas ſind Körper, die vorzüglich ſpröde ſind.

II.

Von der reſpectiven Feſtigkeit dehnbarer und zuſammendrückbarer Körper.

§. 37.

Erfahrungsſäze.

a. Mehrere phyſiſche Körper beſtehen aus einem ſolchen Materiale, daß ſich die aus ihnen verfertigten Prismen durch eine Kraft Q, welche (Fig. 6.) nach der Richtung der Fibern zieht, ausdehnen, oder bey der entgegengeſezten Richtung der Kraft (Fig. 8.) zuſammenpreſſen laſſen, ſo, daß alſo im erſten Falle die Fibern verlängert, und im zweyten verkürzt werden.

b. Je größer die Kraft iſt, deſto größer iſt bey eben demſelben Körper im erſten Falle die Ausdehnung, und im zweyten die Verkürzung der Fibern.

c. Der Widerſtand, welchen der Körper jedesmal entgegenſezet, iſt der Kraft gleich, wodurch der Körper ſeiner Länge nach ausgedehnet, oder zuſammengepreßt wird.

I. Zuſaz. Das Verhältniß zwiſchen der Kraft und der durch ſie hervorgebrachten Ausdehnung oder Zuſammenpreſſung kann man, bis mehrere Verſuche darüber nähern Aufſchluß geben, als ein geometriſches nehmen.

II. Zuſaz. Wenn die Kraft p (Fig. 6.) das ganze ſenkrechte Prisma A F um die Länge α ausdehnet, ſo vertheilet ſich dieſe Ausdehnung auf die ganze Länge λ des Prisma gleichförmig, theilet man nemlich die Länge λ in n gleiche Theile, und legt durch jeden Theilungspunct zur Grundfläche eine Parallelebene, ſo erhält man n congruente Prismen, jedes ſolches Prisma erhält nun, bey ſeiner Länge $\frac{1}{n}\lambda$ die Verlängerung $\frac{1}{n}\alpha$, zwey Prismen zuſammen, oder eines von der Länge $\frac{2}{n}\lambda$ die Ausdehnung $\frac{2}{n}\alpha$, und m Prismen, oder ein Prisma von der Länge $\frac{m}{n}\lambda$ die Ausdehnung $\frac{m}{n}\alpha$.

III. Zuſaz. Sind alſo von eben demſelben Material zwey ſenkrechte Prismen A, B, welche eben dieſelbe Grundfläche β, hingegen die verſchiedene Länge λ, λ' haben, gegeben, und eine Kraft p ertheilet erſtern die Ausdehnung α, ſo ertheilet eben dieſe Kraft

p dem zweyten Priſma B eine ſolche Ausdehnung α'; daß $\alpha : \alpha' = \lambda : \lambda'$ (Arithm. §. 267.). Das iſt, bey einerlei Anzahl der Fibern eines Körpers verhalten ſich die Ausdehnungen, die eben dieſelbe Kraft bewirkt, wie die Länge der Fibern.

IV. Zuſaz. Wenn man die Grundfläche β eines ſenkrechten Priſma durch gerade Linien in n gleiche Theile theilet, und durch jede Linie auf die Grundfläche eine ſenkrechte Ebene legt, ſo wird das Priſma in n gleiche Priſmen von eben derſelben Länge zerlegt, iſt alſo das Material des Priſma gleichförmig vertheilet, ſo enthält jedes ſolches Priſma den n ten Theil der Fibern des ganzen, bekömmt nun das ganze Priſma durch eine Kraft p die Ausdehnung α, ſo vertheilet ſich dieſe Kraft auf alle einzelnen Priſmen gleichförmig, das iſt, das Priſma, deſſen Grundfläche $\frac{1}{n}\beta$ iſt, bekömmt die Ausdehnung α durch $\frac{1}{n}p$, zwey ſolche Priſmen, oder eines von der Grundfläche $\frac{2}{n}\beta$ erhalten eben die Ausdehnung α durch $\frac{2}{n}p$, und ein Priſma von $\frac{m}{n}\beta$ Grundfläche erfordert zur Ausdehnung α die Kraft $\frac{m}{n}p$.

V. Zuſaz. Sind von eben derſelben Materie zwey Priſmen A, C gegeben, welche die nemliche Länge λ, aber verſchiedene Grundflächen β, β' haben, erſteres durch die Kraft p die Ausdehnung α bekömmt, und das zweyte Priſma eben dieſe Ausdehnung α erlangen ſoll, ſo iſt für die erforderliche Kraft p' $\beta : \beta' = p : p'$.

Bey gleichen Längen und einerley Ausdehnung zweyer ſenkrechten Prismen von eben derſelben Materie verhalten ſich nemlich die ausdehnenden Kräfte, wie die Grundflächen.

VI. Zuſaz. Wenn alſo für 3 Prismen von eben derſelben Materie, nemlich

Prisma.	Grundfläche.	Länge.	Kraft.	Ausdehnung.
A :	β :	λ :	p :	α
B :	β :	λ' :	p :	α'
C :	β' :	λ :	p' :	α, ſo iſt

$\alpha : \alpha' = \lambda : \lambda'$ (III. Zuſ.)
$\beta : \beta' = p : p'$ (V. Zuſ.), mithin
$\alpha\beta : \alpha'\beta' = \lambda\beta : \lambda'\beta'$, folglich

VII. Zuſaz. $\alpha = \frac{\alpha'\beta'}{\lambda'\beta'} \cdot \frac{\lambda p}{\beta}$

Wenn nun λ' das gebrauchte Längen- und eben ſo β' das gebrauchte Flächenmaaß bezeichnet, ſo wird $\lambda' = 1$, $\beta' = 1$, mithin

$\alpha = \frac{\alpha'}{p'} \cdot \frac{\lambda p}{\beta}$, wo alſo p' die Kraft bezeichnet, welche einem ſenkrechten Prisma, deſſen Grundfläche ſowohl, als Länge $= 1$ (z. B. ein rheinl. Zoll) iſt, die Ausdehnung α' ertheilet.

VIII. Zuſaz. Eben dieſe Säze laſſen ſich auf die Zuſammenpreſſungen der Kräfte anwenden, wenn nemlich wieder

Prisma.	Grundfläche.	Länge.	Kraft.	Zuſammenpreſſung.
A :	β :	λ :	p :	a
B :	β :	λ' :	p :	a'
C :	β' :	λ :	p' :	a, ſo iſt

$\alpha : \alpha' = \lambda : \lambda'$

$\beta : \beta' = p : p'$, mithin

$\alpha\beta : \alpha'\beta' = \lambda p : \lambda' p'$, ſo daß gegenwärtig λ, λ', β, β', p, p' eben dieſelben Größen wie im VI. Zuſ. bezeichnen, folglich die Kraft p, welche das Prisma A um α auszudehnen vermag, nach der entgegengeſezten Richtung um α zuſammendrücken würde.

IX. Zuſaz. Man erhält alſo wieder

$$\alpha = \frac{\alpha'\beta'}{\lambda' p'} \cdot \frac{\lambda p}{\beta}$$

Sind nun ebenfalls β' das gebrauchte Flächen- und λ' das Längenmaaß, alſo $\beta' = 1$, $\lambda' = 1$, ſo iſt $\alpha = \frac{\alpha'}{p'} \cdot \frac{\lambda p}{\beta}$.

§. 38.

Aufgabe.

Ein ſenkrechtes Prisma wird in wagrechter Lage mit dem einem Ende in eine vertical ſtehende Wand eingelaſſen, und damit ſo befeſtiget, daß es, mithin auch deſſen Fibern, auf ihr ſenkrecht ſtehen; am andern Ende wirkt die Kraft Q nach verticaler Richtung, mithin auf die Fibern ſenkrecht, man ſucht das Verhalten des Prisma, wenn deſſen Material nicht nur ausdehnbar, ſondern auch zuſammendrückbar iſt.

Auflöſung.

1. Die Durchſchnittsebene des Prisma mit der lothrechten Wand, welche zugleich die Brechungsebene iſt, §. 32.) ſey die beliebige Figur FNEM (Fig. 16.).

2. Man ziehe in ihr durch den tiefſten Punct E, und den zu höchſt liegenden F die wagrechten Linien AB, CD;

3. auf dieſe Linien fälle man von den beyden äuſſerſten Puncten M, N, die ſenkrechten AC, BD, ſo wird dadurch um die Brechungsebene ein Rechteck ACBD beſchrieben.

4. Sezet man AB = b, AC = c, ſo iſt die Breite b des Rechteckes zugleich die gröſte Breite des Prisma, ſo wie die Höhe c des Rechteckes die gröſte Höhe der Grundfläche des Prisma iſt.

5. Bezeichnet nun a die Länge des hervorragenden, auſſer der Wand befindlichen Prisma, ſo iſt aQ das Moment der Kraft, womit ſie auf alle Stellen der Brechungsebene wirket, wenn die Biegung in Beziehung auf a ſehr klein iſt. (§. 32. III. Zuſ.)

6. Dadurch wird nun das Prisma gebogen, und dieſe Biegung iſt offenbar zunächſt an der Brechungsebene am gröſten, weil obiges Moment der Kraft hier ſeinen gröſten Werth nemlich aQ hat.

7. Bey dieſer Biegung werden aber die obern Fibern bey F ausgedehnet, und dagegen die zu unterſt liegenden bey E zuſammengedrückt, ſo, daß es alſo dazwiſchen eine Stelle MN geben muß, wo weder das eine noch das andere ſtatt hat, mithin die Fibern weder ausgedehnet noch zuſammengedrückt werden, ſondern ihre natürliche Länge behalten.

8. Ziehet man zu AB auf der obern und untern Seite von MN in den beliebigen Entfernungen PO = z, PO′ = z′ die Parallelen HR, H′R′, und ihnen unendlich nahe ebenfalls parallel hr, h′r′, ſo leiden alle in den obern Streifen Hr liegenden Fibern einerley Ausdehnung, die um ſo gröſſer iſt, je gröſſer z, alſo je weiter der Streifen von MN entfernt iſt.

9. Eben ſo werden alle im untern Streifen II′r′ liegenden Fibern gleichförmig zuſammengepreßt, und jede Fiber dieſes Streifen leidet die nemliche Verkürzung, die wieder mit der Entfernung dieſes Streifens von MN, das iſt, mit z′ wächst.

10. Sezet man die Entfernung des oberſten Punctes F von MN = e, ſo liegt der unterſte Punct E von eben dieſer Stelle MN um c-e entfernt.

11. Nimmt man nun die wagrechte Linie MN zur Abſciſſen-Linie, und M zu ihren Anfangspunct, ſo giebt es auf beyden, nemlich auf der obern und untern Seite Ordinaten für die Brechungsebene, man ſeze alſo

12. MP = x, PY = y, PO = z, ſo wird, wenn man zu PO, noch po unendlich nahe zieht, das unendlich kleine Rechteck Osuo = dxdz, ferner das Rechteck POop = ſdxdz = zdx, und das Flächenelement PYyp = ydx.

13. Eben ſo wird auf der untern Seite von MN für MP = x, PO′ = z′, PY′ = y′, O′s′u′o′ = dxdz′, PO′o′p′ = ſdxdz′ = z′dx, und PY′y′p = y′dx.

14. Durch TT′ lege man endlich eine Ebene, welche auf der Brechungsebene ſenkrecht ſteht, ſo erhält man einen zur Länge des Prisma parallelen Querſchnitt TT′GL (Fig. 17.) eben dieſes Prisma, ſo, daß TT′ eben dieſelbe Linie wie Fig. 16., mithin P die Stelle iſt, wo die Fibern ihre natürliche Länge behalten.

15. Ferner iſt nun TL = a, und zeigt zugleich die Lage der oberſten Faſer vor der Biegung an.

16. Da man nur jenen Theil der Krümmung zu unterſuchen hat, welcher zunächſt an der Brechungsebene liegt, ſo nehme man von der gebogenen Faſer PK, welche ihre natürliche Länge a unverändert behält, das unendlich kleine Stückgen $P\Pi = dw$.

17. Vom Mittelpunct I des dieſem Elemente entſprechenden Krümmungskreiſes ziehe man die Krümmungshalbmeſſer IP, IΠ, und verlängere ſie bis T, τ, ſo wird dadurch ein unendlich kleines Stückgen TT′ T′T des Querſchnittes begränzt, in welchem die obereinander liegende Faſern unendlich kleine concentriſche Kreisbögen bilden, ſezet man alſo den Krümmungshalbmeſſer $IP = r$, ſo iſt

18. $IP : IO = P\Pi : Oo$, das iſt
$r : r+z = dw : Oo$, mithin

19. $Oo = \frac{(r+z)\,dw}{r} = dw + \frac{z}{r}dw$, das iſt, die in O liegende Faſer wird bey der Länge dw, um $\frac{z}{r}dw$ ausgedehnet, folglich wird (Fig. 16.) das unendlich kleine Prisma, deſſen Grundfläche $Osuo = dxdz$ iſt, bey der Länge dw ebenfalls um $\frac{z}{r}dw$ ausgedehnet.

20. Bezeichnet nun dp die zur Hervorbringung dieſer Ausdehnung erforderliche Kraft, ſo wird

21. $\frac{z}{r}dw = \frac{\alpha'}{p'} \cdot \frac{dw.dp}{dxdz}$ (§. 37. VII. Zuſ).

$\frac{z}{r} = \frac{\alpha'}{p'} \cdot \frac{dp}{dxdz}$ mithin iſt

22. $dp = \frac{p'}{\alpha' r}\,dx.dzz$ die Kraft, mit welcher die an der Stelle Osuo befindlichen Fibern von der

Länge dw ausgedehnet, mithin die Größe des Widerſtandes, den eben dieſes unendlich kleine Prisma dieſer Ausdehnung entgegenſezet (§. 37. c.).

23. Das Moment dieſes Widerſtandes in Beziehung auf die unveränderliche Linie MN, um welche dieſe Kräfte das Element zu drehen ſtreben, iſt

$$z\,dp = \frac{p'}{\alpha' r}\,dx.\,z^2\,dz,\ \text{folglich}$$

24. Das Moment der zwiſchen POop liegenden Faſern

$$\int z\,dp = \frac{p'}{3.\alpha' r.}\,z^3\,dx + A,$$

wo die Const. A aus der Beſchaffenheit der Brechungsebene, und der Lage MN beſtimmt werden muß.

25. Iſt nun jedesmal für x die entſprechende Grèße PY = y bekannt, und man ſezet in obige Gleichung ſtatt z dieſen Werth von y, ſo erhält das Moment aller zwiſchen PY und py liegenden Fibern.

26. Integrirt man endlich leztere Gleichung nach x, ſo giebt das Integral, für x = MN = AB = b das Moment des geſammten Widerſtandes, welchen die ausgedehnten Fibern leiſten $= \int \left(\frac{p'}{3\alpha'.r} z^3\,dx + A \right)$

27. Eben ſo iſt (Fig. 17.) für die unter P liegenden zuſammengepreßten Fibern in der Entfernung PO′ = z′.

$$IP : IO' = P\Pi : O'o',\ \text{oder}$$

$$r : r - z' = dw : O'o',\ \text{alſo}$$

28. $O'o' = \frac{(r-z')dw}{r} = dw - \frac{z'}{r} dw$, ſo daß alſo wieder (Fig. 16.) die in O′ liegenden Faſern bey der Länge dw, um $\frac{z'}{r}$ dw zuſammengepreßt, alſo kürzer werden.

29. Bezeichnet nun $d\pi$ die Kraft, welche im Prisma von der Länge dw, und Grundfläche $O's'u'o' = dxdz'$, um $\frac{z'}{r}$ dw zuſammenzudrücken vermag, ſo iſt

30. $\frac{z'}{r} dw = \frac{a'}{p'} \cdot \frac{dw. d\pi}{dxdz'}$ (§. 37. IX. Zuſ.),

und $\frac{z'}{r} = \frac{a'}{p'} \cdot \frac{d\pi}{dxdz'}$, mithin

31. $d\pi = \frac{p'}{a'.r} dxz'dz'$.

32. Eben dieſes iſt nun die Gewalt, mit welcher an der Stelle O′s′u′o′ der Brechungsebene das unendlich kleine Prisma dieſer Zuſammendrückung widerſteht, und das Moment in Beziehung auf die Linie MN wird

33. $z'd\pi = \frac{p'}{a'.r} dxz'^2dz'$, folglich

34. $\int z'd\pi = \frac{p'}{3a'.r} z'^3 dx + B$ das Moment für den Theil PO′o′p, wo wieder die Const. B aus der Beſchaffenheit der Brechungsebene und der Lage MN beſtimmt werden muß.

35. Subſtituirt man nun ſtatt z′ den Werth von $PY' = y'$, welcher aber anderswoher bekannt ſeyn muß, und integriret dann nochmal nach x, ſo ergiebt ſich für $x = b$ das Moment des Widerſtandes, wel-

chen die zuſammengedrückten Theile leiſten, nemlich

$$\int\left[\frac{p'}{3a'r}\,z'^3\,dx+B\right].$$

36. Da endlich ſowohl die Ausdehnung, als die Zuſammenpreſſung durch die Kraft Q bewirkt wird, deren Moment auf die Brechungsebene, wenn die Krümmung in Beziehung auf die Länge nicht beträchtlich iſt, mithin die Entfernung $=a$ geſezt werden kann, $=aQ$ iſt, ſo wird

$$37.\ aQ=\int\left[\frac{p'}{3\alpha'.r}\,z^3\,dx+A+\frac{p'}{3a'r}z'^3\,dx+B\right]$$

I. Zuſaz. Wenn dP den Widerſtand bezeichnet, welchen ein Element an der von MN entfernteſten höchſten Stelle in F leiſten kann, ſo iſt nun $z=e$ (Nr. 10.), mithin $dP=\frac{p'}{\alpha'.r}\,e\,dx\,dz$ (Nr. 22.), folglich

$dp : dP = z : e$, und

$dp = \frac{z}{e}\,dP.$

II. Zuſaz. Wenn q die abſolute Feſtigkeit des Körpers für die Brechungsebene $\beta=1$ (§. 26. IV. Zuſ.), und dq eben dieſelbe für ein Element dieſes Körpers, das iſt, für die unendlich kleine Brechungsebene $dx\,dz$ bezeichnet, ſo iſt $q : dq = 1 : dx\,dz$, mithin

$dq = q.dx\,dz.$

III. Zuſaz. Wenn die Kraft Q am Ende das Prisma zu zerbrechen ſtrebt, ſo werden die zu oberſt liegenden Theile am meiſten ausgedehnet, und dieſe Ausdehnung nimmt mit der Kraft zu, folglich wächst auch dP mit Q ſo lange, (§. 37. c), bis Q der reſpectiven Feſtigkeit des Körpers gleich wird, in dieſem

Falle nun muß dP der abſoluten Feſtigkeit des Elementes gleich ſeyn, daher wird in dieſem Falle

$dP = q \cdot dx dz$ (II. Zuſaz.), folglich

im Zuſtande des Gleichgewichtes der Kraft Q mit der reſpectiven Feſtigkeit wird für ein anderes Element, welches vom MN um z entfernt iſt, deſſen Widerſtand

$$dp = \frac{z}{c} dP \text{ (I. Zuſ.)} = \frac{q}{e}\, z dx dz, \text{ und}$$

$$dp = \frac{p'}{\alpha' r}\, z dx dz \text{ (Nr. 22.) mithin}$$

$$\frac{p'}{\alpha' r} = \frac{q}{e}.$$

IV. Zuſaz. Läßt ſich hingegen das Prisma nur ausdehnen, aber nicht zuſammendrücken, ſo iſt Nr. 10. $e = c$, und Nr. 13. z' ſowohl als $y' = 0$, alſo Nr. 37.

$aQ = \int \left[\frac{p'}{3\alpha' r} z^3 dx + A\right]$; und für die reſpective Feſtigkeit iſt $aQ = \int\left[\frac{q}{3e} z^3 dx + A\right]$ (III Zuſ.)

§. 39.

Aufgabe. (Fig. 7.)

Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum AH iſt mit dem einem Ende in die vertical ſtehende Mauer LM ſo befeſtiget, daß es auf der Brechungsebene ſenkrecht ſteht, und die Seite AB wagrecht iſt, am andern Ende wirkt die Kraft Q vertical, mithin auf die Fibern ſenkrecht; man ſucht das Verhalten dieſes Körpers, wenn er ſich nicht nur dehnen, ſondern auch zuſammendrücken läßt.

Auflöſung.

Man ſeze die Länge des Körpers, oder $AE = a$; deſſen Breite $AB = b$, die Höhe $AC = c$; und bei

halte endlich alle übrigen Bezeichnungen des vorhergehenden §. unverändert bey, und da ferner die gegenwärtige Aufgabe nur ein ſpecieller Fall iſt, mithin aus der vorhergehenden Auflöſung folgt, ſo werden gegenwärtig der Kürze wegen die Nr. fortgeſezt.

38. Die Brechungsebene iſt gegenwärtig (Fig. 16.) das Rechteck ABCD ſelbſt, mithin iſt allenthalben (Nr. 12.) $PY = PT = e$ (Nr. 10.), und $PY' = y' = c - e$, folglich in dem Ausdrucke:

$$39. \int z\,dp = \frac{p'}{3.\alpha'.r} z^3\,dx + A \text{ (Nr. 24.)}$$

wenn man ſtatt z die Größe e ſezet, ſo wird das Moment der zwiſchen PT und pt liegenden Fibern, oder $\int e\,dp = \frac{p'e^3}{3.\alpha'.r}\,dx + A$, wo für $x = o$ alles verſchwindet, alſo $A = o$ iſt.

40. Integriret man dieſe Gleichung nach x, ſo iſt $\int \frac{p'e^3}{3.\alpha'r.}\,dx = \frac{p'e^3x}{3.\alpha'r}$, wo wieder für $x = o$ alles verſchwindet, mithin keine Const. hinzukömmt, alſo für $x = b$.

41. Das Moment aller ausgedehnten Fibern $= \frac{p'be^3}{3.\alpha'.r}$.

42. Eben ſo, wenn man in der Gleichung

$\int z'\,d\pi = \frac{p'}{3.\alpha'.r} z'^3\,dx$ (Nr. 34), wo ebenfalls $B = o$ iſt, ſtatt z' die Größe c−e ſezet, ſo wird

$$43. \int (c-e)\,d\pi = \frac{p'(c-e)^3}{3.\alpha'.r}\,dx, \text{ folglich}$$

$$44. \int \frac{p'(c-e)^3}{3.\alpha'.r}\,dx = \frac{p'x(c-e)^3}{3.\alpha'.r},$$ wo wieder keine Const. addirt werden darf.

45. Für $x = b$, wird endlich das Moment aller zuſammengedrückten Fibern

$$= \frac{p' b (c-e)^3}{3.\, a'.\, r}$$

46. Sezet man endlich dieſe Werthe in die Gleichung Nr. 37., ſo wird

$$aQ = \frac{p'.b.e^3}{3.\alpha'.r} + \frac{p'b(c-e)^3}{3.\, a'.\, r}$$

$$= \frac{p'.b}{3.r}\left[\frac{e^3}{\alpha'} + \frac{(c-e)^3}{a'}\right]$$

I. Zuſaz. Die beyden Größen α', a' (§. 37. VI u. VIII. Zuſ.) laſſen ſich nur durch viele ſorgfältig angeſtellte Verſuche für einen Körper beſtimmen, aus Mangel derſelben, und da es ohnehin nur auf eine Annäherung ankömmt, kann man indeſſen annehmen, der Widerſtand, welchen die obern ausgedehnten Elemente leiſten, ſey jenem, welchen die unter MN liegenden zuſammengedrückten Elemente leiſten, gleich, oder Nr. 22. u. 31. $\int dp = \int d\pi$, mithin

$$\int \frac{p'}{\alpha' r} z dx dz = \int \frac{p'}{a' r} dx z' dz' \text{ alſo}$$

$$\frac{p'}{2\alpha'.r} z^2 dx = \frac{p'}{2\, a'.\, r} z'^2 dx, \text{ folglich für}$$

$z = y = e$, und $z' = y' = c - e$ (Nr. 38.)

$$\frac{p' e^2}{2\alpha'.r} dx = \frac{p'(c-e)^2}{2.\, a'.\, r} dx, \text{ mithin}$$

$$\frac{e^2}{\alpha'} = \frac{(c-e)^2}{a'}, \text{ und } a' = \frac{\alpha'(c-e)^2}{e^2}$$

II. Zuſaz. Sezet man ſtatt a' dieſen eben gefundenen Werth in die Gleichung Nr. 46., ſo wird

$$aQ = \frac{p'.b}{3.r}\left[\frac{e^3}{\alpha'} + \frac{e^2(c-e)^3}{\alpha'(c-e)^2}\right]$$

$$= \frac{p'.be^2}{3.\alpha'.r}\left[e + \frac{(c-e)^3}{(c-e)^2}\right]$$

$$= \frac{p'be^2}{3\alpha'r}(e+c-e) = \frac{p'.b.e^2c}{3.\alpha'.r}$$

III. Zuſaz. Man ſeze ferner noch die unbekannte Entfernung der Stelle MN, wo die Fibern ihre natürliche Länge behalten, von der obern Seite CD, das iſt MC $= e = kc$, und ſubſtituire dieſen Werth in die lezte Gleichung des vorhergehenden Zuſazes, ſo wird

$$aQ = \frac{p'.bk^2c^3}{3\,\alpha'.r} = \frac{p'k^2}{3\alpha'.r}\,bc^3.$$

IV. Zuſaz. Für ein anderes rechtwinklichtes Parallelepipedum, von eben demſelben Material, aber von der Länge A, Breite B und Höhe C wird $Q'.A = \frac{p'k^2}{3.\alpha'.r}BC^3$, folglich bleibt $\frac{p'k^2}{3\alpha'}$ für jedes rechtwinklichte Parallelepipedum vom nemlichen Material unveränderlich, und hängt alſo von der Beſchaffenheit dieſes Materials, vorzüglich von der Elaſticität deſſelben, ab.

V. Zuſaz. Sezet man alſo $\frac{p'}{3\alpha'} = E$, mithin $\frac{p'k^2}{3\alpha'} = Ek^2$, ſo iſt für das rechtwinklichte Parallelepipedum $aQ = \frac{Ek^2}{r}.\,bc^3$ (Reine Mech. §. 240), das iſt, wenn man die Theorie der elaſtiſchen Linien, bey welchen nur ihre Länge in Anſchlag gebracht wurde, auf die Biegung rechtwinklichter Parallelepipeden

anwenden will, ſo muß Ek^2 noch mit dem Producte der Breite in den Cubus der Höhe, nemlich mit bc^3 multiplicirt werden.

VI. Zuſatz. Soll die Kraft Q mit der reſpectiven Feſtigkeit das Gleichgewicht halten, ſo iſt

$$dp = \frac{q}{e} \, zdxdz = \frac{p'}{\alpha' r} \, zdxdz \; (\S. 38. \text{ Nr. } 22.$$

und III. Zuſ.) mithin $\frac{p'}{\alpha' r} = \frac{q}{e} = \frac{q}{kc}$ (III. Zuſ.)

folglich $aQ = \frac{p'.b.c.e^2}{3.\alpha'.r}$ (II. Zuſ.) $= \frac{q.b.c.k^2 c^2}{3\,kc}$

$= \frac{1}{3} kqbc^2$, alſo $Q = \frac{1}{3} kq \frac{bc^2}{a}$, und daher iſt Q bey biegſamen Körpern ganz verſchieden, von Q′ bey ſpröden Körpern (§. 33. II. Zuſ.).

VII. Zuſatz. Bey eben demſelben Material iſt für ein anderes rechtwinklichtes Parallelepipedum deſſen Länge A, Breite B, und Höhe C iſt,

$$Q' = \frac{1}{3} kq \frac{BC^2}{A}, \text{ mithin}$$

$$Q : Q' = \frac{bc^2}{a} : \frac{BC^2}{A}$$ wie bey ſpröden Körpern (§. 33. II. Zuſ.); und

$$Q = \frac{Q'.A}{B.C^2} \cdot \frac{bc^2}{a}.$$

VIII. Zuſatz. Iſt alſo bey einem Material für ein rechtwinklichtes Parallelepipedum von der Höhe C, Breite B, und Länge A durch Verſuche die Kraft Q′, welche mit der reſpectiven Feſtigkeit das Gleichgewicht hält, beſtimmt, ſo kann man daraus für jedes andere rechtwinklichte Parallelepipedum aus b, c, a deſſen

reſpective Feſtigkeit finden, ſezet man nemlich die durch Verſuche beſtimmte Größe $\frac{Q'.A}{B\ C^2} = N$, welche der Brechungscoefficient heißt, ſo iſt $Q = N\frac{bc^2}{a}$

IX. Zuſaz. Da alſo $Q = N\frac{bc^2}{a} = \frac{1}{3}kq\frac{bc^2}{a}$ (VI. Zuſ.) ſo iſt $\frac{1}{3}kq = N$, mithin $k = \frac{3N}{q}$, folglich $e = kc$ (III. Zuſ.) $= \frac{3Nc}{q}$, das iſt, aus dem Brechungscoefficienten N, der Höhe c und der abſoluten Feſtigkeit q läßt ſich die Stelle beſtimmen, wo die Fibern weder ausgedehnt, noch zuſammengedrückt werden.

I. Anmerk. Holz iſt vorzüglich ein Körper, welcher ſich ſowohl zuſammendrücken, als ausdehnen läßt, in dieſer Hinſicht wird in den folgenden §§ der gegenwärtigen Unterabtheilung nur von rechtwinklichten Parallelepipeden gehandelt, die aus Holz gehauen ſind, das iſt, von rechtwinklichten Balken, obgleich dieſe Lehren auch auf andere Körper von der nemlichen Beſchaffenheit und Form angewendet werden können.

II. Anmerk. Für jeden rechtwinklichten Balken, welcher eine wagrechte Lage hat, bezeichnet allemal a deſſen Länge, b die Breite, das iſt, die wagrechte Seite ſeiner Grundfläche, und c die Höhe, nemlich die verticale Seite eben dieſer Grundfläche, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt iſt.

§ 40.

Aufgabe.

Aus einem cylindriſchen Baume, deſſen Länge = a, und Halbmeſſer ſeiner Grundflächen = r iſt, ſoll ein rechtwinklichter Balken gehauen werden, man ſucht die Breite u, und Höhe w, damit ſeine reſpective Feſtigkeit ein maximum iſt.

Aufløſung.

1. Die geſuchte Breite u ſey (Fig. 18.) AB, und BD die geſuchte Höhe w, ſo iſt der Aufgabe gemäß $ABD = 90°$, mithin

2. die gerade Linie AD ein Diameter (Geom. §. 72. III. Zuſ.) alſo $= 2r$, folglich

3. $BD^2 = AD^2 - AB^2$, oder

$$w^2 = 4r^2 - u^2.$$

4. Wird nun dieſer Balken mit dem einem Ende in die Wand ſo befeſtiget, daß er auf ihr ſenkrecht ſteht, und bezeichnet Q die Kraft, die am andern Ende mit der reſpectiven Feſtigkeit dieſes Balkens das Gleichgewicht hält, ſo iſt

5. $Q = N \frac{uw^2}{a}$ (§. 39. VIII. Zuſ.).

$$= N \frac{u}{a}(4r^2 - u^2) = \frac{N}{a}(4r^2 u - u^3);$$

6. Soll nun Q ein maximum ſeyn, ſo muß auch die Function $4r^2 u - u^3$ ein max. ſeyn, man ſeze daher

7. $Y = 4r^2 u - u^3$, ſo iſt

$dY = 4r^2 du - 3u^2 du$, mithin (Arithm. §. 320.)

$$\frac{dY}{dx} = 0 = 4r^2 - 3u^2, \text{ folglich}$$

8. $3u^2 = 4r^2$, und

$$u = 2r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

9. Ferner wird $d^2Y = -6udu^2$, alſo

$$\frac{d^2Y}{du^2} = -6u = -12r\sqrt{\tfrac{1}{3}} \text{ (Nr. 8.)}$$

10. Die Function Y Nr. 6., mithin auch Q Nr. 5. wird alſo für $u = 2r\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein gröſstes, wodurch alſo die Breite des Balkens beſtimmt iſt.

11. Daraus erhält man die entſprechende Höhe:

$$w = \sqrt{\left[4r^2 - \frac{4r^2}{3}\right]} \text{ (Nr. 3.)} = \sqrt{\frac{8r^2}{}}$$

$$= 2r\sqrt{(1 - \tfrac{1}{3})} = 2r\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

12. Die reſpective Feſtigkeit dieſes Balkens iſt endlich

$$Q = \frac{N}{a} \cdot 2r \sqrt{\tfrac{1}{3}} \cdot \frac{8r^2}{3} = \frac{16}{3} N \frac{r^2}{a} \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

I. Zuſaz. Bey dieſem Balken iſt nun

$$u : w = 2r \sqrt{\tfrac{1}{3}} : 2r \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$
$$= 1 : \sqrt{2} = 1 : 1{,}414 \ldots$$

II. Zuſaz. Man fälle von der Ecke B auf den Diameter die ſenkrechte BE, ſo iſt für $AE = x$, $BE = y$, $y^2 = 2rx - x^2$, ferner $y^2 = u^2 - x^2$, alſo $2rx - x^2 = u^2 - x^2$, mithin $2rx = u^2 = \frac{4r^2}{3}$ (Nr. 8.) und $x = \frac{2}{3} r = \frac{1}{3} \cdot 2r$

III. Zuſaz. Zieht man alſo in der Grundfläche des cylinderförmigen Baumes den beliebigen Diameter AD, nimmt auf leztern $AE = \frac{1}{3} AD$, errichtet bis an die Peripherie auf eben dieſen Diameter die ſenkrechte EB, zieht endlich die Sehnen AB, BD, ſo iſt erſtere die Breite, und leztere die Höhe eines rechtwinklichten Balken, welcher ſich aus dieſem Cylinder hauen läßt, deſſen reſpective Feſtigkeit ein maximum iſt.

§. 41.

Aufgabe. (Fig. 14.)

Ein rechtwinklichtes Parallelepipedum iſt an ſeinen beyden Enden wagrecht unterſtüzt, man ſuchet die größte Laſt P, die es an O tragen kann ohne zu zerbrechen, wenn die Länge a, Breite b, Höhe c ſowohl, als die Stelle dieſer Laſt, oder K′O = x gegeben iſt.

Auflöſung.

1. Gegenwärtig verhält ſich alles wie §. 34. bey einem ſpröden, es gelten nemlich alle dort angeführten Gründe, nur muß allda Nr. 3.

2. $Q = N \frac{bc^2}{x}$ (§. 39. VIII. Zuſ.)

3. Eben daſelbſt Nr. 6.

$Q' = N \frac{bc^2}{a-x}$ ſezen, folglich

4. Erhält man dadurch Nr. 7.

$$P = Q + Q' = Nbc^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

$$= Nbc^2 \left(\frac{a-x+x}{x(a-x)}\right) = Nbc^2 . \frac{a}{x(a-x)}$$

I. Zuſaz. Für $x = \frac{1}{2} a$ wird der Nenner des voranſtehenden Bruches ein maximum (Arithm. §. 321.) mithin wird der Werth des Bruches ein minimum, folglich in der Mitte wird P am kleinſten, in der Mitte iſt alſo der Balken am ſchwächſten, und es iſt allda

$$P' = Nbc^2 . \frac{a}{\frac{1}{2}a(a-\frac{1}{2}a)} = Nbc^2 \frac{a}{\frac{1}{4}a^2} = 4N \frac{cb^2}{a}$$

mithin

II. Zuſaz. $P' : P = 4N \frac{bc^2}{a} : Nbc^2 \frac{a}{x(a-x)}$

$$= \frac{4}{a} : \frac{a}{x(a-x)}, \text{ folglich}$$

$P = \frac{a^2 P'}{4x(a-x)}$, wo P vom nächſten Unterſtüzungspuncte um x, hingegen P' von eben demſelben um $\frac{1}{2}$ a entfernt liegt.

§. 42.

Erklärungen.

a. Ein dehnbarer Körper kann an einer Stelle nur zerbrechen, wenn die entfernteſten Theile durch eine Kraft ſo gedehnet werden, daß ſie zerreiſſen, je gröſſer nun die Krümmung eines Balken an einer Stelle

iſt, deſto größer iſt dieſe Ausdehnung der äuſſerſten Theile, deſto größer alſo die Gefahr des Zerbrechens; folglich giebt es eine gewiſſe Krümmung, wo die Gefahr des Zerbrechens am größten iſt, man kann den dieſer größtmöglichen Krümmung zugehörigen Krümmungshalbmeſſer, den der reſpectiven Feſtigkeit entſprechenden Krümmungshalbmeſſer nennen

b. Mit der Krümmung wächst die rechtwinklichte Ordinate, das iſt, wenn die Kraft auf den wagrechten Balken vertical abwärts wirkt, je mehr der Balken gekrümmt iſt, deſto tiefer ſenkt er ſich, es giebt alſo ebenfalls eine größte, eine der reſpectiven Feſtigkeit entſprechende Senkung.

I. Zuſaz. Die Senkung ſowohl, als der Krümmungshalbmeſſer eines gekrümmten Balken läßt ſich aus der Theorie elaſtiſcher Linien beſtimmen (§. 39. V. Zuſ.), und in wieferne dieſe Krümmung, wenn nicht beſondere Vorrichtungen, z. B. Benezung des Balkens auf der obern, und Erwärmung auf der untern, eine Ausnahme machen, in Bezug auf die ganze Länge unbeträchtlich iſt, ſo laſſen ſich vorzüglich die Lehren von §. 247 — 249. der reinen Mechanik anwenden.

II. Zuſaz. Wenn der rechtwinklichte Balken (Fig. 7.) mit dem einem Ende in die verticalſtehende Wand LM ſo befeſtiget wird, daß er auf ihr ſenkrecht ſteht, mithin für ſich eine wagrechte Lage hat, und am andern Ende die Kraft Q vertical abwärts zieht, ſo iſt die größte Krümmung zunächſt an der Wand, für welche Stelle nämlich das Moment der Kraft Q am größten iſt; bezeichnet nun r′ den Krümmungshalbmeſſer, ſo iſt $r' = \frac{Ek^2}{aQ} bc^3$ (Reine Mech. §. 247. III. Zuſ.).

III. Zuſaz. Würde auf die obere Seite eben dieſes Balkens die Laſt P gleichförmig nach der ganzen Länge vertheilet, ſo iſt zwar ebenfalls die Krümmung zunächſt an der Wand am größten, und wenn r den Krümmungshalbmeſſer für dieſe Stelle bezeichnet, ſo wird

$$r = \frac{2Ek^2}{a.P} bc^3$$ (Reine Mech. §. 248. IV. Zuſ.)

IV. Zuſaz. Soll nun die gleichförmig vertheilte Laſt eben dieſelbe Krümmung, wie die am Ende des Balkens vereinigte Laſt Q hervorbringen, ſo muß

$$r' = r,\ \text{mithin}\ \frac{Ek^2}{Q.a} bc^3 = \frac{2.Ek^2}{P.a} bc^3,\ \text{alſo}$$

$\frac{1}{Q} = \frac{2}{P}$; folglich $P = 2Q$, das iſt, die vertheilte Kraft muß doppelt ſo groß ſeyn.

V. Zuſaz. Wenn die am Ende angebrachte Kraft Q gerade ſo groß iſt, daß ſie der Balken, ohne zu zerbrechen, noch tragen kann, ſo kann er eine doppelt ſo große Laſt P tragen, wenn ſie gleichförmig vertheilt wird.

VI. Zuſaz. Will man für einen wagrechten Balken, der mit einem Ende in wagrechter Stellung befeſtiget iſt, deſſen reſpective Feſtigkeit durch ein am andern Ende angebrachtes Gewicht Q beſtimmen, ſo muß man noch die Hälfte des Gewichtes P vom Balken zur totalen Laſt rechnen, die der Balken trägt, oder es iſt dann $Q + \frac{1}{2}P = N \frac{bc^2}{a}$ (§. 39. VIII. Zuſ.).

VII. Zuſaz. Wenn ein rechtwinklichter Balken wagrecht an ſeinen beyden Enden (Fig. 14.) un-

terſtüzt iſt, ſo ertheilet ihm die in deſſen Mitte ſenkrecht angebrachte Kraft Q eine ſolche Krümmung, daß

$$r' = \frac{4Ek^2}{Q.a} bc^3$$ (Reine Mech. §. 247. IX Zuſ.);

ferner iſt in der Mitte ſeine tiefſte Senkung oder

$$u' = \frac{Q.a^3}{48Ek^2.b.c^3}$$ (ebendaſelbſt.)

VIII. Zuſaz. Wirket auf eben dieſen Balken hingegen die Laſt P, welche gleichförmig vertheilet iſt, ſo wird $r = \frac{8Ek^2 b.c^3}{P.a}$, und die größte Senkung in der Mitte, oder $u = \frac{5.P.\frac{1}{8}a^3}{48.Ek^2 bc^3}$ (Reine Mech. §. 249. II u. III. Zuſ.) $= \frac{5Pa^3}{384Ek^2.b.c^3}$

IX. Zuſaz. Soll daher die vertheilte Kraft P dem an beyden Enden unterſtüzten Balken in der Mitte eben dieſelbe Krümmung ertheilen, wie die in der Mitte vereinigte Kraft Q, ſo muß $r' = r$, mithin

$\frac{4Ek^2.b.c^3}{Q.a} = \frac{8Ek^2.b.c^5}{P.a}$, alſo $\frac{1}{Q} = \frac{2}{P}$, folglich $P = 2Q$ ſeyn.

X. Zuſaz. Wenn alſo Q die größte Laſt iſt, welche der Balken in der Mitte tragen kann, ſo kann er die doppelte Laſt $P = 2Q$ tragen, wenn leztere auf die ganze Länge des Balkens gleichförmig vertheilet wird.

XI. Zuſaz. Will man alſo bey einem wagrechten Balken, welcher an beyden Enden unterſtüzet iſt, deſſen Gewicht in Anſchlag bringen, ſo muß man ſich die Hälfte derſelben in der Mitte des Balken vereinigt vorſtellen, kann nemlich ein ſolcher Balken in

der Mitte ohne zu zerbrechen auſſer ſeinem Gewichte P noch die Laſt Q tragen, ſo iſt die Totallaſt, mithin die reſpective Feſtigkeit des Balkens

$$Q + \tfrac{1}{2} P = 4N \frac{bc^2}{a} \text{ §. 41. I. Zuſ.)}$$

XII. Zuſaz. Wenn wie im VII. Zuſaz auf die Mitte des Balken die Laſt P′ drückt, und w die gröſste Senkung deſſelben in der Mitte bezeichnet, ſo iſt

$$w = \frac{P'.\,a^3}{48\,E\,k^2.\,b.\,c^3}, \text{ mithin}$$

$u' : w = Q : P'$, das iſt, die Senkungen ſind den Kräften proportionirt.

XIII. Zuſaz. Wenn w zugleich die gröſste Senkung bezeichnet, welche der Balken ohne zu zerbrechen in ſeiner Mitte erhalten kann, ferner P′ die dazu erforderliche Kraft, ſo iſt wieder

$$w = \frac{P'.\,a^3}{48.\,E k^2 bc.} = \frac{a^3}{48.\,E k^2 bc^3}.\ \frac{4N bc^2}{a} \text{ (§. 41. I Zuſ.)} = \frac{N a^2}{12 E k^2.c}.$$

XIV. Zuſaz. Soll endlich die auf die ganze Länge des Balkens vertheilte Kraft P (VIII. Zuſ.) den Balken in der Mitte eben ſo tief ſenken, wie die in der Mitte vereinigte Kraft Q (VII. Zuſ.), ſo muß allda $u = u'$, mithin $\frac{5\,P a^3}{384.\,E k^2 b c^3} = \frac{Q\,a^3}{48\,E k^2\,b.\,c^3}$ alſo

$$\frac{5\,P}{8} = Q, \text{ oder } P = \frac{8}{5}\ Q = 1,6\,Q \text{ ſeyn.}$$

folglich nicht wie im IX Zuſaz, daher erhält auch gegenwärtig der Balken durch P nicht eben dieſelbe Krümmung in der Mitte wie durch Q.

§. 43.

Aufgabe. (Fig. 19.)

Ein rechtwinklichter Balken iſt mit ſeinen beyden Enden um die Stücke AE, BF in verticalſtehende Wände eingelaſſen, und in wagrechter Stellung befeſtiget, in der beliebigen Entfernung $AC = x$ wirkt auf den Balken die Kraft P vertical abwärts, man ſucht ihre Größe, wenn ſie mit der reſpectiven Feſtigkeit des Balkens im Gleichgewichte ſteht.

Auflöſung.

1. Man nehme indeſſen an, der Balken ſey nicht in die Mauer eingelaſſen, ſondern ruhe auf den in A und B angebrachten Unterlagen.

2. Sezet man nun die Entfernung der beyden Unterlagen $AB = a$, ſo iſt für $AC = x$, $BC = a - x$.

3. Wenn ferner R die größte Laſt iſt, welche der unterſtüzte Balken in C tragen kann, ſo iſt

4. $R = N \frac{abc^2}{x(a-x)}$ (§. 41.).

5. Dieſe Kraft wird aber den Balken biegen, ſo, daß ſich dadurch der Punct C bis D ſenket.

6. Sinket aber der Punct C, ſo drehet ſich AC um A, und dadurch wird der Punct E zum Steigen ſollicitirt, und eben ſo, da ſich zugleich CB um B drehet, bekömmt F ein Streben zum Steigen.

7. Soll nun der Punct C ſeine geſenkte Lage in D behalten, und die beyden Puncte E, F doch nicht ſteigen, ſo muß in E eine Kraft Q, und in F eine Kraft Q′, hingegen aber auch für erſtere an D eine

Kraft

Kraft p, und für leztere eine Kraft p′ nach verticaler Richtung ſo angebracht werden, daß

8. wenn man AE = u, und BF = w ſezet, ſtets $px = Qu$, und $p'(a-x) = Q'w$ iſt. (Reine Mech. §. 16. II. Zuſ.)

9. Nun wirkt an E die Kraft Q, und dieſe hält p an D das Gleichgewicht, ferner an F die Kraft Q′, und mit dieſer iſt p′ an D ebenfalls im Gleichgewichte, endlich an C, welches in der geſenkten Lage mit D zuſammenfällt, die Kraft R (Nr. 4.)

10. Die noch unbeſtimmten Kräfte Q, p, und Q′, p′ müſſen ſo lange nach obigen Verhältniſſen (Nr. 8.) vermehrt werden, bis ſie der reſpectiven Feſtigkeit des Balkens an den beyden Unterlagen das Gleichgewicht halten, in dieſem Falle nun äuſſern ſie weiter kein Beſtreben mehr die Stücke EC um A, und CF um B zu drehen, folglich kein Streben mehr das Sinken des Punctes C nach D zu verhindern, und die Puncte E und F zu heben.

11. Für die reſpective Feſtigkeit des Balkens an der Stelle A wird nun $px = Nbc^2$ (§. 39. VIII. Zuſ.) und

12. eben ſo für die Stelle B wird $p'(a-x) = Nbc^2$; folglich

13. iſt nun die Summe aller an C, oder was eins iſt, an der geſenkten Stelle D angebrachten Kräfte

$$14.\quad R + p + p' = N\frac{abc^2}{x(a-x)} + N\frac{bc^2}{x} + N\frac{bc^2}{a-x}$$

$$= Nbc^2\left[\frac{a}{x(a-x)} + \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}\right]$$

$$= Nbc^2\left[\frac{a+a-x+x}{x(a-x)}\right] = Nbc^2\frac{2a}{x(a-x)}$$

15. Da endlich die Kräfte Q, und Q′ nur bewirken, daß bey der geſenkten Lage des Balkens, die Theile AE, BF nicht ſteigen, ſondern unverrückt die wagrechte Lage behalten, ſo bleibt alles unverändert, wenn man dieſe beyden Kräfte wegnimmt, dafür aber AE, und BF in die Wand einläßt, und befeſtiget, folglich iſt

16. die geſuchte Kraft

$$P = 2N \frac{abc^2}{x(a-x)} \quad (14.)$$

welche aber, wenn ſie vermehrt würde, den Balken nicht nur in C (Nr. 5.), ſondern auch in A und B (Nr. 10.), mithin an drey Stellen zugleich zerbrechen würde.

I. Zuſaz. Für $x = \frac{1}{2}a$, das iſt, wenn C genau in die Mitte zwiſchen A und B fällt, wird

$$P = 2N \frac{abc^2}{\frac{1}{4}a^2} = 8N \frac{bc^2}{a}$$

II. Zuſaz. Wäre der Balken in A und B nur unterſtüzt, ſo würde für $AC = x$ die Laſt $P = N \frac{abc^2}{x(a-x)}$ und für $AC = \frac{1}{2}a$, $P = 4N \frac{bc^2}{a}$ (§. 41.) mithin jedesmal nur halb ſo groß, als wenn die beyden Ende des Balkens in die Mauer eingelaſſen ſind.

III. Zuſaz. Wird der Balken mit dem einem Ende AE in die Mauer eingelaſſen, auf der andern Seite aber nur in B unterſtüzet, ſo iſt $p' = 0$ (Nr. 8.) mithin

$$P = R + p = N \frac{abc^2}{x(a-x)} + N \frac{bc^2}{x} = Nbc^2 \left[\frac{a}{x(a-x)} + \frac{1}{x}\right]$$

$$= Nbc^2 \left(\frac{a + a - x}{x(a-x)}\right) = Nbc^2 \frac{2a - x}{x(a-x)}$$

Holzart	Beſchaffenheit des Holzes	Abmeſſungen in rheinl. Duodec. Zoll Länge a	Höhe c	Breite b	Senkung in rhnl. Duod. Z. u	Gewicht in Berl. ℔. Q	größtmögliche Senkung w	Gewicht in Berl. ℔. P	Dauer des ganzen Verſuches	$\frac{a^3Q}{bc^3u} = 48Ek^2$	Ek^2	$\frac{a^2}{cw} = \frac{12Ek^2}{N}$	N
Kiefer, Föhre Pinus sylvestris.	Splint	30	0,958	0,700	0,09	13	1,51	118	$28\frac{7}{12}$ St.	6336804	132016	022	2547
	Splint.	30	1,020	0,812	0,36	80	1,68	$109\frac{1}{2}$	11 Tage	6962973	145062	525	3310
	Mitte	48	1,028	1,146	1,28	128	3,51	226	$29\frac{5}{12}$ St.	8883000	185062	639	3475
	Kern	49	1,040	1,040	1,00	73	3,99	185	$37\frac{1}{2}$ Tag	7341385	152946	579	3170
	Mitte	50	1,229	1,222	0,59	73	3,70	283	$40\frac{5}{8}$ Tag	6817950	142041	550	3099
	Mitte	66	2,000	2,000	1,16	598	3,43	915	6 Tage	9263069	192981	635	3647
	Mitte	66	1,542	1,500	1,95	295	3,20	295	$19\frac{7}{12}$ St.	7907597	164742	(883)	—
	Mitte	66	1,600	1,600	0,76	112				6464814	134684		
	Mitte	66	2,040	1,958	1,54	681	2,82	850	$71\frac{1}{4}$ St.	7648127	159336	757	2526
	Splint	701	2,000	2,000	2,35	735	3,14	735	$\frac{3}{4}$ St.	6704920	139686	780	2149
	Kern	72	1,500	1,458	1,89	239	4,50	404	$42\frac{11}{16}$ St.	9591847	199830	768	3122
	Mitte	72	1,276	1,276	1,90	84				6224726	129682		
	Mitte	88	2,000	1,900	2,06	351	5,50	654	$4\frac{5}{8}$ St.	7639139	159149	704	2712
									Summe	97786351	2037217	6559	29757
									Arithmetiſche Mittelzahl	7522027	156709	656	2976
Rothtanne Pinus picea	Mitte	46	1,208	1,208	1,10	128	2,70	185	$30\frac{9}{21}$ St.	5318916	110811	649	2049
Weißtanne Pinus abies	Mitte	48	1,000	1,000	1,38	101	3,20	150	25 St.	8094050	168626	720	2810
	Mitte	48	1,500	1,480	1,04	348	2,21	486	$19\frac{5}{6}$ Tag	7408590	154346	695	2665
									Summe	15502640	322972	1415	5475
									Arithmetiſche Mittelzahl	7751320	161486	708	2737
Sommereiche Quercus faemina	Kern	48	1,18	0,89	0,60	85	3,70	370	79 Tage	10714088	223210	528	4848
	Splint	50	1,20	1,00	1,52	183	4,23	183	$8\frac{1}{4}$ St.	8709110	181440	492	4425
	Kern	66	1,50	1,50	1,66	295	4,58	454	$8\frac{1}{2}$ St.	10092075	210252	634	3979
	Mitte	66	1,542	1,50	1,78	295	5,00	562	4 Tage	8663416	180488	565	3834
	Splint	66	1,06	1,46	1,59	515	3,29	515	$20\frac{3}{4}$ St.	8470726	176473	676	3133
	Mitte	66	2,00	2,00	1,31	682	3,61	682	$25\frac{1}{2}$ St.	9354590	194887	603	3878
	Kern	66	2,08	1,46	1,12	570	3,11	785	66 St.	11136426	232009	673	4137
	Mitte	72	1,34	1,17	2,71	182				8904290	185506		
	Mitte	84	2,00	2,00	2,09	352	6,12	544	$49\frac{3}{4}$ St.	(6238990)	(129979)	576	([illegible])
									Summe	76044721	1584265	4747	28234
									Arithmet. Mittelzahl	9505590	198033	593	4033
Steineiche Quercus robur	Mitte	42	1,13	1,48	1,34	349	2,39	349	63 St.	9035904	188243	653	3459
	Mitte	56	1,50	1,50	0,83	240	4,12	516	$4\frac{5}{24}$ Tag	10030717	208973	507	4943
									Summe	19066621	397221	1160	8402
									Arithmet. Mittelzahl	9533310	198611	580	4201
Rothbuche Fagus sylvatica	Splint	32	0,82	1,00	1,15	164	2,50	210	4 Tage	8475282	176568	500	4238
	Mitte	34	0,80	1,00	0,98	128	3,00	202	$40\frac{5}{6}$ St.	10026527	208886	482	5200
									Summe	18501809	385454	982	9438
									Arithmet. Mittelzahl	9250904	192727	491	4719
Weißbuche Hornbaum Carpinus betulus	Mitte	42	1,00	1,07	1,32	156	3,09	212	$60\frac{1}{8}$ St.	8183042	170480	571	3583
	Mitte	46	1,03	1,06	2,24	183	3,02	183	$\frac{3}{8}$ St.	6865293	143027	680	2524
									Summe	15048335	313507	1251	6107
									Arithmet. Mittelzahl	7524167	156753	626	3053
Erle Betula alnus	Mitte	43	0,92	1,02	1,58	128	3,88	184	$50\frac{1}{3}$ St.	8109514	168948	518	3913
	Splint	43	0,95	1,00	2,00	156	3,28	156	21 St.	7233180	150691	593	3049
									Summe	15342694	319639	1111	6962
									Arithmet. Mittelzahl	7671347	159820	556	3481

In dieſem Falle wird alſo noch für $x = \frac{1}{2} a$

$$P = Nbc^2 \frac{2a - \frac{1}{2}a}{\frac{1}{4}a^2} = Nbc^2 \frac{4-1}{\frac{1}{2}a} = 6N \frac{bc^2}{a}$$

IV. Zuſaz. Wird der Balken (Fig. 20.) mit ſeinen beyden Enden AE, BF in eine Wand eingelaſſen, und über dieſes in der Mitte bey C unterſtüzt, ſo kann er an der Stelle G, welche genau in der Mitte zwiſchen A und C liegt, mithin in der Entfernung $AG = \frac{1}{4} a$, die Laſt $P = 8N \frac{bc^2}{\frac{1}{2}a}$ (I. Zuſ.), und eben ſo an H, das iſt, in der Entfernung $BH = \frac{1}{4} a$, die Laſt $Q = 8N \frac{bc^2}{\frac{1}{2}a}$ tragen; denn die Unterlage leiſtet in Beziehung auf den Punct C eben das, was an dieſer Stelle eine Wand leiſten würde, in welche der Balken bey C befeſtiget würde. Folglich trägt nun der Balken die Laſt $P + Q = 16N \frac{bc^2}{\frac{1}{2}a} = 32N \frac{bc^2}{a}$

V. Zuſaz. Vertheilte man die Laſt auf die ganze Länge des Balkens, welcher an ſeinen beyden Enden in eine Wand eingelaſſen, und in der Mitte unterſtüzt iſt, gleichförmig, ſo kann er noch einmal ſo viel tragen, folglich wird nun die ganze Laſt

$$2P + 2Q = 64N \frac{bc^2}{a}$$

§. 44.

Reſpective Feſtigkeit einiger Holzarten nach Hrn. Eytelweins Verſuchen.

Es wurden nur Hölzer aus einheimiſchen Forſten, welche vor 2 bis 3 Jahren gehauen, während dieſer Zeit

trocken aufbewahrt, ſonſt ohne Aeſte und ohne andern Tadel waren, ausgewählet, und balkenförmig ſo zugehauen, und mit dem Hobel ſo abgeglichen, daß alle Faſern ganz blieben. Die Beſchreibung der ganzen Vorrichtung, ſo wie die zahlreichen Verſuche mit allen den dabey beobachteten Umſtänden und Verhältniſſen muß man in Hrn. Eytelweins Statik Iitem Bande ſelbſt nachſchlagen, das was ohne zu große Weitläufigkeit ausgehoben werden konnte, enthalten die beyden am Ende angefügten Tabellen I und II.

I. Zuſaz. Die Dimenſionen der Balken ſind allemal in rheinländiſchen Duodecimalzoll, ſo wie die Gewichte in Berliner Pfund ausgedrückt, ferner bezeichnet Q ſowohl als P die ſämmtliche Laſt, das iſt, die Summe von der in der Mitte angebrachten Laſt, und dem halben Gewichte des Balkens (§. 42. XI. Zuſ.).

II. Zuſaz. Die fünf erſten Spalten in beyden Tabellen bedarfen keiner weitern Erläuterung.

III. Zuſaz. Die ſechste Spalte giebt für die Mitte des Balkens die Senkung u an, welche ihm ſogleich die auf die Mitte reducirte ganze in der 7ten Spalte angeführte Laſt Q ertheilte.

IV. Zuſaz. In der achten Spalte bezeichnet w die Senkung des Balkens, welche die auf die Mitte reducirte, und in der 9ten Spalte angeführte ganze Laſt P hervorbrachte, und wodurch der Balken ſogleich zerbrochen wurde. Jene Stücke, bey welchen die Angabe von w und P ausgelaſſen iſt, wurden gar nicht zerbrochen, ferner hatte bey dem Kiefernholze das 7te Stück einen Aſt, und bey der Sommereiche waren die Faſern des 9ten Stückes durchſchnitten, daher ſind die daraus gezogenen Reſultate in den folgenden Spalten

in Klammern eingeſchloſſen, und wurden bey Beſtimmung der arithmetiſchen Mittelzahlen nicht in Anſchlag gebracht.

V. Zuſaz. Die zehnte Spalte giebt die Dauer an, während welcher das Stück durch Anhängung verſchiedener ſtets größerer Gewichte beobachtet und unterſucht wurde, man fand, daß von eben derſelben Laſt der Balken um ſo mehr gebogen wird, je länger die Laſt auf den Balken wirkt, daß alſo die Elaſticität, wodurch der Balken der Biegung widerſteht, keine unveränderliche Größe, mithin dadurch die Beſtimmung der reſpectiven Feſtigkeit für eine längere Dauer ſehr ſchwer ſey.

VI. Zuſaz. Da $u = \frac{Q a^3}{48 E k^2 . b c^3}$ (§. 42. VII. Zuſ.), ſo iſt $48 E k^2 = \frac{Q . a^3}{b . 8\ u}$, wornach die Angaben in der 11ten und 12ten Spalte allemal berechnet ſind.

VII. Zuſaz. Ferner iſt $w = \frac{N a^2}{12 . E k^2 . c}$ (§. 42. XIII. Zuſ.) mithin $\frac{a^2}{c . w} = \frac{12 E k^2}{N}$. Dadurch ſind die Angaben in der 13ten Spalte beſtimmt.

VIII. Zuſaz. Sezet man die in der vorlezten Spalte gefundenen Angaben, nemlich $\frac{12 E k^2}{N} = n$, ſo wird $N = \frac{12 E k^2}{n} = \frac{48 E k^2}{4 n}$ woraus endlich die Angaben in der lezten Spalte beſtimmt ſind.

IX. Zuſaz. Will man für einen Balken, deſſen Dimenſionen a, b, c gegeben ſind, ſeine Biegung w

beſtimmen, bey welcher dann unmittelbar der Bruch erfolgt, ſo läßt ſich $w = \frac{N}{12 E k^2} \cdot \frac{a^2}{c}$ (§. 42. XIII. Zuſ.), da noch N und $E k^2$ aus den Tabellen bekannt iſt, angeben.

X. Zuſaz. Da $P = 4 N \frac{bc^2}{a}$ (§. 42. XI. Zuſ.) ſo läßt ſich für einen Balken, deſſen Gewicht und Dimenſionen gegeben ſind, wenn noch durch die Tabelle N beſtimmt iſt, die größte Laſt angeben, die er auf ſehr kurze Zeit tragen kann.

XI. Zuſaz. Für einen Balken von Kiefernholz iſt nun dieſe Totallaſt auf die Mitte reducirt $P = 2976. \frac{4 b c^2}{a}$; ſezet man daher die geſammte Laſt, die er in der Mitte ſicher und dauerhaft tragen kann, nemlich $U = \frac{1}{m} P$, ſo wird

$$m = \frac{P}{U} = 2976. \frac{4 b c^2}{a U}$$

XII. Zuſaz. Hr. Eytelwein nimmt nun aus vielfältigen Erfahrungen an, daß ein Balken von Kiefernholz, deſſen Länge $a = 15$ Fußl, Breite $b = 9$ Zoll, und Höhe $c = 12$ Zoll, ſicher die auf die Mitte reducirte Totallaſt (worunter alſo das halbe Gewicht des Balkens mitbegriffen iſt) von 2600 Berliner Pfund tragen könne, ſezt man dieſe Werthe in die Gleichung des vorhergehenden Zuſazes, ſo wird:

$$m = \frac{2976.\ 4.\ 9.\ 12^2}{15.\ 12.\ 2600} = \frac{53568}{1625} = 32 \text{ beynahe, ſo}$$

daß alſo

XIII. Zuſaz. die Laſt U, welche ein Körper auf lange Zeit mit Sicherheit tragen kann, nur $\frac{1}{32}$ der Laſt

iſt, die er anfänglich zu tragen im Stande iſt, mit-hin $U = \frac{1}{32} P = \frac{1}{8} N \frac{bc^2}{a}$ (X. Zuſ.).

XIV. Zuſatz. Da endlich

$$u = \frac{U}{48Ek^2} \cdot \frac{a^3}{bc^3} \text{ (VI. Zuſ.)} =$$

$$= \frac{N.\, bc^2}{8.\, 48\, Ek^2 a} \cdot \frac{a^3}{bc^3} = \frac{1}{32} \cdot \frac{N}{12Ek^2} \cdot \frac{a^2}{c},$$

ſo iſt dadurch die anfängliche Senkung beſtimmt, die der Balken ohne Gefahr für die Folge annehmen kann.

Anmerk. Andere Verſuche, die entweder, wie die Muſſchenbroekiſchen, zu ſehr im Kleinen, oder, wie die Büffon'ſchen, nicht mit der gehörigen Sorgfalt angeſtellt ſind, geben keine brauchbaren Reſultate.

III.

Von der reſpectiven Feſtigkeit bloß dehnbarer Körper.

§. 45.

Aufgabe. (Fig. 7.)

Ein ſenkrechtes Prisma wird mit dem einem Ende in die Wand LM ſo befeſtiget, daß deſſen Seiten, mithin die Faſern auf der Brechungsebene AD ſenkrecht ſtehen, man ſucht die reſpective Feſtigkeit deſſelben.

Aufloͤſung.

Gegenwärtig verhält ſich alles wie §. 38. IV. Zuſ., behält man alſo die allda angenommenen Bezeichnungen, ſo iſt

$$aQ = \int \left[\frac{q}{3e} z^3\, dx + A\right]$$

I. Zuſaz. Wenn die Brechungsebene ein Rechteck ABCD (Fig. 10), alſo das Prisma ein rechtwinklichtes Parallelepipedum iſt, ferner AB = b die Breite oder Umdrehungsaxe, und AC = c die Höhe bezeichnen, ſo iſt für AP = x, PO = z das Moment des Widerſtandes für das Element $Po = \frac{q}{3c} z^3 dx + A$, wo die Const. = o, mithin für z = PN = c, wird

$$\int (\frac{q}{3c} c^3 dx) = \tfrac{1}{3} q c^2 x,$$ folglich für x = b,

$$aQ = \tfrac{1}{3} q b c^2$$

II. Zuſaz. Wenn die Brechungsebene ein Quadrat, mithin b = c iſt, ſo wird $aQ = \frac{1}{3} q b^3 = \frac{1}{3} q c^3$

III. Zuſaz. Bey einem dreyſeitigen ſenkrechten Prisma, wo das rechtwinklichte Dreyeck ABD die Brechungsebene, und zwar AB = b die Breite zugleich die Umdrehungsaxe, und der andere Cathet BD = c die Höhe iſt, wird ebenfalls das Moment des Elementes $Po = \frac{q}{3c} z^3 dx + A$, wo aber wieder für z = o alles verſchwindet, mithin A = o iſt.

Ferner iſt AP : PM = AB : BD, das iſt, für PM = y, wird x : y = b : c, mithin $y = \frac{c}{b} x$, ſezet man nun z = y, ſo erhält man das Moment des Elementes

$$Pm = \frac{q}{3c} y^3 dx = \frac{q}{3c} \cdot \frac{c^3}{b^3} x^3 dx = \tfrac{1}{3} q \cdot \frac{c^2 x^3}{b^3} dx;$$

daher das Moment des Widerſtandes der Fläche $APM = \int \frac{1}{3} q \cdot \frac{c^2}{b^3} x^3 dx = \frac{1}{12} q \cdot \frac{c^2 x^4}{b^3}$, wo keine

Conſt. addirt werden darf. Endlich für $x = b$, wird

$$aQ = \frac{1}{12} q \cdot \frac{c^2 b^4}{b^3} = \frac{1}{12} q. b. c^2$$

IV. Zuſaz. Wird hingegen das dreyſeitige Prisma ſo unterſtüzet, daß in der Brechungsebene oder dem Dreyecke ACD der eine Cathet $AC = c$ auf der Umdrehungsaxe ſenkrecht ſteht, der andere Cathet $CD = b$ zur Umdrehungsaxe parallel iſt, ſo wird

$$aQ = \frac{1}{3} q b c^2 - \frac{1}{12} q b c^2 \text{ (I u. III. Zuſ.)}$$

$$= \frac{3}{12} q b c^2 = \frac{1}{4} q b c^2.$$

§. 46.

Aufgabe. (Fig. 12.)

Ein ſenkrechter halber Cylinder iſt mit dem einem Ende in die Wand ſo befeſtiget, daß deſſen Grundfläche oder Brechungsebene der Halbkreis HFGH, ferner die Umdrehungsaxe die wagrechte Tangens HB iſt, man ſucht die reſpective Feſtigkeit, wenn a die Länge des Cylinders, und r den Halbmeſſer der Grundfläche bezeichnen.

Auflöſung.

1. Man ziehe die beliebigen rechtwinklichten Coordinaten $HP = x$, $PM = y$, $PO = z$, und die Radien IM, IL, dann IF zu HB parallel, ſo iſt $NL = NM = \sqrt{(r^2 - x^2)}$

2. das Moment des Widerſtandes für das Element $Lo = \frac{q}{6r} z^3 dx + A$ (§. 45.) indem gegenwärtig die Entfernung des höchſten Punctes G von der Axe HB, oder $c = 2r$ iſt.

3. Nun iſt für $z = PL = PN - NL = r - \sqrt{(r^2 - x^2)}$ dieſes Moment $= 0$, mithin

4. $0 = \frac{q}{6r} (r - \sqrt{r^2 - x^2})^3 \, dx + A$, folglich

$A = - \frac{q}{6r} (r - \sqrt{r^2 - x^2})^3 \, dx$, alſo

5. obiges Moment $= \frac{q}{6r} dx [z^3 - (r - \sqrt{r^2 - x^2})^3]$

6. Für $z = PM = y = r + \sqrt{(r^2 - x^2)}$ wird daher das Moment des Elementes L m

$= \frac{q}{6r} dx [(r + \sqrt{r^2 x^2})^3 - (r - \sqrt{r^2 x^2})^3]$

7. Nun iſt $(r + \sqrt{r^2 - x^2})^3$
$= r^3 + 3r^2 \sqrt{r^2 - x^2} + 3r(r^2 - x^2) + (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$
$(r - \sqrt{r^2 - x^2})^3 = r^3 - 3r^2 \sqrt{(r^2 - x^2)}$
$+ 3r(r^2 - x^2) - (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

mithin

8. $(r + \sqrt{r^2 - x^2})^3 - (r - \sqrt{r^2 - x^2})^3$
$= 6r^2 \sqrt{(r^2 - x^2)} + 2(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$
$= 6r^2 \sqrt{(r^2 - x^2)} + 2(r^2 - x^2 \sqrt{(r^2 - x^2)}$
$= (6r^2 + 2r^2 - 2x^2) \sqrt{(r^2 - x^2)}$
$= 2(4r^2 - x^2) \sqrt{(r^2 - x^2)}$.

9. Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 6: ſo iſt für L m das Moment des Widerſtandes

$= \frac{q}{6r} dx. \, 2(4r^2 - x^2) \sqrt{(r^2 - x^2)}$

$= \frac{q}{3r} (4r^2 - x^2) dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$, folglich

10. Das Moment für die Brechungsebene HLMG

$$= \frac{q}{3r} \int (4r^2 - x^2)\, dx \sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{q}{3r}$$
$$\left[4r^2 \int dx \sqrt{(r^2 - x^2)} - \int x^2\, dx \sqrt{(r^2 - x^2)} \right]$$

11. Nun iſt

$$\int dx \sqrt{(r^2 - x^2)} = \tfrac{1}{2} r^2 \text{ arc. sin } \frac{x}{r} + \tfrac{1}{2} x \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

(höhere Geom. §. 252. Tab. VI. Nr. 26.)

12. Ferner findet man aus dieſem Integrale nach Arithmet. §. 346.

$$\int x^2 dx \sqrt{(r^2 - x^2)} = -\tfrac{1}{4} x (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{r^2}{4} \int dx\, (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\tfrac{1}{4} x (r^2 - x^2) \sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{r^2}{4} \cdot \tfrac{1}{2} r^2 \text{ arc. sin } \frac{x}{r}$$
$$+ \frac{r^2}{4} \cdot \tfrac{1}{2} x \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

$$= \left[\frac{r^2 x}{8} - \frac{r^2 x}{4} + \frac{x^3}{4} \right] \sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{r^4}{8} \text{ arc sin } \frac{x}{r}$$

$$= \frac{2x^3 - r^2 x}{8} \sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{r^4}{8} \text{ arc. sin } \frac{x}{r}$$

13. Sezet man dieſe Werthe in die Gleichung Nr. 10. ſo wird

14. das Moment des Widerſtandes für die Brechungsebene HLMG, oder

$$\frac{q}{3r} \int (4r^2 - x^2)\, dx \sqrt{r^2 - x^2}) = \frac{q}{3r} \left[4r^2 \cdot \tfrac{1}{2} r^2 \text{ arc sin } \frac{r}{x} \right.$$
$$+ 4r^2 \cdot \tfrac{1}{2} x \sqrt{(r^2 - x^2)} - \frac{2x^3 - r^2 x}{8} \sqrt{(r^2 - x^2)} - \frac{r^4}{8} \text{ arc.}$$
$$\left. \text{sin } \frac{x}{r} \right] =$$

$$= \frac{q}{3r} \left[\frac{15 r^4}{8} \text{ arc. sin } \frac{x}{r} + \frac{17 r^2 x - 2x^3}{8} \sqrt{(r^2 - x_2)} \right]$$

wo für $x = 0$ alles verſchwindet, ſo, daß alſo keine Const. addirt werden darf.

15. Für $x = HB = r$, wird endlich für den halben Cylinder, wenn an dem andern Ende die Kraft Q der reſpectiven Feſtigkeit das Gleichgewicht halten ſoll,

$$aQ = \frac{q}{3r}\left[\frac{15r^4}{8}\text{ arc. sin. }1\right] = \frac{q}{3r}\cdot\frac{15r^4}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi$$

$$= \frac{5}{16}\pi q r^3 = 0,9817477 \cdot qr^3$$

I. Zuſaz. Für einen ganzen Cylinder von eben dieſer Länge a, deſſen Brechungsebene der ganze Kreis HFGE, und deſſen Umdrehungsaxe der Brechungsebene die Tangens AB iſt, wird daher

$$aQ = \frac{5}{8}\pi q r^3 = 1,9634954\, qr^3$$

II. Zuſaz. Für ein ſenkrechtes Prisma von eben dieſer Länge, deſſen Brechungsebene das um den Kreis beſchriebene Quadrat ABDC, und deſſen Umdrehungsaxe die Seite $AB = 2r$ iſt, wird

$aQ' = \frac{1}{3}q \cdot 8r^3$ (§. 45. II Zuſ.) $= \frac{8}{3}qr^3 = 2,6666666 \ldots qr^3$

folglich $Q : Q' = 1,9634954 : 2,6666666$

$= 1 : 1,35812.$

III. Zuſaz. Für ein Prisma, deſſen Brechungsebene der Quadrant HFIH, und die Umdrehungsaxe die Tagens HB iſt, wird $c = r$, ferner wird Nr. 3. und 4,

$- A = -\frac{q}{3r}(r - \sqrt{r^2 - x^2})^3 dx$, mithin das Moment

des Elementes $Lo = \frac{q}{3r}dx\left[z^3 - (r - \sqrt{r^2 - x^2})^3\right]$,

alſo für $z = PN = r$ iſt das Moment des Elementes Ln

$$= \frac{q}{3r}dx\left[r^3 - (r^3 - 3r^2\sqrt{(r^2-x^2)} + 3r(r^2-x^2) - (r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{q}{3r}dx\left[-3r(r^2-x^2) + (r^2-x^2+3r^2)\sqrt{(r^2-x^2)}\right]$$

$$= \frac{q}{3r}dx\left[-3r(r^2-x^2) + (4r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}\right]$$

mithin das Moment der Brechungsebene HLNI $=$

$$= \frac{q}{3r}\left[-3r\int(r^2-x^2)dx + \int(4r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}dx\right]$$

Nun iſt $\int(r^2-x^2)\,dx = r^2x - \frac{1}{3}x^3$, und

$\int(4r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}\,dx = \frac{15r^4}{8}$ arc. sin $\frac{x}{r}$ $+$ $\frac{17r^2x-2x^3}{8}\sqrt{(r^2-x^2)}$ (Nr. 14), mithin das Moment für HLNI $= \frac{q}{3r}\left[-3r^3x + rx^3 + \frac{15r^4}{8}\text{ arc. sin. }\frac{x}{r} + \right.$

$$\left.\frac{17r^2x-2x^3}{8}\sqrt{(r^2-x^2)}\right]$$

wo wieder keine Const. addirt werden darf.

Für $x = HB = r$, wird endlich

$$aQ = \frac{q}{3r}\left[-3r^4 + r^4 + \frac{15r^4}{8}\text{ arc. sin } 1.\right]$$

$$= \frac{q}{3r}\left(\frac{15r^4}{8}\,\frac{1}{2}\pi - 2r^4\right) = \frac{qr^3}{3}\left(\frac{15\pi-32}{16}\right)$$

IV. Zuſaz. Für einen halben Cylinder, deſſen Brechungsebene der Halbkreis EHFE, und die Tangens AB die Umdrehungsaxe iſt, wird alſo

$$aQ = \frac{qr^3}{3}\left[\frac{15\pi-32}{8}\right] = 0{,}63016207.\ qr^3$$

V. Zuſaz. Für ein ſenkrechtes Prisma, deſſen Grundfläche der Quadrant CBD (Fig. 11), und der Halbmeſſer CB die Umdrehungsaxe der Brechungsebene iſt, wird wieder Nr. 2., $c = r$, mithin das Moment des Widerſtandes für das Element Po $= \frac{q}{3r}z^3\,dx$, wo keine Const. addirt werden darf; für $z = PM = \sqrt{(r^2-x^2)}$ wird das Moment von Pm $= \frac{q}{3r}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$, folglich

$$\int \frac{q}{3r}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{q}{3r}\int\left[(r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}\,dx\right]$$

$$= \frac{q}{3r}\left[r^2\int dx\sqrt{(r^2-x^2)} - \int x^2dx\sqrt{(r^2-x^2)}\right]$$

$$= \frac{q}{3r}\Big[r^2\,\tfrac{1}{2}r^2\,\text{arc. sin}\,\frac{x}{r} + \frac{r^2}{2}x\sqrt{(r^2-x^2)} -$$

$$- \frac{2x^3-r^2x}{8}\sqrt{(r^2-x^2)} - \frac{r^4}{8}\,\text{arc. sin}\,\frac{x}{r}\Big]$$

(Nr. 11 und 12.) $= \frac{q}{3r}\Big[\frac{3}{8}r^4\,\text{arc. sin}\,\frac{x}{r} + \frac{5r^2x-2x^3}{8}$ $\sqrt{(r^2-x^2)}\Big]$ wo keine Const. addirt werden darf.

Für $x = CB = r$, wird alſo

$$aQ = \frac{q}{3r}\left[\frac{3}{8}r^4.\tfrac{1}{2}\pi\right] = \frac{1}{16}\pi q r^3$$

VI. Zuſaz. Für den halben Cylinder, wenn der Diameter AB die Umdrehungsaxe der Brechungsebene ADB iſt, wird daher $aQ = \frac{1}{8}\pi q r^3 = 0{,}39269904$.

VII. Zuſaz. Für einen halben Cylinder, wenn A, B, C deſſen reſpective Feſtigkeiten bezeichnen, je nachdem er in der Lage der Aufgabe, oder in der Lage nach IV. Zuſ. oder nach der im VI. Zuſaz beſtimmten Lage befeſtiget iſt, wo nemlich im erſten Falle Fig. 12. der Diameter GH der Brechungsebene HFG auf der Umdrehungsaxe HB ſenkrecht, im zweyten Falle der Diameter EF der Brechungsebene zur Umdrehungsaxe AB parallel, im dritten Falle aber (Fig. 11.) der Diameter AB mit der Umdrehungsaxe zuſammenfällt, ſo iſt

A : B : C = 0,98174770 : 0,63016207 : 0,39269904

§. 47.

Aufgabe. (Fig. 13.)

Eine cylindriſche Röhre iſt mit dem einem Ende in eine Wand ſenkrecht befeſtiget, daß a die Länge des hervorragenden Theiles iſt, man ſucht ihre reſpective Feſtigkeit, wenn R den Halbmeſſer des größern, r jenen des kleinern Kreiſes, und e die Entfernung des innern Kreiſes von der Umdrehungsaxe AB bezeichnen, ferner leztere die Tangens vom größern Kreiſe iſt.

Auflöſung.

1. Für den ganzen maſſiven Cylinder, deſſen Brechungsebene alſo der größere Kreis ASGA, und die Umdrehungsaxe die Tangens AB, iſt die reſpective Feſtigkeit $a Q' = \frac{5}{8} \pi q R^3$ (§. 46. I. Zuſ.)

2. Um nun die reſpective Feſtigkeit des innern kleinen Cylinders, welche abgezogen werden muß, zu beſtimmen, ziehe man zu AB den parallelen Diameter CD, ferner die ſenkrechten Linien CA, TEF, DB, und durch H die Tangens IS, welche ebenfalls zu AB parallel iſt,

3. endlich noch die rechtwinklichten Coordinaten $FP = x$, $PO = z$, $PM = y$, ſo iſt

4. $KE = LH = PF = x$, und $HF = e$, $KM = KN = \sqrt{(r^2 - x^2)}$, und da ferner der höchſte Punct G des ganzen Cylinders von der Umdrehungsaxe um $c = 2R$ entfernt liegt, ſo iſt

5. das Moment des Widerſtandes für das Element $No = \frac{q}{6R} z^3 dx + A$ (§. 45.).

6. Für $z = PN = PK - KN = FE - KN = r + e - \sqrt{(r^2 - x^2)}$ wird dieſes Moment $= 0$, mithin

7. $0 = \frac{q}{6R} dx (r + e - \sqrt{r^2 - x^2})^3 + A$, alſo

$$A = - \frac{q}{6R} dx (r + e - \sqrt{r^2 - x^2})^3$$

Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 5; ſo wird

8. obiges Moment für No

$$= \frac{q}{6R} dx \left[z^3 - (r + e - \sqrt{r^2 - x^2})^3 \right].$$

9. Für $z = y = PK + KM = e + r + \sqrt{(r^2 - x^2)}$ erhält man das Moment für das Element Nm

$$= \frac{q}{6R} dx \left[(e + r + \sqrt{r^2 - x^2})^3 - (e + r - \sqrt{r^2 - x^2})^3 \right]$$

10. Nun iſt

$$(e + r + \sqrt{r^2 - x^2})^3 = (e + r)^3 + 3(e + r)^2 \sqrt{(r^2 - x^2)} + 3(e + r)(r^2 - x^2) + (r^2 - x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)}$$

$$(e + r - \sqrt{r^2 - x^2})^3 = (e + r)^3 - 3(e + r)^2 \sqrt{(r^2 - x^2)} + 3(e + r)(r^2 - x^2) - (r^2 - x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)}$$

mithin

11. $(e + r + \sqrt{r^2 - x^2})^3 - (e + r - \sqrt{r^2 - x^2})^3$
$= 6(e + r)^2 \sqrt{(r^2 - x^2)} + 2(r^2 - x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)}$
$= (6e^2 + 12er + 8r^2)\sqrt{(r^2 - x^2)} - 2x^2 \sqrt{(r^2 - x^2)}$

12. Sezet man dieſe Werthe in die Gleichung Nr. 9., ſo wird das Moment für das Element Nm

$$= \frac{q}{6R} \left[(6e^2 + 12er + 8r^2) dx \sqrt{(r^2 - x^2)} - 2x^2 dx \sqrt{(r^2 - x^2)} \right]$$

$$= \frac{q}{6R} \left[(3e^2 + 6er + 4r^2) dx \sqrt{(r^2 - x^2)} - x^2 dx \sqrt{(r^2 - x^2)} \right]$$

13.

13. Folglich das Moment des Widerſtandes für HNMT

$$= \frac{q}{3R}\Big[(3e^2 + 6er + 4r^2) \int dx \sqrt{(r^2 - x^2)} - \int x^2 dx \sqrt{(r^2 - x^2)}\Big]$$

14. Nun iſt $\int dx \sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{1}{2} r^2 \text{ arc. sin } \frac{x}{r} + \frac{1}{2} x \sqrt{(r^2 - x^2)}$, und

$$\int x^2 dx \sqrt{(r^2 x^2)} = \frac{2x^3 - r^2 x}{8} \sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{1}{8} r^4 \text{ arc. sin. } \frac{x}{r}$$ (§. 46. Nr. 11 und 12.).

15. Sezet man dieſe Werthe in die Gleichung Nr. 13. ſo iſt

16. das Moment für HNMT

$$= \frac{q}{3R}\Big[(3e^2 + 6er + 4r^2)\Big(\frac{1}{2} r^2 \text{ arc.sin. } \frac{x}{r} + \frac{1}{2} x \sqrt{(r^2 - x^2)}\Big] - \frac{2x^3 - r^2 x)}{8} \sqrt{(r^2 - x^2)} - \frac{1}{8} r^4 \text{ arc. sin. } \frac{x}{r}\Big]$$

Da nun für $x = 0$ alles verſchwindet, ſo darf keine beſtändige Größe addirt werden.

17. Für $x = FA = r$, wird nun das Moment des halben innern Cylinders

$$= \frac{q}{3R}\Big[(3e^2 + 6er + 4r^2) . \frac{1}{2} r^2 . \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8} r^4 . \frac{1}{2}\pi\Big]$$

$$= \frac{\pi q r^2}{12R} (3e^2 + 6er + 4r^2 - \frac{1}{4} r^2)$$

$$= \frac{\pi q r^2}{48R} (12e^2 + 24er + 15r^2) = \frac{\pi q r^2}{16R} (4e^2 + 8er + 5r^2)$$

18. Für den ganzen innern Cylinder iſt daher

$$2Q'' = \frac{\pi q r^2}{8R} (4e^2 + 8er + 5r^2)$$, folglich

19. Für die ganze cylindriſche Röhre wird nach Nr. 1 und 2

$$20.\ aQ = aQ' - aQ'' = \frac{5\pi q R^2}{8} - \frac{\pi q r^2}{8R}(4c^2 + 8cr + 5r^2)$$

$$= \frac{5\pi q R^4}{8R} - \frac{\pi q r^2}{8R}(4c^2 + 8cr + 5r^2)$$

I. Zuſaz. Die reſpective Feſtigkeit einer cylindriſchen Röhre bey eben derſelben Länge, und Halbmeſſern ſteht alſo im umgekehrten Verhältniſſe mit der Entfernung c des innern hohlen Cylinders von der Umdrehungsaxe, und iſt mithin für $c = 2R - 2r$ am kleinſten, und für $c = o$ am gröſten, im leztern Falle wird

$$aQ = \frac{5\pi q R^4}{8R} - \frac{\pi q r^2}{8R} 5r^2 = \frac{5\pi q}{8R}(R^4 - r^4)$$

$$= \frac{5\pi q}{8R}(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$$

II. Zuſaz. Sind die beyden Kreiſe concentriſch, ſo iſt $c = R - r$, mithin

$$aQ = \frac{5\pi q R^4}{8R} - \frac{\pi q r^2}{8R}\left[4(R-r)^2 + 8(R-r)r + 5r^2\right]$$

$$= \frac{5\pi q R^4}{8R} - \frac{\pi q r^2}{8R}(4R^2 - 8Rr + 4r^2 + 8Rr - 8r^2 + 5r^2)$$

$$= \frac{5\pi q R^4}{8R} - \frac{\pi q r^2}{8R}(4R^2 + r^2)$$

$$= \frac{\pi q}{8R}(5R^4 - 4R^2 r^2 - r^4)$$

$$= \frac{\pi q}{8R}(R^2 - r^2)(5R^2 + r^2)$$

III. Zuſaz. Eines maſſiven Cylinders von eben der Länge a, und eben ſo viel Maſſe, als die cylin-

driſche Röhre enthält, körperlicher Inhalt iſt $\varrho^2 \pi a = (R^2 - r^2) \pi a$, mithin deſſen Halbmeſſer $\varrho = \sqrt{(R^2 - r^2)}$, folglich iſt deſſen reſpective Feſtigkeit

$$a\Omega = \frac{5}{8} \pi q (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \text{ (§. 46. I. Zuſ.)}$$

$$= \frac{5}{8} \pi q (R^2 - r^2) \sqrt{(R^2 - r^2)}$$

$$= \frac{5 \pi q}{8 R} (R^2 - r^2) R \sqrt{(R^2 - r^2)}$$

$$= \frac{\pi q}{8 R} (R^2 - r^2)\, 5R \sqrt{(R^2 - r^2)}$$

Nun iſt offenbar $R \sqrt{(R^2 - r^2)} < R^2 + r^2$, folglich die reſpective Feſtigkeit kleiner als der cylindriſchen Röhre (I. Zuſ.). Eben ſo, da $5 R \sqrt{(R^2 - r^2)} < 5 R^2 + r^2$, ſo iſt die reſpective Feſtigkeit des gegenwärtigen maſſiven Cylinders kleiner als der Röhre im II. Zuſaz.

§. 48.

Aufgabe.

Für einen rechtwinklichten Balken ſind ſeine Länge A, Breite B, Höhe C, und deſſen reſpective Feſtigkeit Q′ gegeben, man ſucht für die Dimenſionen a, b, c eines andern rechtwinklichten Balkens von eben demſelben Material deſſen reſpective Feſtigkeit Q.

Auflöſung.

1. $Q' = \frac{1}{3} q. \frac{B C^2}{A}$, und $Q = \frac{1}{3} q. \frac{b c^2}{a}$ (§. 45. I. Zuſ.), mithin

2. $Q : Q' = \frac{b c^2}{a} : \frac{B C^2}{A}$, folglich

3. $Q = \frac{Q'. A}{B. C^2} \cdot \frac{b c^2}{a}$

I. Zuſaz. Sezet man alſo wie §. 39. VIII. Zuſaz die bekannte Größe $\frac{Q'. A}{B. C^2} = N$, ſo wird ebenfalls $Q = N. \frac{bc^2}{a}$.

II. Zuſaz. Da ſich überhaupt alle Säze von Körpern, die ausdehnbar, und zugleich zuſammendrückbar ſind, auf bloß dehnbare Körper anwenden laſſen, wenn man nur §. 38. in der Grundformel $e = c$, mithin $k = 1$ ſezet, ſo gelten für rechtwinklichte Balken aus bloß dehnbarem Materiale alle §. 39 — 43 angeführten Säze.

II. Abſchnitt.

Von der Feſtigkeit einer Säule.

---

§. 49.

Erklärungen.

a. Ein ſenkrechtes Prisma (Fig. 8.), welches mit der einen Grundfläche auf dem wagrechten Boden L M ruhet, und auf deſſen entgegenſtehende Grundfläche eine Laſt Q vertical drückt, heißt eine Säule oder ein Pfeiler;

b. Ruhet das ſenkrechte Prisma mit dem einem Ende (Fig. 15.) auf einer Ebene L M in ſchiefer Richtung, und drückt eine Laſt ſolches gegen dieſe Ebne, ſo nennet man dieſes Prisma, in wie ferne es ſich gegen die Laſt ſtemmt, eine Strebe.

§. 50.

Erfahrungen.

a. Wenn die Laſt Q, welche auf die Grundfläche eines Pfeilers oder Strebe drückt, größer als der

Zuſammenhang der Theile iſt, ſo wird bey ſprödem Material der Pfeiler zerdrückt,

b. weiche Körper werden erſt platt gedrückt, und am Ende zerquetſcht,

c. hölzerne Pfeiler werden anfänglich gebogen, mithin die Faſern auf der einen Seite zuſammengedrückt, dagegen die auf der entgegenſtehenden Seite liegenden Faſern ausgedehnt, und bey Zunahme der Krümmung immer mehr geſpannt, bis ſie endlich zerberſten.

I. Zuſaz. Bey dem Mangel an Verſuchen, und bey der geringen Erkenntniß von den innern Beſchaffenheiten der Körper, läßt ſich noch über das zerdrücken, und zerquetſchen der Körper nichts befriedigendes angeben.

II. Zuſaz. Eben ſo wenig iſt man im Stande, bey dem ſenkrechten Druck der Laſt die anfängliche Krümmung zu erklären, aber wenn einmal eine kleine Krümmung erfolgt iſt, mithin die Laſt ein Moment erhält, ſo läßt ſich alles übrige hinlänglich entwickeln.

III. Zuſaz. Wenn der Pfeiler AH (Fig. 21.) gegen die Seite AK zu gekrümmt wird, ſo, daß alſo AK eine hohle, und die entgegenſtehende Seitenfläche EH eine erhabene Fläche bildet, hingegen die Seitenflächen AI, GH in den verticalen Ebenen bleiben, ſo kann man der Kürze wegen von den Grundflächen die Seite AG = EF die Breite, und AE = FG die Dicke des Pfeilers nennen.

§. 51.

Aufgabe. (Fig. 21.)

Der ſenkrechte Pfeiler AH ſteht auf dem wagrechten Boden LM, und bekömmt durch eine auf der obern Fläche AF vertical drückende Laſt Q eine kleine Krümmung, ferner ſind die Dimenſionen des Balken, nemlich die Länge ACB = a, Breite AG = b, und Dicke AL = c gegeben, man ſucht das Verhältniß obiger Laſt.

Aufloͤſung.

1. Man ziehe die verticale Linie ADB, ſo kann man wegen der geringen Krümmung ADB = ACB = a ſetzen;

2. Legt man durch den beliebigen Punct D eine wagrechte Ebene, ſo kann man ebenfalls AD = x = AC ſezen, ferner iſt für dieſen Querſchnitt CD = y die Ordinate der Krümmung, und Qy das Moment, womit die Laſt die zunächſt bey OC liegenden Faſern im Querſchnitte zuſammendrückt, und die entfernteſten bey NR ausdehnt.

3. Es verhält ſich alſo alles wie §. 39., mithin wird nach dem III. Zuſaze eben dieſes §. für den Querſchnitt CONR,

4. $Qy = \frac{p'k^2}{3\alpha' r} bc^3$

I. Zuſaz. $\frac{p'k^2}{3\alpha'}$ bleibt bey einerley Material nicht nur für jeden Querſchnitt, ſondern für jeden Balken einerley, hängt daher von der Beſchaffenheit des Materials ab, ſezet man alſo wie §. 39. V. Zuſaz.

$\frac{p'k^2}{3\alpha'} = Ek^2$, ſo wird $Qy = \frac{Ek^2}{r} bc^3$,

das iſt, es verhält ſich wieder alles wie bey elaſtiſchen

Linien (Reine Mechan. §. 245. Nr. 5.), nur muß man jedesmals Ek^2 mit bc^3 multipliciren.

II. Zuſaz. Die Laſt, welche daher den ſenkrechten Balken zu biegen anfängt, iſt $Q = \frac{\pi^2 . Ek^2}{a^2} bc^3$ (Reine Mechan. §. 245. I. Zuſ.).

III. Zuſaz. Für $x = \frac{1}{2}a$, das iſt, in der Mitte iſt die Krümmung der Säule am größten, oder y ein maximum (Reine Mechanik §. 246. I. Zuſ.), folglich iſt der Querſchnitt ONRC für $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ zugleich die Brechungsebene, weil für ſie das Moment der Laſt am größten iſt.

§. 52.

Lehrſaz.

Die Laſt Q, welche einen Pfeiler zu biegen anfängt, zerbricht ſolchen in der Folge.

Beweis.

1. Die Laſt Q ertheilet bey dem Biegen dem Balken eine Bewegung, ferner iſt

2. $Q = \frac{\pi^2 . Ek^2}{a^2} bc^3$ (§. 51. II. Zuſ.) eine beſtändige Größe, mithin hält das mit der Krümmung zunehmende Moment der Laſt jedesmal mit dem ebenfalls wachſenden Widerſtande des Balken das Gleichgewicht, folglich

3. wird die anfängliche Bewegung nicht aufgehoben, die Biegung nimmt ſo lange zu, bis endlich

4. in ſeiner Mitte, wo die Fibern am meiſten geſpannt ſind (§. 51. III. Zuſ.) der Balken zerbricht.

I. Zuſaz. Kennet man durch mehrere Verſuche für ein beſtimmtes Material die Laſt, welche ein Pfeiler von gegebenen Dimenſionen zu tragen im Stande iſt, ſo iſt dadurch $\pi^2 . Ek^2 = \frac{a^2 Q}{b c^2}$ beſtimmt.

II. Zuſaz. Umgekehrt, wenn durch Verſuche die beſtändige Größe $\pi^2 . EK^2$ für ein Material beſtimmt iſt, ſo läßt ſich aus den gegebenen Dimenſionen des Pfeilers die Laſt Q angeben, welche denſelben zu biegen, und am Ende zu zerbrechen im Stande iſt.

III. Zuſaz. Will man die Laſt U beſtimmen, welche ein Pfeiler auf lange Zeit mit Sicherheit tragen kann, ſo darf man wie §. 44. XII und XIII. Zuſaz, nur $\frac{1}{32} \pi^2 . Ek^2$ nehmen, mithin wird $U = \frac{1}{32} Q$.

IV. Zuſaz. Aus den beyden Tabellen §. 44. erhält man für $\pi^2 Ek^2$ nachſtehende mittlere Werthe, nemlich bey Kiefernholz iſt $\pi^2 Ek^2 = 1552642$

Rothtannenholz	$\pi^2 Ek^2$	= 1093661
Weißtannenholz	ſ ſ	= 1593803
Sommereichenholz	ſ ſ	= 1954508
Steineichenholz	ſ ſ	= 1960212
Rothbuchenholz	ſ ſ	= 1902140
Weißbuchenholz	ſ ſ	= 1547090
Erlenholz	ſ ſ	= 1577360

§. 53.

Beſtimmung von $\pi^2 . E k^2$ nach Muſſchenbroek's Verſuchen.

Holzart.	Dimenſionen des Pfeilers in Rhein. Zoll. Länge a	Breite b	Dicke c	Laſt Q, welche den Pfeiler zerbricht in Amſtd. ℔	in Berlin. ℔	$\pi^2 E k^2 = \frac{a^2 Q}{b c^3}$
Kiefern= oder Föhrenholz	12	0,42	0,25	79	83,32	1827858
	10	0,42	0,25	83	87,539	1333923
	12	0,34	0,34	136	143,437	1545038
					Summe	4707419
					Arithmetiſche Mittelzahl	1569139
Roth= Tannenholz	48	0,51	0,51	64 $\frac{9}{16}$	68,093	2319170
	48	0,7	0,7	226	238,36	2287282
					Summe	4606452
					Arithmetiſche Mittelzahl	2303226
Eichenholz	48	0,5	0,42	20	2109366	1042117
	48	0,6	0,6	36	37,9686	674997
	48	0,7	0,7	86	90,703	870384
	18	0,23	0,23	23	24,2577	2808560
	8	0,23	0,23	92	97,030	2219109
	8	0,23	0,23	118	124,452	2846249
	12	0,35	0,35	185	195,112	1872338
					Summe	12333754
					Arithmetiſche Mittelzahl	1761965
Roth= Buchenholz	48	0,49	0,49	41	43,242	1728240
	48	0,6	0,6	71	74,8826	1331244
	48	0,7	0,7	146	153,084	1477629
					Summe	4537113
					Arithmetiſche Mittelzahl	1512371

I. Zuſatz.

I. Zuſaz. Die Vorrichtungen, ſo wie die Verſuche ſelbſt beſchreibt Muſſchenbroek zum Theil in ſeiner Introduct. ad phil. nat. I. Tom., zum Theil in deſſen Introd. ad cohaerentiam corporum firmorum. Die Dimenſionen der ſenkrechten Parallelepipeden ſind in Rheinländiſchen Duodec. Zollen, und die Laſt Q, welche dieſe kleinen Pfeiler zuſammendrückte, in Amſterdamer Pfunden angegeben; leztere wurden auf Berliner Pfund reducirt, und daraus nach der in der lezten Spalte angegebenen Formel $\pi^2 E k^2$ berechnet.

II. Zuſaz. Da die Dimenſionen der bey dieſen Verſuchen gebrauchten Parallelepipeden ſehr klein, ferner nicht alle Umſtände genau angegeben ſind, ſo erhält man keine befriedigende Aufſchlüſſe, ſo wie auch dieſe Verſuche, vorzüglich beym Eichenholz, unter ſich nicht harmoniren, und eben ſo von jenen im vorhergehenden §. IV. Zuſaze abweichen.

III. Zuſaz. In Girard's Abhandlung über den Widerſtand feſter Körper ſind am Ende viele Verſuche enthalten. Er fand, daß ein eichener ſenkrechter Balken, deſſen Länge $a = 2{,}5979$, Breite $b = 0{,}1580$, und Dicke $= 0{,}1285$ Métres, durch die Laſt $Q = 17320{,}66$ Kilogrammes nach der Dicke eine kleine Krümmung erhielt, wovon die größte Ordinate $= 0{,}0068$ Métres war.

Ferner bekam ein anderer eichener Balken, wovon $a = 2{,}5979$, $b = 0{,}1579$, $c = 0{,}1015$ Métres, durch die Laſt $Q = 11991{,}9$ Kilogrammes nach der Dicke die Krümmung, deren größte Ordinate $= 0{,}0023$ Métres war. Reduciret man die Dimenſionen auf rheinländiſche Duodecimal-Zoll, und die Laſten auf Berliner Pfund, ſo wird für erſtern Balken:

$a = 99,329$; $b = 6,041$; $c = 4,9131$; $\pi^2 Ek^2 = 509323,7$
für den leztern Balken
$a = 99,329$; $b = 6,0372$; $c = 3,8808$; $\pi^2 Ek^2 = 715984,5$

Anmerk. Schade, daß dieſe Girard'ſche Abhandlung in der vom H. Krönke beſorgten Ueberſezung (das Original ſah ich nicht) durch ſo viele Druck- und Rechnungsfehler entſtellt iſt, ich halte es für nothwendig, den bedeutendſten davon anzuzeigen: §. 90. wird das Verhältniß des Durchmeſſers zum halben Umfange $= 1 : \pi$ geſezt, da doch lezteres Verhältniß das Verhältniß des Durchmeſſers zur ganzen Peripherie, oder des Halbmeſſers zur halben Peripherie ſeyn muß. Durch dieſen Fehler wird §. 94. die zur kleinſten Krümmung erforderliche Kraft $= \frac{Ek^2\pi^2}{4f^2}$ um das vierfache zu klein, weil nun $\pi = 1,570796$ geſezt wird, da es doch $= 3,1415926\ldots$ genommen werden ſollte. Dadurch ſind die am Ende in der 2ten, 3ten und 4ten Tabelle aus den Verſuchen berechneten Werthe von Q ſämmtlich um das vierfache zu klein.

§. 54.

Aufgabe. (Fig. 22.)

Der horizontalliegende Balken AB iſt an ſeinen beyden Enden unterſtüzet, und in der Mitte durch die Hängſäule CD mit den beyden gleichen Streben AC, BC verbunden, welche ſich bey A und B gegen Widerlagen ſtüzen, und bey C in einander gefügt ſind, man ſucht die auf den Balken gleichförmig vertheilte Laſt, die er tragen kann.

Auflöſung.

1. Der Schwerpunct des Balkens ſowohl, als der auf ihn gleichförmig vertheilten Laſt fällt in die Mitte D des Balkens (Reine Mechan. §. 24. VII. Zuſ.).

2. Nun kann der Balken in D nicht ſinken, ohne daß die Hängſäule mit herabgezogen, mithin die beyden Streben etwas gebogen werden.

3. Es frägt ſich alſo um die Größe der Laſt Q, welche in C nach der verticalen Richtung CD die beyden Streben zu biegen, alſo zu zerbrechen vermag. (§. 52).

4. Sezet man die Länge des ganzen Balken $= a$, ferner die Breite einer jeden Strebe $= b$, ſo wie ihre Dicke $= c$, ſo iſt

5. $AC : AD = 1 : \cos\varphi$, oder
$AC : \frac{1}{2} a = 1 : \cos\varphi$, mithin

6. $AC = \frac{a}{2\cos\varphi} = BC$ (per hyp.)

7. Ferner iſt $\vartheta = \varphi$ (Geom. §. 25.) und
$\alpha = \beta = 90^\circ - \varphi$, mithin
$\alpha + \beta = 180^\circ - 2\varphi$.

8. Eine Kraft nun, welche an C nach der Richtung CA die Strebe biegen ſoll, muß $= \frac{\pi^2 . E k^2 b c^3}{\frac{a^2}{4\cos\varphi^2}}$ ſeyn (§. 51. II. Zuſ.).

9. und eben ſo groß muß die Kraft nach der Richtung CB ſeyn, wenn ſie dieſe Strebe CB krümmen ſoll.

10. Zerlegt man nun die Laſt Q nach den beyden Richtungen CA, CB in zwey Seitenkräfte M, N, ſo iſt

11. $M = N = \frac{Q}{2\cos\alpha}$ (R. Mech. §. 53. VIII. Zuſ.)
$= \frac{Q}{2\sin\varphi}$ (Nr. 7.).

12. Soll nun M der Strebe CA, und N der Streben CB eine unendlich kleine Biegung ertheilen (Nr. 3.), ſo muß

13. $M = \frac{Q}{2 \sin \varphi} = \frac{\pi^2 . E k^2 . 4 b c^3}{a^2} \cos \varphi^2$ (Nr. 8.)

ſeyn, alſo

14. wird die geſuchte Totallaſt

$$Q = \frac{8 . \pi^2 . E k^2 . b c^3}{a^2} \sin \varphi \cos \varphi^2$$

I. Zuſaz. Die geſammte Laſt begreift das Gewicht der Hängſäule, ferner das halbe Gewicht des Balkens, und der auf die ganze Länge des Balkens gleichförmig vertheilten Laſt (§. 42. X und XI. Zuſ.).

II Zuſaz. Durch die Länge des Balkens AB, und die Länge der beyden Streben iſt der Winkel φ, ſo wie umgekehrt durch die Länge des Balkens, und durch den Winkel φ die Länge jeder Strebe nemlich

$AC = BC = \frac{a}{2 \cos \varphi}$ beſtimmt.

III. Zuſaz. Da der Werth der Totalkraft Q, wenn a, b, c gegeben ſind, von $\sin \varphi \cos \varphi^2$ abhängt, ſo ſeze man $\sin \varphi = x$, mithin $\sin \varphi \cos \varphi^2 = x(1 - x^2) = y$, alſo $dy = dx - 3x^2 dx$; ſezet man ferner $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2 = 0$, ſo wird $1 = 3x^2$, und $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Nimmt man endlich dx als eine beſtändige Größe, ſo iſt $d^2 y = - 6 x dx^2$, alſo $\frac{d^2 y}{dx^2} = - 6x$, folglich iſt y, das iſt, $\sin \varphi \cos \varphi^3$, folglich Q, für $x = \sin \varphi = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ein maximum (Arithm. §. 320.).

Nun iſt log. $\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}7614394 - 1$, mithin
log. sin $\varphi = 9{,}7614394 =$ log. sin. $35^\circ\ 16'$

IV. Zuſaz. Wenn alſo beyde Streben gegen den Balken die Neigung $\varphi = 35^\circ\ 16'$, mithin die Länge $\frac{1}{2}$ a : cos φ (II. Zuſ.) $= \frac{1}{2}$a : $\sqrt{\frac{2}{3}}$ haben, ſo iſt die Anrichtung am vortheilhafteſten.

III. Hauptſtück.

Von der Nebenlaſt.

§. 55.

Erfahrungsſäze.

a. Wenn ein Parallelepipedum, oder überhaupt ein feſter Körper mit einer ſeiner ebenen Seitenflächen auf wagrechtem feſtem Boden ruhet, ſo iſt nicht jede Kraft, die auf den Schwerpunct des Körpers nach horizontaler Richtung wirket, zureichend, denſelben in Bewegung zu ſezen.

b. Liegt ein ſolcher Körper auf einer ſchiefen Ebene, ſo gleitet er nicht bey jeder Neigung längſt derſelben herab.

c. Wenn ein Seil um eine Rolle, oder Cylinder gelegt wird, ſo wird allemal eine gewiſſe Kraft erfordert, damit es ſich an den Umfang allenthalben anlege, und die Krümmung der Rolle oder des Cylinders annehme.

I. Zuſaz. Da vom wagrechten Boden das ganze Gewicht des auf ihm ruhenden Körpers getragen, mithin die Wirkung der Schwere ganz aufgehoben

wird, ſo muß ein Hinderniß vorhanden ſeyn, wenn ſich der Körper nicht durch jede noch ſo geringe Kraft nach horizontaler Richtung bewegen läßt.

II. Zuſaz. Liegt ein Körper auf einer ſchiefen Ebene, ſo wird nur ein Theil des Gewichtes getragen, der andere Theil treibt den Schwerpunct des Körpers längſt der ſchiefen Ebene abwärts (Reine Mech. §. 154.), folgt alſo der Körper dieſer Richtung nicht, ſondern bleibt ruhig an ſeiner vorigen Stelle, ſo muß irgend ein Hinderniß vorhanden ſeyn.

III. Zuſaz. Ein Haupthinderniß, welches ſich ſowohl auf wagrechtem Boden, als ſchiefen Ebene, der Bewegung eines Körpers entgegenſezet, beſteht in der Rauhigkeit der ſich berührenden Oberflächen, indem nemlich die erhabenen Theile der einen in die Vertiefungen der andern Oberfläche eingreifen, und das Fortrücken derſelben gegeneinander hindern.

§. 56.

Erklärungen.

a. Der Widerſtand, den die Rauhigkeit zweyer aneinander gedrückten Flächen der Kraft entgegenſezet, welche die eine längſt der andern zu bewegen ſtrebt, heißt die Reibung (Frictio, Affrictus, Attritus).

b. Der Widerſtand, welchen ein Seil dem Aufwinden um einen Cylinder entgegenſezet, heißt die Steiſe oder Unbiegſamkeit des Seils (Rigiditas).

I. Zuſaz. Die Reibung ſowohl als die Steiſe der Seile verhalten ſich ſtets leidend, erzeugen nie eine Bewegung, ſind alſo keine Kräfte (Reine Mech. §. 4.), da ſie aber doch die Wirkung einer vorhandenen Kraft aufheben (§. 55.), ſo können ſie ſelbſt als

Kräfte betrachtet werden, welche mit der Kraft, die zu ihrer Aufhebung erforderlich iſt, einerley Größe, aber entgegengeſezte Richtung haben.

II. Zuſaz. Da ſich die Reibung und Steife wohl vermindern, aber nie ganz aufheben laſſen, ſo gehören ſie bey jeder Maſchine zur Nebenlaſt (§. 4.).

III. Zuſaz. In Beziehung auf die Reibung kömmt es ſowohl auf die Beſchaffenheit der Materie der Körper an, welche ſich gegen einander reiben, als auf die Art der Bewegung, wodurch die Reibung entſteht; denn

a. bey einer fortſchreitenden Bewegung (Reine Mech. §. 43. II. Zuſ.), es mag der eine Körper längſt der Oberfläche des andern ruhenden, oder ſelbſt bewegten Körpers, fortgehen, ſo berühret er immer mit eben derſelben Seitenfläche neue Theile oder Stellen der Oberfläche des andern Körpers, die Bewegung iſt gleitend (superincessus radens);

b. Iſt hingegen ſeine Bewegung ſo beſchaffen, daß immer neue Theile deſſelben mit neuen Stellen der Oberfläche des andern Körpers in Berührung kommen, z. B. bey einer Kugel, oder einer ſenkrechten Walze, wenn leztere mit einer Seite auf der Oberfläche des andern Körpers ruhet, und nach einer auf ihre Axe ſenkrechten Richtung bewegt wird, (Reine Mech. §. 126. II. Zuſ. und §. 162. V und VI. Zuſ.) ſo wird ſie rollend, wälzend (superincessus volvens).

c. Drehet ſich der bewegte Körper bloß um eine Axe, ſo berührt er dadurch immer mit andern Stellen ſeiner Oberfläche (z. B. ſeiner Walzen) eben dieſelbe

Stelle

Stelle des Körpers, auf welcher er eigentlich ruhet (z. B. der Zapfenlager), dieſe Bewegung iſt im Grunde zwar gleitend, verdient aber der eigenen Vorrichtung wegen eine beſondere Unterſuchung.

IV. Zuſaz. Schon aus der Natur der wälzenden Bewegung, wo immer neue Theile in Berührung kommen, läßt ſich vermuthen, daß bey ihr die Reibung, wenigſt das Moment derſelben, am geringſten ſeyn werde, welches auch in der Folge durch Verſuche beſtättiget wird.

I. Anmerk. Vom Widerſtande der Luft, welcher bey beträchtlichen Flächen und Geſchwindigkeiten ebenfalls als Nebenlaſt in Anſchlag gebracht werden muß, läßt ſich erſt in der Hydraulik das geeignete vortragen.

II. Anmerk. Da man in der Maſchinenlehre nothwendig vorausſezen muß, daß durch gehörige Sorgfalt alle vermeidlichen Hinderniſſe entfernt ſind, ſo kann ſich die Beſtimmung der Reibung nur auf jene Fälle erſtrecken, wo die ſich berührenden Oberflächen der beyden Körper bereits die größtmögliche Politur erhalten haben.

I. Abſchnitt.

Von der Reibung feſter Körper bey gleitender Bewegung.

§. 57.

Aufgabe.

Für eine gegebene Seitenfläche eines prismatiſchen Körpers von beſtimmter Materie (z. B. Föhrenholz) die Reibung F gegen die Fläche eines andern Körpers von beſtimmter Materie (z. B. Eichenholz) im Anfange einer gleitenden Bewegung anzugeben.

I. Auflöſung. (Fig. 23.)

1. Man bringe die Ebene LK des zweyten Körpers in eine wagrechte Lage, ſeze auf ſolche das Prisma mit der gegebenen Seitenfläche, und

2. befeſtige an dieſes eine Schnur, die man mittels einer unbeweglichen Rolle ſo ſpannen kann, daß ſie den Schwerpunct G horizontal, mithin das Prisma nach einer zur Ebene LK parallelen Richtung zieht.

3. Nun ſpanne man die Schnur durch zugelegte Gewichte immer mehr, bis endlich nach dieſer Richtung eine Bewegung erfolgt.

4. So lange das Prisma ruhig an ſeiner Stelle bleibt, ſo iſt die Reibung größer, als die Summe der Gewichte, wodurch die Schnur geſpannt iſt; fängt ſich aber das Prisma nach der Richtung der Schnur zu

bewegen an, ſo iſt auf Seite der zugelegten Gewichte ſchon Ueberwucht vorhanden (§. 5. Zuſ.).

5. Geſchieht nun die Zulage immer durch ſehr kleine Gewichte, deren jedes $= p$ iſt, ſo erhält man zwey Gränzen, zwiſchen welchen der Werth von der Friction enthalten iſt, wenn nemlich

6. bey np das Prisma in ſeiner erſten Stelle ruhig bleibt, ſo iſt $F > np$; erfolgt nun durch die Zulage von p, mithin bey $(n+1)\,p$ eine Bewegung, ſo iſt ſchon $F < (n+1)\,p$.

7. Je kleiner nun p angenommen wird, deſto näher liegen die Gränzen ineinander, ſo, daß man alſo $F = np$ ſezen kann (§. 56. I. Zuſ.).

II. Aufloſung.

8. Man lege wieder das Prisma mit der gegebenen Seitenfläche auf die genau wagrecht geſtellte Ebene LK.

9. Nun gebe man dieſer Ebene ſehr allmählig immer eine gröſſere Neigung, bis endlich das Prisma längſt derſelben herabzugleiten anfängt.

10. Wenn nun α die Neigung bezeichnet, bey welcher zwar das Prisma noch ruhig an ſeiner Stelle blieb, doch ſo, daß bey der nächſten geringſten Zunahme die Bewegung erfolgte, ſo kann man

11. $F = P \sin \alpha$ ſezen, wo P das Gewicht des Prisma bezeichnet; denn

12. da lezteres mit der Gewalt $= P \cos \alpha$ ſenkrecht gegen die geneigte Ebene gedrückt, hingegen mit einer Kraft $= P \sin \alpha$ längſt derſelben abwärts getrieben wird (Reine Mech. §. 154.), ſo hält mit lezterer die Reibung das Gleichgewicht, iſt ihr alſo gleich, aber entgegengeſezt.

I. Zuſaz. Durch mehrere Verſuche nach dieſen beyden Methoden fanden Amonton, Leupold, Belidor, Bilſinger, daß die Größe der Reibung nicht von der Größe der beyden ſich berührenden Flächen, ſondern von der Größe des ſenkrechten Druckes dieſer Flächen gegeneinander abhange, und daß die Reibung ſtets mit dieſem Drucke in einem geraden Verhältniſſe ſtehe, ſo daß,

II. Zuſaz. wenn q, Q zwey verſchiedene Preſſungen, und f, F die daraus entſpringenden Reibungen bezeichnen, immer $f : F = q : Q$, folglich $fQ = Fq$, alſo $\frac{F}{Q} = \frac{f}{q}$ eine beſtändige Größe ſeye.

III. Zuſaz. Sezet man $\frac{F}{Q} = \lambda$, alſo $F = \lambda Q$, ſo iſt bey der erſten Auflöſung $np = \lambda Q$ (Nr. 7.) alſo $\lambda = \frac{np}{Q}$ wo aber nun Q das ganze Gewicht des Prisma bezeichnet.

IV. Zuſaz. Bey der zweyten Auflöſung, nemlich durch die ſchiefe Ebene, wenn P das ganze Gewicht des Prisma, hingegen Q deſſen ſenkrechten Druck gegen die geneigte Ebene bezeichnen, ſo iſt $F = P \sin \alpha$, und $Q = P \cos \alpha$ (Nr. 12.), mithin $\frac{F}{Q} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} =$ tang. α, alſo tang. $\alpha = \lambda$.

§. 58.

Erklärungen.

a. Man nennet den Exponenten des Verhältniſſes der Reibung zum ſenkrechten Druck, das iſt $\lambda = \frac{F}{Q}$ (§. 57. III. Zuſ.) den Reibungscoefficienten, und

b. bey der geneigten Ebene den Winkel α, deſſen Tangens dem Reibungscoefficienten gleich iſt, (§. 57. IV.) den Ruhewinkel.

I. Zuſatz. Amonton, und nach ihm Leupold und Belidor fanden vermittels der I. Auflöſung §. 57. den Reibungscoefficienten dem dritten Theile der preſſenden Kraft gleich, ſo daß immer $F = \frac{1}{3} Q$, alſo $\lambda = \frac{1}{3}$ ſeyn würde.

II. Zuſatz. Belidor giebt den Ruhewinkel $\alpha = 18° 20'$ mithin den Reibungscoefficienten $\lambda = \text{tang.}\,\alpha = 0{,}3313639$, alſo beinahe $= \frac{1}{3}$. Bilſinger fand den Ruhewinkel zwiſchen 12 und 15 Grad, nimmt man das arithmetiſche Mittel, alſo $\alpha = 13°30'$, ſo erhält man für $\lambda = \text{tang.}\,\alpha = 0{,}2400787 = \frac{1}{4}$ beynahe.

III. Zuſatz. Durch viele und ſorgfältige Verſuche von Muſſchenbroek, Ximenes und Coulomb ergab ſich aber, daß der Reibungscoefficient keine beſtändige Größe ſey.

§. 59.

Muſſchenbroek's Verſuche über die Reibung eines ſenkrechten Parallelepipedums auf wagrechtem Boden für einige Holzarten nach der I. Auflöſung §. 57.

A.

Wenn die Bewegung nach der Länge der Fibern erfolgte.

Name der ſich reibenden Flächen	Gewicht des Parallelepipedums Q	Reibung F	Reibungscoeffic. $\frac{F}{Q} = \lambda$
Föhren oder Kieſer auf Kiefernholz	4 Unzen 18 Unzen 10 Pfund	8 Drachmen 31 Drachmen 26 Unzen	0,25 = $\frac{1}{4}$ 0,215 = $\frac{1}{5}$ 0,1625 = $\frac{1}{6}$
Kiefern auf Buxbaumholz	4 Unzen 18 Unzen 10 Pfund	6 Drachmen 23 Drachmen 20 Unz. 4 Dr.	0,19 = $\frac{1}{5}$ 0,16 = $\frac{1}{6}$ 0,128 = $\frac{1}{8}$
Eichen auf Eichenholz	4 Unzen 18 Unzen 10 Pfund	6 Drachmen 25 Drachmen 29 Unzen	0,19 = $\frac{1}{5}$ 0,1736 = $\frac{1}{6}$ 0,18 = $\frac{2}{11}$
Eichen auf Buxbaumholz	4 Unzen 18 Unzen 10 Pfund	6 Drachmen 18 Drachmen 19 Unzen	0,19 = $\frac{1}{5}$ 0,125 = $\frac{1}{8}$ 0,119 = $\frac{1}{8}$

B.

Wenn die Bewegung nach der Quere der Fibern geſchah.

Kiefern auf Kiefernholz	2 Unzen 4 Unzen 18 Unzen 6 Pfund	1 Unze 1 Unze, 4 Dr. 10 Unzen 42 Unzen	0,5 = $\frac{1}{2}$ 0,375 = $\frac{3}{8}$ 0,555 = $\frac{5}{9}$ 0,437 = $\frac{7}{16}$
Eichen auf Kiefernholz	2 Unzen 6 Unzen 6 Pfund	7,5 Drachmen 2 Unzen 32 Unzen	0,47 = $\frac{1}{2}$ 0,333 = $\frac{1}{3}$ 0,333 = $\frac{1}{3}$
Eichen auf Eichenholz	2 Unzen 4 Unzen 18 Unzen 6 Pfund	4 Drachmen 7,5 Drachmen 3 Unz., 4 Dr. 18 Unzen	0,25 = $\frac{1}{4}$ 0,235 = $\frac{1}{4}$ 0,194 = $\frac{1}{5}$ 0,1875 = $\frac{1}{5}$

Tab. II. §. 60. B.

Reibung des Nußbaumholzes auf wildem Olivenholz.

Druck Q in ℔.	Berührungsfläche = 144 Par. Zoll.				Berührungsfläche = 72 Par. Zoll.				Berührungsfläche = 36 Par. Zoll.			
	Trocken		mit Unſchlitt		mit Unſchlitt		das Unſchlitt abgewiſcht		mit Unſchlitt		das Unſchlitt abgewiſcht	
	Tab. VI.		Tab. VIII.		Tab. XXXII.		Tab. XXXIII.		Tab. XXIII.		Tab. XXIV.	
	℔.F U.	λ	℔.F U.	λ	℔.F U.	λ	℔.F U.	λ	℔.F U.	λ	℔.F U.	λ
100	30. 0	0,300	11. 9	0,117	9. 9	0,097	18. 0	0,180	8. 0	0,080	15. 0	0,150
200	56. 0	0,280	20. 6	0,102	17. 6	0,087	34. 6	0,172	16. 0	0,080	29. 0	0,145
300	89. 0	0,296	29. 0	0,096	27. 0	0,090	50. 0	0,166	23. 0	0,076	43. 0	0,143
400	124. 0	0,310	40. 0	0,100	38. 0	0,095	65. 0	0,162	30. 0	0,075	57. 0	0,142
500	163. 0	0,326	48. 6	0,097	48. 6	0,097	80. 0	0,160	36. 6	0,073	70. 0	0,140
600	203. 0	0,338	54. 6	0,090	58. 4	0,097	94. 6	0,157	42. 4	0,070	82. 0	0,136
700	242. 0	0,345	60. 0	0,085	68. 0	0,097	108. 0	0,154	48. 2	0,068	93. 6	0,133
800	280. 0	0,350	64. 9	0,081	78. 0	0,097	121. 0	0,151	54. 4	0,068	104. 0	0,130
900	318. 0	0,353	69. 6	0,077	87. 0	0,097	133. 6	0,148	60. 0	0,066	115. 10	0,128
1000	354. 0	0,354	74. 6	0,074	97. 0	0,097	146. 0	0,146	65. 3	0,065	124. 10	0,125
1100	390. 0	0,354	79. 0	0,072	106. 10	0,097	159. 0	0,144	69. 0	0,062	135. 0	0,123
1200	425. 0	0,354	83. 9	0,069	116. 0	0,096	171. 8	0,143	73. 8	0,061	144. 6	0,120
1300	458. 0	0,352	88. 6	0,068	125. 8	0,096	183. 0	0,141	77. 0	0,059	153. 0	0,118
1400					134. 0	0,096	195. 0	0,139	82. 6	0,059	162. 6	0,116
1500					143. 0	0,095	207. 0	0,138	86. 3	0,057	171. 6	0,114
1600					153. 0	0,095	219. 0	0,137	89. 5	0,056	180. 0	0,112
1700					162. 0	0,095	231. 0	0,136	92. 6	0,054	188. 4	0,110
1800					171. 0	0,095	242. 0	0,134	95. 6	0,053	196. 0	0,109
1900					180. 0	0,095	254. 0	0,133	98. 8	0,052	204. 0	0,107
2000					189. 0	0,094	264. 8	0,132	101. 2	0,050	211. 10	0,105
2100					197. 0	0,094	274. 6	0,131	104. 0	0,049	219. 0	0,104
2200					205. 0	0,093	285. 0	0,129	107. 0	0,048	226. 3	0,103
2300					213. 0	0,093	294. 6	0,128	109. 0	0,047	232. 0	0,101
2400					220. 6	0,092	303. 6	0,126	111. 8	0,046	239. 4	0,099
2500					227. 0	0,091	312. 0	0,125	115. 0	0,046	245. 6	0,098
2600					233. 0	0,090	320. 4	0,123	118. 4	0,046		

Ximenes Verſuche über die Reibung

A.

des Nußbaumholzes auf Lava.

Druck Q in ℔.	Berührungsfläche = 144 □ Pariſ. Duodec. Zoll.						Berührungsfläche = 72 Par. Duodec. □ Zoll.			
	die Berührungsflächen trocken.				mit Unſchlitt		mit Unſchlitt		das Unſchlitt abgewiſcht	
	Tab. I.		Tab. II.		Tab. IX.		Tab. XXX.		Tab. XXXI.	
	℔. F u.	λ	℔. F u.	λ	℔. F u.	λ	℔. F u.	λ	℔. F u.	λ
100	35. 0	0,350	52. 0	0,520	7. 0	0,070	5. 3	0,052	23. 0	0,230
200	69. 0	0,345	96. 0	0,480	13. 0	0,065	9. 4	0,046	44. 0	0,220
300	98. 6	0,328	145. 0	0,483	19. 0	0,063	13. 6	0,045	60. 0	0,200
400	138. 0	0,345	200. 0	0,500	24. 6	0,061	17. 0	0,042	79. 0	0,197
500	193. 0	0,386	247. 0	0,494	28. 6	0,057	21. 0	0,042	99. 0	0,198
600	254. 0	0,423	298. 0	0,496	33. 0	0,055	25. 0	0,041	118. 0	0,196
700	328. 0	0,468	344. 0	0,491	38. 0	0,054	29. 3	0,041	137. 0	0,195
800	388. 0	0,485	412. 0	0,515	43. 0	0,053	33. 0	0,041	150. 0	0,187
900	448. 0	0,498	484. 0	0,537	47. 6	0,053	37. 0	0,041	166. 0	0,184
1000	508. 0	0,508	550. 0	0,550	52. 6	0,052	40. 9	0,040	180. 0	0,180
1100			613. 0	0,557	56. 0	0,051	44. 3	0,040	197. 0	0,179
1200					60. 0	0,050	47. 9	0,039	212. 0	0,177
1300					64. 0	0,049	51. 3	0,039	227. 0	0,175
1400							55. 2	0,039	242. 0	0,173
1500							59. 0	0,039	256. 0	0,171
1600							62. 10	0,039	270. 0	0,169
1700							66. 6	0,039	283. 0	0,166
1800							70. 3	0,039	296. 0	0,164
1900							74. 0	0,039	309. 0	0,163
2000							77. 9	0,039	323. 0	0,161
2200							84. 6	0,038	349. 0	0,159
2400							91. 3	0,038	373. 0	0,155
2600							97. 11	0,038		

Tab. II. §. 60. E.

Reibung des Eiſens auf wildem Olivenholz.

Druck Q in Pf.	Berührungsfläche = 72 Pariſer □ Zoll.								Berührungsfläche = 144 Par. Zoll.			
	mit Unſchlitt				das Unſchlitt abgewiſcht				mit Unſchlitt		das Unſchlitt abgewiſcht	
	Tab. XIII.		Tab. XXVIII.		Tab. X.		Tab. XXIX.		Tab. XXII.		Tab. XXV.	
	Pf. F U.	λ	Pf. F U.	λ	Pf. F U.	λ	Pf. F U.	λ	Pf. F U.	λ	Pf. F U.	λ
100	2. 3	0,022	2. 7	0,026	7. 3	0,072	4. 7	0,045	3. 0	0,030	8. 0	0,080
200	3. 10	0,019	4. 1	0,020	15. 0	0,075	8. 7	0,043	5. 2	0,025	16. 0	0,080
300	6. 3	0,021	5. 4	0,018	22. 6	0,075	11. 10	0,039	7. 7	0,025	22. 2	0,074
400	9. 4	0,023	7. 0	0,017	28. 0	0,070	17. 9	0,044	9. 8	0,024	27. 6	0,068
500	12. 6	0,025	8. 6	0,017	32. 3	0,064	22. 2	0,044	12. 0	0,024	32. 8	0,065
600	15. 7	0,026	10. 0	0,017	36. 3	0,060	26. 3	0,044	14. 2	0,023	39. 0	0,065
700	19. 5	0,028	11. 8	0,017	40. 4	0,058	30. 2	0,043	16. 1	0,023	44. 6	0,063
800	22. 3	0,028	12. 7	0,016	44. 4	0,055	34. 1	0,043	18. 0	0,022	49. 9	0,062
900	25. 2	0,028	14. 1	0,016	48. 6	0,054	38. 0	0,042	20. 0	0,022	54. 8	0,061
1000	28. 0	0,028	15. 5	0,015	52. 6	0,052	42. 0	0,042	22. 3	0,022	60. 0	0,060
1100	30. 9	0,028	16. 9	0,015	56. 6	0,051	45. 10	0,041	24. 3	0,022	65. 0	0,059
1200	32. 8	0,027	18. 3	0,015	60. 4	0,050	49. 5	0,041	26. 1	0,022	70. 0	0,058
1300	34. 6	0,026	19. 5	0,015	64. 3	0,049	52. 9	0,041	28. 0	0,021	75. 6	0,058
1400	36. 5	0,026	20. 10	0,015			56. 0	0,040	30. 0	0,021	80. 8	0,058
1500	38. 5	0,026	22. 1	0,015			59. 5	0,040	32. 0	0,021	85. 4	0,057
1600	40. 4	0,025	23. 6	0,015			62. 9	0,039	33. 11	0,021	90. 2	0,056
1700	42. 9	0,025	24. 11	0,015			65. 11	0,039	35. 11	0,021	95. 0	0,056
1800	44. 4	0,025	26. 4	0,015			68. 4	0,038	37. 2	0,021	100. 0	0,056
1900	46. 3	0,024	27. 7	0,015			71. 1	0,037	39. 0	0,021	104. 10	0,055
2000	48. 3	0,024	28. 11	0,014			74. 0	0,037	40. 9	0,020	109. 5	0,054
2100	50. 3	0,024	30. 3	0,014			76. 11	0,037	42. 8	0,020	114. 3	0,054
2200	52. 2	0,024	31. 6	0,014			79. 10	0,036	44. 8	0,020	118. 7	0,054
2300	54. 2	0,024	32. 9	0,014			82. 9	0,036	46. 7	0,020	122. 3	0,053
2400	56. 2	0,023	33. 10	0,014			85. 6	0,036	48. 7	0,020	126. 0	0,052
2500	58. 0	0,023	34. 8	0,014			88. 3	0,035	49. 9	0,020	129. 9	0,052
2600	59. 10	0,023	35. 6	0,014			90. 9	0,035	50. 8	0,019	132. 0	0,051
2700	61. 8	0,023	36. 5	0,013					51. 6	0,019		

Tab. II. §. 60. C.

Reibung des Nußbaumholzes auf Meſſing.

D.

Reibung des Eiſens auf Lava.

Laſt Q in ℔.	Berührungsfl. = 144 Par. ▭ Zoll.				Berührungsfl. = 36 Par. Zoll				Berührungsfläche = 144 Par. Zoll.			
	mit Unſchlitt		mit Unſchlitt abgewiſcht		Trocken		mit Unſchlitt		mit Unſchlitt		das Unſchlitt abgewiſcht	
	Tab. XVII.		Tab. XVI.		Tab. XVIII.		Tab. XIX.		Tab. XXVI.		Tab. XXVII.	
	℔. F U.	λ	℔. F U.	λ	℔. F U.	λ	℔. F U.	λ	℔. F U.	λ	℔. F U.	λ
100	9. 3	0,092	11. 2	0,111	11. 0	0,110	10. 0	0,100	5. 6	0,055	18. 6	0,185
200	21. 0	0,105	24. 2	0,121	21. 6	0,107	17. 9	0,089	8. 4	0,042	36. 5	0,182
300	33. 0	0,110	35. 4	0,118	30. 10	0,102	25. 0	0,083	12. 0	0,040	50. 0	0,166
400	44. 0	0,110	47. 0	0,117	42. 6	0,106	32. 6	0,081	15. 0	0,037	59. 10	0,149
500	54. 10	0,109	58. 8	0,117	54. 0	0,108	38. 6	0,077	17. 0	0,034	70. 6	0,141
600	64. 6	0,107	69. 0	0,115	65. 0	0,108	44. 4	0,074	19. 6	0,032	82. 0	0,136
700	70. 3	0,100	78. 4	0,112	75. 4	0,107	50. 3	0,072	21. 9	9,031	91. 6	0,131
800	81. 4	0,101	86. 4	0,108	85. 6	0,107	55. 4	0,069	23. 9	0,029	100. 3	0,125
900	90. 6	0,100	94. 5	0,105	96. 0	0,107	61. 0	0,068	25. 8	0,028	110. 3	0,122
1000	98. 0	0,098	103. 8	0,104	107. 6	0,107	67. 0	0,067	27. 6	0,027	120. 4	0,120
1100	105. 8	0,096	111. 0	0,101	118. 0	0,107	73. 0	0,066	29. 2	0,026	130. 2	0,118
1200	112. 0	0,093	118. 8	0,099	129. 0	0,107	79. 0	0,066	30. 9	0,026	140. 0	0,117
1300	119. 0	0,091	124. 10	0,096	140. 0	0,107	85. 0	0,065	32. 6	0,025	150. 0	0,115
1400	125. 8	0,089	131. 4	0,094	151. 0	0,108	90. 6	0,065	34. 4	0,024	159. 10	0,114
1500	131. 10	0,088	138. 4	0,092	160. 10	0,107	95. 6	0,064	36. 0	0,024	169. 4	0,113
1600	138. 4	0,086	145. 0	0,091	171. 0	0,107	100. 3	0,063	37. 10	0,023	179. 0	0,112
1700	144. 6	0,085	152. 4	0,089	181. 0	0,106	105. 3	0,062	39. 6	0,023	188. 8	0,111
1800	150. 3	0,083	160. 5	0,089	190. 0	0,106	110. 3	0,061	42. 2	0,023	197. 8	0,110
1900	156. 0	0,082	172. 0	0,090	201. 0	0,106	114. 9	0,060	43. 9	0,023	205. 6	0,108
2000	162. 0	0,081	190. 0	0,095	211. 0	0,105	119. 6	0,059	45. 8	0,022	214. 0	0,107
2100	167. 6	0,080	197. 0	0,094	221. 0	0,105	124. 0	0,059	46. 9	0,022	221. 4	0,105
2200	173. 0	0,079	204. 0	0,093	230. 0	0,104	129. 0	0,059	48. 2	0,022	228. 0	0,104
2300	179. 0	0,078	210. 6	0,091	240. 0	0,104	134. 0	0,058	49. 10	0,022	235. 6	0,102
2400	184. 4	0,077	217. 0	0,090	250. 0	0,104	138. 9	0,058	50. 3	0,021	241. 10	0,101
2500	189. 0	0,076	223. 0	0,089	259. 0	0,103	142. 9	0,057	51. 6	0,020	247. 8	0,099
2600									52. 8	0,020		
2700									53. 11	0,020		

Tab. II. §. 60. F.

Reibung des Eiſens auf Meſſing.

Druck Q in ℔.	Berührungsfläche = 144 Par. Zoll.				Berührungsfläche = 72 Zoll.			
	Trocken		mit Unſchlitt		Trocken		mit Unſchlitt	
	Tab. XX.		Tab. XXI.		Tab. XIV.		Tab. XV.	
	℔. F U.	λ	℔. F U.	λ	℔. F U.	λ	℔. F U.	λ
100	13. 9	0,137	9. 6	0,095	18. 0	0,180	9. 6	0,095
200	26. 6	0,132	17. 9	0,088	31. 6	0,157	18. 0	0,090
300	40. 6	0,135	25. 3	0,084	47. 6	0,158	26. 0	0,086
400	54. 10	0,137	32. 6	0,081	60. 0	0,150	34. 0	0,085
500	65. 0	0,130	38. 0	0,076	79. 0	0,158	42. 0	0,084
600	75. 0	0,125	44. 0	0,073	97. 0	0,161	50. 0	0,083
700	85. 0	0,121	49. 0	0,070	109. 0	0,156	57. 6	0,082
800	95. 0	0,119	54. 8	0,068	127. 0	0,159	64. 0	0,080
900	104. 4	0,116	60. 0	0,066	144. 0	0,160	71. 6	0,079
1000	114. 6	0,114	65. 6	0,065	161. 0	0,161	78. 0	0,078
1100	124. 6	0,113	70. 4	0,064	178. 0	0,162	84. 6	0,077
1200	135. 0	0,112	75. 0	0,062	196. 0	0,163	90. 6	0,075
1300	145. 8	0,112	80. 0	0,061	213. 0	0,164	96. 4	0,074
1400	155. 0	0,111	84. 6	0,060	230. 0	0,164	102. 8	0,073
1500	165. 9	0,110	88. 9	0,060	244. 0	0,163	109. 0	0,073
1600	175. 0	0,109	92. 0	0,058	257. 0	0,161	115. 0	0,072
1700	184. 0	0,108	96. 0	0,056	273. 0	0,161	121. 0	0,071
1800	193. 6	0,107	100. 0	0,056	284. 0	0,158	126. 6	0,070
1900	202. 8	0,107	103. 9	0,055	295. 0	0,155	131. 8	0,069
2000	212. 4	0,106	106. 0	0,053	305. 0	0,152	136. 0	0,068
2100	221. 0	0,105	109. 4	0,052	315. 0	0,150	141. 0	0,067
2200	229. 0	0,104	106. 0	0,048	324. 0	0,147	145. 10	0,066
2300	236. 0	0,103	108. 10	0,047	331. 0	0,144	150. 6	0,065
2400	246. 0	0,103	111. 8	0,046	337. 0	0,140	154. 6	0,064
2500			113. 6	0,045			158. 0	0,063
2600			115. 0	0,044			161. 6	0,062

I. Zuſaz. Dieſe eben angeführten Verſuche ſind aus Musschenbroek Introductio ad Philosophiam naturalem Tom. I. gezogen. Bey den gebrauchten Gewichten hält das Amſterdamer Pfund 16 Unzen, und die Unze 8 Drachmen.

II. Zuſaz. Obgleich die Verſuche nur für den Anfang der Bewegung, und nur bey unbedeutenden Preſſungen der ſich reibenden Oberflächen gemacht wurden, ſo erhellet doch, daß bey verſchiedenen Holzarten der Reibungscoefficient verſchieden iſt, und bey zunehmendem Drucke abnimmt. Siehe Extrablatt.

§. 60.

Die Verſuche von Ximenes über die Reibung bei gleitender Bewegung enthalten die am Ende angefügte Tabelle II. A - F.

§. 61.

Erläuterungen, die vom Ximenes über die Reibung bey gleitender Bewegung gemachten Verſuche betreffend.

a. Leonhard Ximenes, Mathematiker des Großherzoges zu Toſcana, ſtellte in den Jahren 1779 bis 1781, bey Gelegenheit der Pariſer Preisaufgabe über die Reibung feſter Körper, viele Verſuche an, und gründete darauf ſeine Theorie, welche er im Jahre 1782. in 2 Theilen herausgab unter dem Titel: Teoria e Practica delle Resistence de' Solidi ne' loro attriti.

b. Das Weſentliche der zu den Unterſuchungen über die Reibung bey gleitender Bewegung gebrauchten Vorrichtung beſtand (Fig. 24.)

α. aus einem feſten Tiſche mit einer Platte LM aus Lava, 6 Fuß lang, und zwiſchen 4 und 5 Fuß breit (das Längenmaaß iſt das Pariſer Duodec. Fußmaaß);

β. aus einem gegen 4 Fuß langen, 3 Fuß breiten, und etwas über 2 Fuß hohen hohlen Kaſten abcdg, in welchen beliebige Gewichte Q eingeleget wurden, um die Reibung bey verſchiedenem ſenkrechten Druck zu unterſuchen.

γ. Auf dem Boden dieſes Kaſten wurde längſt der Seite ab ſowohl, als der gegenüberſtehenden Seite ein Liniàl befeſtiget; dieſes Paar Liniale war entweder von Holz, oder einem Metalle, je nachdem man die Reibung bey Holzarten, oder Metallen beſtimmen wollte.

δ. Jedes Paar ſolcher Liniale wie z. B. A, B, oder C, D hatte die Länge von 43 Zoll, hingegen um den Einfluß von der Größe der Berührungsflächen zu entdecken, wurden einigen Paaren dieſer Liniale die Breite von 20, andern von 10, und einigen endlich von 5 Pariſer Duodec. Linien gegeben, ſo daß im erſten Falle die Berührungsfläche beynahe 144, im zweyten 72, und im dritten nur 36 Quadratzolle betrug.

ε. Bey der Unterſuchung über die Reibung der Holzarten und Metalle auf Lava wurde der Kaſten mit den an ſeinen beyden Seiten der Länge nach untergelegten Linialen auf die Lavaplatte geſtellt; wollte man aber die Reibung der Holzarten und Metalle untereinander beſtimmen, ſo wurden auf die Lavaplatte 2 Bohlen von Holz, oder 2 Schienen von Metall ee, ff befeſtiget.

ζ. Dieſer mit Gewichten belaſtete Kaſten wurde ferner mittels eines gleicharmigen Winkelhebels mit einem kleinern hohlen Kaſten verbunden,

durch das jedesmal eingelegte Gewicht P der gröſſere Kaſten in Bewegung geſezt, und dadurch jedesmal die Gröſse der Reibung beſtimmt.

x. Die gebrauchten Gewichte waren Florentiner Pfunde, wovon jedes in 12 Unzen eingetheilt wird, und nach Gerhardt's Cont. 7066 holl. Aſen hält.

c. Die vom Ximenes gemachten Verſuche ſind beynahe alle in den Tafeln A–F eingerückt, wo die erſte verticale Spalte die Gröſse des jedesmaligen ſenkrechten Druckes Q der Flächen gegeneinander, das iſt, die Summe aller in den Kaſten eingelegten Gewichte mit Einſchluſs des Gewichtes vom Kaſten ſelbſt angiebt; in der 2ten, 4ten, 6ten u. ſ. f. verticalen Spalte iſt die Summe der im kleinern Gefäſse eingelegten Gewichte ebenfalls mit Einſchluſs des Gewichtes dieſes Gefäſses jedesmal angegeben, woraus ſich allemal für die danebenſtehende Spalte der Reibungscoefficient $\lambda = \frac{F}{Q}$ ergiebt.

d. Wenn die berührenden Flächen nur polirt waren, ohne daſs vorher etwa ſchon eine Schmier gebraucht wurde, wodurch auch bey der ſorgfältigſten Reinigung doch allemal die Theile noch fettig bleiben, ſo iſt dieſes durch die Aufſchrift: Trocken, angezeigt.

e. Die Verſuche ordnete Ximenes chronologiſch, ſie wurden ſämmtlich während der Zeit vom 5 bis 24 Decemb. 1781. gemacht, und in 32 Tabellen eingerückt; gegenwärtig wurden ſie anders geordnet, aber die Aufſchriften der Tabellen beybehalten.

I. Zuſaz. Aus den Tafeln von A erhellet, daſs durch die Unſchlittſchmier die Reibung des Nuſsbaum-

holzes auf Lava ſehr vermindert wird, die größere Reibung in der 2ten Tabelle kömmt daher, daß durch die in der erſten Tabelle gemachten Verſuche die Lavaplatte einige Streifen erhalten hatte.

II. Zuſaz. Bey der Reibung des Nußbaumholzes auf wildem Olivenholz ergiebt ſich aus den Tabellen B, daß die Reibung bey vergrößerter Berührungsfläche zunimmt, hingegen durch die gebrauchte Unſchlittſchmier auſſerordentlich vermindert wird, daß aber jedesmal der Reibungscoefficient veränderlich iſt, und bey vermehrtem ſenkrechten Druck abnimmt.

III. Zuſaz. Die Reibung des Nußbaumholzes auf Meſſing iſt nach den Tabellen C bey trockenen Flächen am größten, und wächst bey vergrößerter Berührungsfläche, wie es die Vergleichung der XVIIten und XIXten Tabelle offenbar darthut; endlich nimmt der Reibungscoefficient ab, wenn man den ſenkrechten Druck verſtärket.

IV. Zuſaz. Die nemlichen Reſultate geben die in D angeführten beyden Tabellen für die Reibung des Eiſens auf Lava.

V. Zuſaz. Bey der Reibung des Eiſens auf Olivenholz in den Tafeln E iſt erſtens die Reibung bey den Verſuchen Tab. XIII. bedeutend größer als in der danebenſtehenden Tab. XXVIII., bey den lezten Verſuchen wurde nemlich eine friſche Unſchlittſchmier aufgetragen, hingegen bey den Verſuchen Tab. XIII. die alte Schmier beybehalten, da doch ſchon vorher eine Menge Verſuche bey eben dieſer Schmier gemacht wurden, die Ximenes in der XII. Tab. vortrug, und gegenwärtig weggelaſſen ſind. Da ferner durch die

wiederholten Verſuche die Berührungsflächen immer eine gröſſere Politur erhalten, ſo ſind zweytens in den ſpätern Tabellen unter gleichen Umſtänden die Reibungscoefficienten immer kleiner. Die in der Tabelle XXV. angeführten Verſuche wurden nach der Angabe von Ximeneſes mit gebrauchter Unſchlittſchmier gemacht, allein es läßt ſich vermuthen, daß darin entweder ein Schreib- oder Druckfehler zum Grunde liege, ſollte wohl Ximenes die auffallende Verſchiedenheit der Reibungscoefficienten mit jenen Tab. XXII. unter ganz gleichen Umſtänden nicht bemerkt haben? es wurde alſo dafür angenommen, daß in der lezten Tabelle XXV. das Unſchlitt abgewiſcht wurde. Sonſt gelten bey dem Reibungscoefficienten die bisher gemachten Beobachtungen.

VI. Zuſaz. Vermög der bey F enthaltenen Tabellen hat die Gröſſe der Berührungsfläche bey der Reibung des Eiſens auf Meſſing keinen bemerkbaren Einfluß, hingegen durch die gebrauchte Schmier wird die Reibung wieder auſſerordentlich vermindert, ſo wie zugleich der Reibungscoefficient abnimmt, wenn der Druck vermehrt wird.

VII. Zuſaz. Aus allen Verſuchen in den angeführten Tabellen ergiebt ſich

a. daß bey den angeführten Materialien allemal die gebrauchte Unſchlittſchmier zur Verminderung der Friction ſehr viel beyträgt;

b. daß bey einerley ſenkrechten Druck die Reibung bey der gröſſern Berührungsfläche gröſſer ſey, nur bey der Reibung der Metalle aufeinander war dieſer Einfluß ganz unmerklich.

c. So lange die ſich berührenden Oberflächen der Körper die gehörige Politur noch nicht erlangt haben, ſo wächst im Anfange mit dem ſenkrechten Drucke Q der Reibungscoefficient λ, nimmt aber wieder ab, wenn Q ſtets vermehrt wird; man ſehe die I, II, IV, VIII, IX und XIIIte Tabelle.

d. Wenn aber durch viele vorangegangene Verſuche die berührenden Flächen die größtmögliche Politur bereits erlangt haben, ſo nimmt der Reibungscoefficient λ allemal ab, wenn der Druck Q vermehrt wird, man ſehe die Tabellen XV bis XXXIII, zugleich entdecket man bey dieſer Abnahme eine gewiſſe Regelmäſſigkeit.

VIII. Zuſaz. Da der Reibungscoefficient bey zunehmendem Drucke zwar ſtets abnimmt, aber doch nie ganz verſchwinden kann, ſo vermuthete Ximenes, daß das Verhältniß zwiſchen dem ſenkrechten Druck und der Reibung dem Verhältniſſe der Coordinaten zwiſchen den Aſymptoten einer Hyperbel (höhere Geometr. §. 321.) gleich ſey.

§. 62.

Aufgabe. (Fig. 25.)

In einer Hyperbel ſind zwiſchen den Aſymptoten CG, CH die Ordinaten $PM = y$, $P'M' = y'$, und die Differenz der Abſciſſen $CP = x$, $CP' = x'$, das iſt $PP' = x' - x = z$, gegeben, man ſoll die kleinere Abſciſſe $CP = x$ ſuchen.

Auflöſung.

1. Wenn man die Potenz der Hyperbel mit p^2 bezeichnet, ſo iſt ſowohl $xy = p^2$, als
$x'y' = p^2$ (höhere Geometr. §. 322.), alſo

2. $xy = x'y' = (x+z)y' = xy' + zy'$, folglich $xy - xy' = zy'$ alſo

3. $x = \frac{z.y'}{y-y'}$

I. Zuſaz. Nimmt man nicht den Mittelpunct C der Hyperbel, ſondern einen andern A zum Anfangspuncte der Abſciſſen, ſo iſt nun $CA = b$ eine beſtändige Größe, ſezet man daher $AP = u$, $AP' = u'$, ſo iſt $x = b + u$, und $x' = b + u'$, alſo $b = x - u = x' - u'$.

II. Zuſaz. Ferner iſt $PP' = z = x' - x = u' - u$.

§. 63.

Aufgabe. (Fig. 25.)

Aus den Coordinaten $AP = u = 200$; $PM = y = 88$, ferner $AP' = u' = 2600$, und $P'M' = y' = 44$ die beſtändige Größe $CA = b$, und die Potenz p^2 der Hyperbel zu ſuchen.

Aufloſung.

1. Gemäß der Aufgabe nebſt Zuſäzen des vorhergehenden §. iſt

$PP' = z = u' - u = 2600 - 200 = 2400$, mithin

2. $CP = x = \frac{zy'}{y-y'} = \frac{2400 \times 44}{88 - 44} = 2400$, alſo

3. die beſtändige Größe $b = x - u = 2400 - 200 = 2200$ und

4. die Potenz $p^2 = xy = 2400 \times 88 = 211200$.

I. Zuſaz. Sezet man die Coordinaten $AP'' = u''$, $P''M'' = y''$, ſo iſt $CP'' = x'' = b + u''$, mithin $(b + u'')y'' = p^2$, alſo $y'' = \frac{p^2}{b+u''}$, das iſt,

wenn aus den beyden gegebenen Coordinaten x, y; und x′, y′ einmal die Potenz der Hyperbel p^2, und die unveränderliche Größe b beſtimmt iſt, ſo läßt ſich für jede beliebige Abſciſſe u″ die entſprechende Ordinate y″ finden.

II. Zuſaz. Bey der gegenwärtigen Aufgabe, das iſt, für b = 2200, und p^2 = 211200, iſt für u″ = 800, $y'' = \frac{211200}{2200+800} = \frac{211200}{3000} = \frac{2112}{30} = 70$ beynahe.

III Zuſaz. Wenn Q den ſenkrechten Druck, F die Reibung bezeichnen, ſo iſt für Q : F = 1000 : $\varkappa$; $\varkappa = 1000\,\frac{F}{Q} = 1000\,\lambda$ (§. 58). Ximenes fand nun bey ſeinen Verſuchen, daß wenn man die Preſſungen als Abſciſſen u, u′ u. ſ. f. auf den Aſymtoten einer Hyperbel nimmt, die entſprechenden Ordinaten y, y′ u. ſ. w. jedesmal den Exponenten des obigen Verhältniſſes $\varkappa = 1000\,\lambda$ geben.

§ 64.

Aufgabe.

Für zwey Körper, deren Oberflächen bereits die größtmöglichſte Politur erlangt haben, den Reibungscoefficienten für jeden beliebigen ſenkrechten Druck anzugeben.

Auflöſung.

1. Man beſtimme durch einen Verſuch bey dem bekannten Druck Q die entſprechende Reibung F, und ſuche

2. durch einen zweyten Verſuch für einen andern Druck Q′ ebenfalls die Größe F′ der Reibung, ſo iſt dadurch

Tab. III. §. 65.

B.

Q oder u	Eiſen auf Lava				Eiſen auf wildem Olivenholze.				Eiſen auf Meſſing			
	mit Unſchlitt Tab. XXVI.		abgewiſcht Tab. XXVII.		mit Unſchlitt Tab. XXVIII.		abgewiſcht Tab. XXIX.		mit Unſchlitt Tab. XXI.		abgewiſcht Tab. XX.	
	1000 λ	y	1000 λ	y	1000 λ	y	1000 λ	y	1000 λ	y	1000 λ	y
100	55	43,9	185	154,1	26	20,4	45	45	95	91,8	137	137
200	42	42	182	150,6	20	20	43	44,5	88	88	132	135,1
300	40	40,2	166	147,2	18	19,6	39	44	84	85,1	135	133,2
400	37	38,6	149	144,1	17	19,2	44	43,5	81	81,2	137	131,3
500	34	37,1	141	141	17	18,8	44	43	76	78,2	130	129,6
600	32	35,7	136	138,1	17	18,4	44	42,6	73	75,4	125	127,8
700	31	34,4	131	135,2	17	18,1	43	42,1	70	72,8	121	126,1
800	29	33,2	125	132,6	16	17,7	43	41,7	68	70,4	119	124,5
900	28	32,1	122	130	16	17,4	42	41,2	66	68,1	116	122,9
1000	27	31,1	120	127,5	15	17,1	42	40,8	65	66	114	121,3
1100	26	30,1	118	125,1	15	16,8	41	40,4	64	64	113	119,8
1200	26	29,2	117	122,7	15	16,5	41	40	62	62,1	112	118,3
1300	25	28,3	115	120,5	15	16,2	41	39,6	61	60,3	112	116,9
1400	24	27,5	114	118,4	15	15,9	40	39,2	60	58,7	111	115,5
1500	24	26,7	113	116,3	15	15,6	40	38,8	60	57,1	110	114,1
1600	23	26,0	112	114,3	15	15,4	39	38,4	58	55,6	109	112,7
1700	23	25,3	111	112,4	15	15,1	39	38	56	54,2	108	111,4
1800	23	24,6	110	110,5	15	14,9	38	37,7	56	52,8	107	110,1
1900	23	24	108	108,7	15	14,6	37	37,3	55	51,5	107	108,9
2000	22	23,4	107	106,9	14	14,4	37	37	53	50,3	106	107,7
2100	22	22,9	105	105,3	14	14,2	37	36,6	52	49,1	105	106,4
2200	22	22,3	104	103,6	14	14	36	36,3	48	48	104	105,3
2300	22	21,8	102	102	14	13,8	36	36	47	46,9	103	104,1
2400	21	21,3	101	100,5	14	13,6	36	35,6	46	45,9	103	103
2500	20	20,9	99	99	14	13,4	35	35,3	45	44,9		101,9
2600	20	20,4		97,5	14	13,2	35	35	44	44		100,8
2700	20	20		96,1	13	13		34,7		43,1		99,8

u = 200	u = 500	u = 200	u = 100	u = 200	u = 100
y = 42	y = 141	y = 20	y = 45	y = 88	y = 137
u′ = 2700	u′ = 2500	u′ = 2700	u′ = 2600	u′ = 2600	u′ = 2400
y′ = 20	y′ = 99	y′ = 13	y′ = 35	y′ = 44	y′ = 103
b = 2073	b = 4214	b = 4443	b = 8650	b = 2200	b = 6868
p^2 = 95466	p^2 = 664674	p^2 = 92860	p^2 = 393750	p^2 = 211200	p^2 = 954616

Vergleichungstabelle
der durch Verſuche gefundenen und berechneten Reibungscoefficienten.

A.

Q oder u	Nußbaum auf Lava				Nußbaum auf wildem Olivenholze				Nußbaum auf Meſſing			
	mit Unſchlitt Tab. XXX.		abgewiſcht Tab. XXXI.		mit Unſchlitt Tab. XXXII.		abgewiſcht Tab. XXXIII.		mit Unſchlitt Tab. XIX.		abgewiſcht Tab. XVIII.	
	1000 λ	y	1000 λ	y	1000 λ	y	1000 λ	y	1000 λ	y	1000 λ	y
100	52	46,5	230	205,6	97	97	180	174,8	100	86, 6	110	110
200	46	46	220	202,8	87	96,7	172	172	89	84,7	107	109,7
300	45	45,5	200	200	90	96,4	166	169,2	83	83	102	109,4
400	42	45	197	197,2	95	96,1	162	166,5	81	81,3	106	109,1
500	42	44,8	198	194,6	97	95,8	160	163,9	77	79,7	108	108,8
600	41	44,4	196	192	97	95,5	157	161,4	74	78	108	108,5
700	41	44	195	189.5	97	95,2	154	159	72	76,6	107	108,2
800	41	43,7	187	187	97	94,9	151	156,6	69	75,2	107	107,9
900	41	43,3	184	184,7	97	94,7	148	154,3	68	74,4	107	107,6
1000	40	43	180	182,3	97	94,3	146	152	67	72,5	107	107,3
1100	39	42,6	179	180	97	94	144	149,9	66	71	107	107
1200	39	42,3	177	177,8	96	93,8	143	147,8	66	69,9	107	106,7
1300	39	41,9	175	175,7	96	93,5	141	145,7	65	68,7	107	106,4
1400	39	41,6	173	173,6	96	93,2	139	143,7	65	67,6	108	106,1
1500	39	41,3	171	171,5	95	92,9	138	141,8	64	66,4	107	105,8
1600	39	40,9	169	169,5	95	92,0	137	140	63	65,4	107	105,5
1700	39	40,6	166	167,6	95	92,4	136	138	62	64,3	106	105,2
1800	39	40,3	164	165,6	95	92,1	134	136,3	61	63,3	106	104,9
1900	39	40	163	163,7	95	91,8	133	134,6	60	62,3	106	104,7
2000	39	39.7	161	161,9	94	91,6	132	132,9	59	61,4	105	104,4
2100	39	39,4	160	160,1	94	91,3	131	131	59	60,4	105	104,1
2200	38	39,1	159	158,3	93	91	129	129,6	59	59,5	104	103,8
2300	38	38,8	157	156,6	93	90,7	128	128	58	58,7	104	103,5
2400	38	38,5	155	155	92	90,5	126	126	58	57,8	104	103,3
2500	38	38,3	154	153,2	91	90,2	125	125	57	57	103	103
2600	38	38		151,7	90	90	123	123		56,2		102,7
2700	37	37,7		150,1		89,7		122		55,4		102,5

u = 200	u = 300	u = 100	u = 200	u = 300	u = 100
y = 46	y = 200	y = 97	y = 172	y = 83	y = 110
u′ = 2600	u′ = 2400	u′ = 2600	u′ = 2500	u′ = 2500	u′ = 2500
y′ = 38	y′ = 155	y′ = 90	y′ = 125	y′ = 57	y′ = 103
b = 11200	b = 6933	b = 32043	b = 5419	b = 4523	b = 35214
p^2 = 524400	p^2 = 1446600	p^2 = 3117871	p^2 = 1051608	p^2 = 400309	p^2 = 3884540

3. $\frac{F}{Q} = \lambda$, und eben ſo $\frac{F'}{Q'} = \lambda'$, mithin auch $1000\,X$, und $1000\,X'$ bekannt.

4. Nun ſeze man $Q = u$, $Q' = u'$ als zwey Abſciſſen auf den Aſymptoten einer Hyperbel, und $1000\,\lambda = y$, $1000\,\lambda = y'$ als die entſprechenden Ordinaten, berechne daraus nach §. 63. ſowohl die Potenz p^2, als die beſtändige Größe b; ſo läßt ſich dann

5. für jeden andern beliebigen Druck $Q'' = u''$ die Größe $y'' = 1000\,\lambda''$ (§. 63. I. Zuſ.) berechnen, wodurch alſo der Reibungscoefficient λ'' beſtimmt iſt.

§. 65.

Siehe die am Ende befindliche Vergleichungs-Tabelle III.

I. Zuſaz. Die erſte ſenkrechte Spalte enthält die bey den Verſuchen gebrauchten ſenkrechten Preſſungen Q der ſich reibenden Flächen, mithin die zur Berechnung nothwendigen Abſciſſen u.

II. Zuſaz. Jede von den einzelnen nebeneinanderſtehenden Tabellen, deren Aufſchrift ſich auf die §. 60. angeführten, bezieht, beſteht aus zwey Columnen, wovon die erſtere den tauſendfachen Reibungscoefficienten, alſo $1000\,\lambda$ ſo angiebt, wie man ihn unmittelbar aus den Verſuchen erhielt, die andere ſenkrechte Columne enthält die für u entſprechende Ordinate zwiſchen den Aſymptoten einer Hyperbel, für welche jedesmal aus den ganz untenſtehenden Coordinaten u, y, u', y' ſowohl die Potenz p^2, als die beſtändige Größe b berechnet wurden.

III. Zuſaz. Die Uebereinſtimmung zwiſchen $1000\,\lambda$, und y iſt im ganzen gewiß ſo gut, als man es bey dieſem Gegenſtande nur immer erwarten konnte.

§. 66.

Beſchreibung der vom Coulomb zur Unterſuchung der Reibung gewählten Vorrichtung.

1. In dem Xten Tom. der Pariſer Memoires de Mathematique et de Physique wurde die Abhandlung, durch welche Coulomb den doppelten Preis im Jahre 1781 erhielt, und in welcher die von ihm gemachten Verſuche ſowohl, als die dabey gebrauchten Vorrichtungen vollſtändig angegeben ſind, eingerückt.

2. Die Vorrichtung zu den Verſuchen um die Reibung der Körper bey gleitender Bewegung zu beſtimmen, beſtand

a. Aus einem ſehr feſt geſtellten Tiſche MAA′M′ (Fig. 26 u. 29.), wozu vorzüglich die an jedem Fuße angebrachte Querſtüze N, N′ diente.

b. Die Platte deſſelben ABB′A′ war 3 Zoll dick, 8 Fuß lang, und 2 Fuß breit.

c. Ueber dieſe Tiſchplatte wurden zwey 12 Schuhe lange und 8 Zoll dicke Stücke Eichenholz CC′, CD′ ſo in einer parallelen Lage befeſtiget, daß zwiſchen ihnen allenthalben ein 3 Zoll breiter leerer Zwiſchenraum blieb.

d. Gegen das vordere End CD lag zwiſchen dieſen beyden Hölzern eine Rolle von Guajakholz, welche ſich um eine aus Steineiche verfertigte Axe drehete; der Diameter der Rolle hielt 12 Zoll, jener der Axe 10 Linien, und ihr Gewicht m = 14 ℔.

e. Am andern Ende dieſer Hölzer war unter einem rechten Winkel der Haſpel EE′ angebracht.

f. Ueber

f. Ueber dieſe beyden Stücke Eichenholz würde eine eichene Bohle (dickes Brett oder Laden) genau wagrecht befeſtiget, an beyden Enden bey GH, und G′H′ mit hervorragenden Leiſten verſehen, dann auf der obern Fläche ſehr eben abgehobelt, und mit der Haut eines Meerhundes geglättet.

g. Die Bohle war gegen 8 Fuß lang, 16 Zoll breit und 3 Zoll dick.

h. Endlich hielt man noch mehrere eichene Bohlen bereit, welche ſämmtlich einerley Breite von 18 Zoll, aber, um den Einfluß der Berührungsflächen zu beſtimmen, verſchiedene Längen hatten; damit nun eine ſolche Bohle ſich, wenn man ſie auf die vorhergehende legte, und mit Gewichten Q beſchwerte, längſt derſelben ohne Hinderniß hin und her bewegen ließ, ſo wurden (Fig. 27.) auf ihrer untern Fläche, zu beyden Seiten, Leiſten aa′, bb′ befeſtiget, doch ſo, daß zwiſchen dieſen Leiſten, und der unbeweglichen Bohle auf jeder Seite ein Spielraum von 2 bis 3 Linien blieb. Auf der obern Fläche einer jeden ſolchen Schleiſe befand ſich vor und rückwärts (Fig. 28 u. 29.) ein Hacken c, d.

i. Wurde nun die eben angeführte Bohle oder Schleiſe auf die unbewegliche Bohle (Fig. 26.) GG′ HH′ gelegt, mit beliebigen Gewichten Q beſchwert, ſo wurde ſolche vermittels einer an dem vordern Hacken c befeſtigten und um die Rolle gelegten Schnur durch das in die Wagſchale gelegte, oder am einarmigen Hebel I K (Fig. 29.) angebrachte Gewicht F in Bewegung geſezt.

k. Wollte man nur die Reibung für den Anfang der Bewegung beſtimmen, ſo wurde (Fig. 29.) durch den am einarmigen Hebel, welcher ſich um die Unterlage I. drehete, der Schleiſe eine kleine Bewegung ertheilet, und durch den Läufer F. die Größe der Reibung beſtimmt.

l. Wollte man hingegen die Reibung während der Bewegung unterſuchen, ſo ließ man die Schleife die ganze Länge G′G der unbeweglichen Bohle durchlaufen, und beſtimmte (Fig. 27.) vermittels der in die Schale F gelegten Gewichte die Reibung, damit ſich die Schale tief genug ſenken konnte, ſo war im Boden eine Vertiefung R angebracht.

m. Um endlich die Schleife wieder in ihre erſte Lage zurück zu bringen, befeſtigte man am Hacken d (Fig. 29.) ein Seil, legte ſolches um die Welle des Haſpels, und zog durch den Haſpel die Schleife zurück.

3. Das gebrauchte Längenmaaß iſt der Pariſer Fuß in Duodecimal-Zoll und Linien getheilt, ſo wie die Gewichte ehemalige Pariſer Pfunde ſind.

I. Zuſaz. Bey der Unterſuchung der Reibung des Eichenholzes gegeneinander wurde die eichene Schleife unmittelbar auf die unbewegliche eichene Bohle gelegt, bey der Reibung hingegen des Eichen- auf Tannen-, oder des Tannenholzes auf Tannenholz wurden nach Erforderniß auf die untere Fläche der Schleiſe Liniale oder Schienen von dieſen Holzarten befeſtiget, und im leztern Falle noch ebenfalls eine Schiene von Tannenholz auf die unbewegliche Bohle angebracht.

II. Zuſaz. Auf ähnliche Art wurden Liniale von andern Materiale angebracht, und ſo die Reibung beſtimmt.

III. Zuſaz. Durch viele verſuche ergab ſich, daß die Reibung für den Anfang der Bewegung größer, als während derſelben, und daß ſelbſt für den Anfang der Bewegung nach Verſchiedenheit der Dauer der vorhergehenden Ruhe die Reibung bey eben demſelben Druck bey einigen Körpern ſehr verſchieden ſey.

§. 67.

Coulombs Verſuche über die Reibung der Körper für den Anfang der Bewegung;

A. wenn keine Schmier gebraucht wird.

Reibende Körper.	Berührungsfläche	Druck Q	Dauer der Ruhe.	Friction F	Reibungscoefficient λ = F : Q	
Eichen auf Eichenholz nach der Länge der Fibern.	3 □ Fuß	74 ℔	1′ u. 1°	30 ℔	0,405	max.
		874	1′ u. 1°	406	0,465	max.
		2474	½″	586	0,237	
			2″	1106	0,447	
			1′ u. 2°	1116	0,451	max.
	möglich-kleinſte	250	unmerklich	106	0,424	max.
		450		186	0,413	max.
		856		356	0,416	max.
Nach der Quere d. Fibern	möglich-kleinſte	50	1″ u. 1′	13	0,260	max.
		1650		450	9,273	max.
Eichen auf Tannenholz nach der Länge der Fibern.	48 □ Zoll.	50	½″	25	0,500	
			2″	30	0,600	
			10″ u. 1°	36	0,720	max.
		450	½″	256	0,569	
			2″	286	0,636	
			1′ u. 1°	284	0,631	max.
		850	½″ u. 1′	560	0,659	max.

Reibende Körper.	Berührungsfläche	Druck Q	Dauer des Drückes	Friction F	Reibungscoefficient $\lambda = F : Q$	max.
Tannen, auf Tannenholz nach der Länge der Fibern.	48 □ Zoll	50 ℔	½″	20 ℔	0,400	
			3″ u. 1°	27	0,540	max.
		250	2″ u. 1°	145	0,580	max.
		850	2″ u. 1°	480	0,565	max.
Ulm, das iſt, Rüſter auf Rüſternholz nach der Länge der Fibern.	48 □ Zoll	45	½″	6	0,133	
			3″	10	0,166	
			1′	19	0,422	
			1°	21	0,466	max.
		450	½″	100	0,222	
			3″	160	0,355	
			1′ u. 1°	207	0,460	max.
		1650	½″	356	0,216	
			2″	556	0,337	
			10″ u. 1°	756	0,458	
Eiſen auf Eichenholz nach der Länge der Fibern.	45 □ Zoll	53 ℔	½	5	0,094	
			30″	5,25	0,099	
			60″	6,5	0,123	
			1°	9	0,170	
			4 Tage	10	0,188	
		1650	½″	125	0,076	
			10″	130	0,079	
			80″	145	0,088	
			4°	200	0,121	
			16°	280	0,170	
			4 Tage	340	0,206	
Eiſen auf Eiſen.	45 □ Zoll	51	½″	15	0,294	max.
		450	momentan.	124	0,276	max.
Eiſen auf Meſſing.	45 □ Zoll	50	1/8	14	0,280	max.
		450		112	0,249	max.
	1/8	17		8	0,170	max.
		850		140	0,165	max.

B. Wenn Unſchlittſchmier gebraucht wird.

Reibende Körper	Berührungsflächen	Druck Q	Dauer der Ruhe	Friction F	Reibungscoefficient λ = F : Q	
Eichen auf Eichenholz längſt den Fibern, wo bei jedem Verſuche die Unſchlittſchmier erneuert wurde.	180 □ Zoll	47 ℔	0	6 ℔	0,128	
			4'	8	0,170	
			2°	9	0,191	
		1650	0	64	0,039	
			3''	160	0,097	
			15''	209	0,127	
			1'	280	0,170	
			4'	318	0,193	
			2°	452	0,274	
			6 Tage	622	0,377	
		3250	0	120	0,036	
			3''	320	0,098	
			15''	355	0,109	
			1'	413	0,127	
			4'	593	0,182	
			1°	880	0,271	
			2°	920	0,283	
			5 Tage	1220	0,375	
				1554	0,478	
Wobei die alte Unſchlittſchmier beibehalten wurde.	4½ □ Fuß	2310	0	187	0,081	
			2'	392	0,170	
			1°	451	0,195	
			16°	514	0,222	
		5810	0	502	0,086	
			2'	790	0,136	
			4'	860	0,149	
			9'	925	0,159	
			26'	1036	0,178	
			1°	1186	0,204	
			16°	1535	0,264	
Kupfer auf Eiſen.	45 □ Zoll	50	0	6	0,120	
			4' u. 30'	7	0,140	max.
		450	0	42	0,093	
			4' u. 2°	48	0,107	max
		1650	0	150	0,091	
			3''	158	0,095	
			4° u. 4 Tage	168	0,102	max

Anmerk. In voranſtehender Tabelle iſt die Dauer der Ruhe durch die Zeichen o, ′, ″ d. i. in Stunden, Minuten und Secunden angegeben.

I. Zuſaz. Wenn Holzarten, ohne gebrauchte Schmier, gegen einander bewegt werden, ſo erreicht die Reibung ſehr ſchnell ihr maximum, nemlich bey dem Eichenholz nach einer Minute, ſo daß nun, wenn man das eine Stück über dem andern noch länger liegen läßt, z. B. eine Stunde, und noch länger, die Reibung unverändert die nemliche Größe behält; ferner ergiebt ſich, daß die Größe der Berührungsflächen keinen merklichen Einfluß auf die Reibung habe.

II. Zuſaz. Reibet ſich ein Metall trocken über eine Holzart, ſo nimmt die Reibung mit der Zeit zu, während welcher der eine über den andern Körper ruhig lag, ſo daß erſt nach einigen Tagen das maximum erfolgt, ſchnell hingegen erfolgt lezteres bey trockner Reibung der Metalle gegeneinander.

III. Zuſaz. Wird Unſchlittſchmier gebraucht, ſo nimmt die Reibung bey Eichenholz auf Eichenholz mit der Ruhezeit immer zu, ſo daß erſt nach mehrern Tagen das maximum erfolgt, bey Kupfer auf Eiſen hingegen gelangt die Reibung ſehr ſchnell zu ihrem maximum.

IV. Zuſaz. Bey den Reibungen der Metalle gegeneinander mit und ohne Schmier nimmt der Reibungscoefficient ab, wenn die ſenkrechte Preſſung wächst.

V. Zuſaz. Nimmt man zur Beſtimmung der Reibungscoefficienten das maximum, wo nemlich die Reibung unverändert bleibt, ſo erhält man aus den angeführten Beobachtungen, wenn keine Schmier gebraucht wird,

a. Für Eichen auf Eichenholz

α. nach der Länge der Faſern	$\lambda = 0{,}429$
β. nach der Quer	$= 0{,}266$
b. Eichen auf Tannenholz	$= 0{,}670$
c. Tannen auf Tannenholz	$= 0{,}562$
d. Ulm auf Ulmholz	$= 0{,}423$
e. Eiſen auf Eichenholz	$= 0{,}197$
f. Kupfer auf Eichenholz	$= 0{,}182$

wofür aber Coulomb keine Verſuche angiebt.

g. Eiſen auf Eiſen	$= 0{,}285$
h. Eiſen auf Meſſing	$= 0{,}264$

VI. Zuſaz. Wenn Schmier gebraucht wird, ſo iſt

a. für Eichenholz auf Eichenholz

α. bey friſcher Schmier	$\lambda = 0{,}376$
β. bey alter Schmier	$= 0{,}243$
b. Kupfer auf Eiſen	$= 0{,}116$

VII. Zuſaz. Auffallend iſt die Zunahme der Reibung in den Verſuchen bey Eiſen auf Eichenholz ohne Schmier, und eben ſo bey gebrauchter Schmier bey Eichen auf Eichenholz, vom erſten Anfange, nemlich von gar keiner Ruhezeit, oder der kleinen Ruhezeit einer Secunde an, bis zur Ruhezeit mehrerer Stunden oder Tage. Warum zeigen ſich bey den ſo vielen Verſuchen des Ximenes ſo gar keine Spur von dieſem ſo merklichen Einfluße, oder erfolgten die Verſuche deſſelben durch Zufall ſämmtlich in gleichen Perioden der vorangegangenen Ruhe? Bey aller Hochachtung, die man den großen Verdienſten Coulombs ſchuldig iſt, verdient der Gegenſtand durch mehrere Verſuche eine genaue Prüfung, wie! bey einem Druck von 1650 ℔.

ſteigt die Reibung von 64 bis auf 622 ℔., und bey einem ſenkrechten Druck von 3250 ℔. wächst ſolche von 120 bis 1554 ℔. nur deßhalb, weil der beſchwerte Körper entweder ſogleich, oder erſt nach 5 oder 6 Tagen Ruhezeit in Bewegung geſezt wird! —

§. 68.

Coulombs Verſuche über die Reibung des Eichenholzes bey gleitender Bewegung ohne Schmier.

(Siehe die am Ende angefügte Tabelle IV.)

I. Zuſaz. Die erſte Spalte der Tabelle giebt die Ordnung und Anzahl der gemachten Verſuche an.

II. Zuſaz. In der zweyten Spalte iſt die Größe der ſich reibenden Flächen, das iſt, die Größe der Schleiſe, oder der ihr untergelegten Liniale ausgeſezet.

III. Zuſaz. Die dritte Spalte enthält das Gewicht Q der belaſteten Schleiſe, und daraus wurde

IV. Zuſaz. der auf die Fläche eines Quadratfußes treffende Druck q in der 4ten Spalte berechnet.

V. Zuſaz. Die fünfte Spalte giebt das Gewicht P der belaſteten Wagſchale an, wodurch nach anfänglich erfolgter Erſchütterung oder kleinen Stoß die Bewegung fortgeſezt wurde.

VI. Zuſaz. Der ganze durchloffene Raum der Schleiſe betrug gewöhnlich 4 Fuß. Mit aller Sorgfalt wurde die Zeit beſtimmt, während welcher die beyden erſten, und dann die beyden andern Schuhe von der Schleiſe hinterlegt wurden, dieſe Zeitſecunden ſind in der 6ten und 7ten Spalte angeführt.

Coulombs Verſuche über die Reibung des Eichenholzes bey gleitender Bewegung ohne gebrauchte Schmier.

A. nach der Richtung der Holzfaſern.

Nro.	Größe der Berührungsfläche.	Druck Q in ℔.	Antheil des Druckes auf einen □ Fuß in ℔.	Gewicht d. Wagſchale P in ℔.	Dauer der Bewegung in Secunden: durch die erſten 2 Fuße	durch die lezten 2 Fuße	Friction F in ℔.	Reibungscoefficient $\lambda = \frac{F}{Q}$	Anmerkungen.
1	3 □ Fuß. = 432 □ Zoll.	74	24,66	12	*	*	–	–	* die Schleife bekam eine unterbrochene langſame Bewegung.
2				14	3,5	2,5	13,301	0,180	
3		874	291,33	94	*14,0	*9,5	–	–	*die Bewegung war unſicher.
4				105	3,0	1,5	92,098	0,105	
5		2474	824,66	250	*	*	–	–	*die Bewegung langſam und ungewiß.
6				270	4,0	2,5	252,747	0,102	
7	¼ □ Fuß = 36 □ Zoll.	47	188	5	*	*	5,000	0,106	*die Bewegung langſam aber beynahe gleichförmig.
8				9	1,5	0,5	4,827	0,103	
9		447	1788	45	*	*	–	–	*wenn man die Schleife mit einer Geſchwindigkeit eines Schuhes in Bewegung ſezt, ſo dauert ſolche fort.
10				54	3,0	1,5	47,353	0,106	
11		1647	6588	166	5,5	2,5	158,465	0,096	
12				172	4,5	2,0	160,548	0,097	
13	möglich=kleinſte	47		4,5	7,5	3,0	4,361	0,093	
14				6,5	1,5	1,0	3,935	0,084	
15		447		36	*	*	–	–	*mit der anfängl. Geſchwindigkeit von 5=6 Zoll dauert die Bewegung fort.
16				41	4,0	1,5	36,664	0,082	
17		847		60	*	*	–	–	* mit der anfänglichen Geſchwindigkeit von 7=8 Zoll dauert die Bewegung fort.
18				68	4,0	1,0	58,228	0,069	

B. Wenn ſich die Fibern rechtwinklicht durchkreuzen.

Nro.	Größe der Berührungsfläche.	Druck Q in ℔.	Antheil des Druckes auf einen □ Fuß in ℔.	Gewicht d. Wagſchale P in ℔.	durch die erſten 2 Fuße	durch die lezten 2 Fuße	Friction F in ℔.	Reibungscoefficient	Anmerkungen.
19	¼ □ Fuß = 36 □ Zoll	47	188	5	4,0	2,0	4,566	0,097	
20		147	588	15	4,5	2,5	14,086	0,096	
21		447	1788	51	3,0	2,0	45,647	0,102	
22		847	3388	97	3,5	1,5	86,921	0,103	
23	möglich=kleinſte	47		5	4,5	2,5	4,681	0,100	
24		447		48	10,5	5,0	47,446	0,106	
25				58	1,5	1,0			
26		1647		160	10,0	7,0	158,337	0,096	
27				172	4,0	2,5	160,548	0,098	

VII. Zuſaz. Wenn bey gleichförmig beſchleunigter Bewegung die Schleife während t Secunden den Raum s, und während $t+t'$ Sec. den Raum $s+s'$ hinterlegt, ſo daß während der erſten Zeit t der Raum s, und während der darauf folgenden Zeit t' der Raum s' durchloſſen wird, ſo iſt
$s=\frac{1}{2}kt^2$, und $s+s'=\frac{1}{2}k(t+t')^2$ (R. Mech. §.39. II Zuſ.)
mithin $s : s+s'=t^2 : (t+t')^2$;
iſt nun $s=s'$, alſo $s : s+s'=1 : 2$; ſo iſt
$t^2 : (t+t')^2=1 : 2$, mithin $t : t+t'=1 : \sqrt{2}$
alſo $t\sqrt{2}=t+t'$, folglich
$t'=t\sqrt{2}-t=t(\sqrt{2}-1)=0{,}414\,t$, das iſt, die nächſtfolgende Zeit t', während welcher eben derſelbe Raum hinterlegt wird, muß 0,414 der vorhergehenden Zeit t seyn; mithin umgekehrt; wenn die beyden aufeinander folgenden Zeiten t, t' in welchen gleiche Räume hinterlegt werden, dieſes Verhältniß haben, ſo iſt die Bewegung gleichförmig beſchleunigt.

VIII. Zuſaz. Da die in den beyden Spalten angeführten Zeiten beynahe das angeführte Verhältniß haben, ſo läßt ſich bey dieſen Verſuchen die erfolgte Bewegung als gleichförmig beſchleunigt annehmen.

IX. Zuſaz. Die Kraft, wodurch die Bewegung hervorgebracht wird, iſt nun P, welcher aber die Reibung F widerſteht, da alſo die Bewegung gleichförmig beſchleunigt, ſo iſt P - F eine beſtändige Größe (Reine Mech. §.45. III Zuſ.), folglich weil P unveränderlich iſt, ſo iſt's auch die Reibung F.

§. 69.

Aufgabe. (Fig 26 und 29.)

Aus den angeführten Verſuchen die Reibung F ſowohl, als den Reibungscoefficienten λ zu beſtimmen,

das iſt, die in den beyden lezten Spalten der Tabelle IV. angeführten Zahlen zu berechnen.

Aufløſung.

1. Aus der Tabelle iſt jedesmal ſowohl der ſenkrechte Druck Q, als die bewegende Kraft P, ſo wie durch §. 66. 2; d das Gewicht der Rolle m = 14 ℔. gegeben.

2. Am Umfange der Rolle wirkt nun die Kraft P, und nach entgegengeſezter Richtung die ebenfalls unveränderliche Kraft, nemlich die Reibung F, ſo, daß alſo

3. an D die bewegende Kraft = P - F iſt.

4. Die geſammte Bewegung beſteht erſtlich in der Bewegung der Rolle, ferner jener der belaſteten Schleiſe Q, und endlich jener der mit Gewichten beſchwerten Wagſchale P, die ſich in die gemachte Grube verſenkt.

5. Da eine Bewegung ohne die andere nicht erfolgen kann, und eben dieſer Verbindung wegen jeder, am Ende der Zeit t, eben dieſelbe Geſchwindigkeit u zukömmt, und eben derſelbe Raum s hinterlegt wird, ſo iſt

6. wenn b den Halbmeſſer, und γ die Winkelgeſchwindigkeit der Rolle bezeichnen

7. $u = b\gamma$, alſo $du = bd\gamma$;

8. Für die Axe der Rolle iſt ihr Moment der Trägheit $Mk^2 = \frac{1}{2}mb^2$ (Reine Mech. §. 187. I. Zuſ.), mithin

9. würde dieſer Rolle am Umfange D die Kraft, deren Moment $= \frac{Mk^2 d\gamma}{2g dt}$ (§. 11.) $= \frac{\frac{1}{2}mb^2 d\gamma}{2g dt}$

$= \frac{\frac{1}{2} m b d u}{2 g d t}$ iſt, eben dieſelbe Geſchwindigkeit erthei- len, mithin iſt am Umfange die dazu erforderliche Kraft

10. $= \frac{\frac{1}{2} m d u}{2 g d t}$

11. Um der belaſteten Schleife Q eben die Be- wegung zu ertheilen, iſt auf ihrem Schwerpunct die Kraft $\frac{Q d u}{2 g d t}$ (§. 6.) erforderlich, die man ohne wei- ters auf den Punct D verlegen kann.

12. Endlich ertheilt am Schwerpunct der beſchwer- ten Schale P die Kraft $\frac{P d u}{2 g d t}$ wieder die nemliche Geſchwindigkeit, und dieſe Kraft läßt ſich ebenfalls unverändert auf den Umfang der Rolle, nach D ver- legen.

13. Da alſo die 3 Kräfte Nr. 10, 11, 12 an D der Kraft P-F (Nr. 3.) an eben dieſem Punct gleichgel- tend ſind, ſo iſt

14. $\frac{\frac{1}{2} m d u}{2 g d t} + \frac{Q d u}{2 g d t} + \frac{P d u}{2 g d t} = P - F$, mithin

15. $du\,[Q + P + \frac{1}{2} m] = (P - F)\, 2 g d t$

$$du = 2 g d t. \frac{P - F}{Q + P + \frac{1}{2} m}.$$

16. Da nun alle Größen, und ſelbſt F (§. 68. IX. Zuſ.) beſtändige Größen ſind, auſſer u und t, ſo iſt

17. $u = 2 g t. \frac{P - F}{Q + P + \frac{1}{2} m}$, wo keine Const. hinzukömmt, indem für $t = 0$, auch $u = 0$ iſt.

18. Ferner iſt $ds = u\,dt$ (Reine Mechan. §. 38.), alſo

19. $u\,dt = ds = 2g\,t\,dt.\ \frac{P-F}{Q+P+\frac{1}{2}m}$, mithin

20. $s = g\,t^2.\ \frac{P-F}{Q+P+\frac{1}{2}m}$, wo ebenfalls für $t=0$, auch $s=0$ iſt, folglich keine Const. addirt werden darf.

21. Aus dieſer Gleichung iſt

$$\frac{s\,[Q+P+\frac{1}{2}m]}{g\,t^2} = P-F, \text{ folglich}$$

22. $F = P - \frac{s\,[Q+P+\frac{1}{2}m]}{g\,t^2}$, und

23. $\lambda = \frac{F}{Q}$ (§. 58.) $= \frac{1}{Q}\left[P - \frac{s\,[Q+P+\frac{1}{2}m]}{g\,t^2}\right]$

wodurch die Aufgabe aufgelöſet iſt.

I. Zuſatz. Nimmt man als Beyſpiel §. 68. den zweyten Verſuch, wo $P=14$, $Q=74$, $s=4$, $t=3,5+2,5=6$, ferner nach §. 66. 2. d; $m=14$ ℔., ſo wird $Q+P+\frac{1}{2}m = 95$; alſo

$$\begin{aligned} \log. g &= 1,1788527 \text{ (N. Mech. §. 130. VI. Zuſ.)} \\ \log. t^2 &= 1,5563025 \\ \hline \log. g.t^2 &= 2,7351552 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. [Q+P+\tfrac{1}{2}m] &= 1,9777236 \\ \log. s. &= 0,6020600 \\ \hline \log. s\,[Q+P+\tfrac{1}{2}m] &= 3,5797836-1; \text{ da ferner} \\ \log. g\,t^2 &= 2,7351552, \text{ ſo iſt} \\ \hline \log. \frac{s\,[Q+P+\frac{1}{2}m]}{g\,t^2} &= 0,8446284-1 \\ &= \log. 0,69924, \text{ folglich} \end{aligned}$$

$F = 14 - 0,699 = 13,301$, und

$\lambda = \frac{F}{Q} = \frac{13,301}{74} = 0,180$, wodurch die Zahlen Tab. IV. in den Spalten 8 und 9 beſtimmt ſind.

II. Zuſaz. Auf eben dieſe Weiſe wurden bey den übrigen Verſuchen die Größen F und λ berechnet, und in obige Tabelle eingerückt.

III. Zuſaz. Vergleicht man die Reibung F mit dem Drucke Q, ſo nimmt ihr Verhältniß, das iſt, der Reibungscoefficient λ ab, wenn der Druck wächst, ſo wie bey den früher angeführten Verſuchen des Ximenes; da indeſſen dieſe Abnahme ſehr unbedeutend iſt, ſo läßt ſich für die Reibung des Eichenholzes auf Eichenholz ohne Schmier

a. nach der Richtung der Fibern $\lambda = 0{,}102$

b. wenn ſich leztere rechtwinklicht durchkreuzen

$\lambda = 0{,}100$ ſezen.

IV. Zuſaz. Aus vielen Verſuchen mit Eichen, Tannen (Sapin) und Ulmenholz giebt Coulomb als mittlere Zahlen, wenn keine Schmier gebraucht wird

a. Eichen auf Tannenholz $\lambda = 0{,}158$

b. Tannen auf Tannenholz $= 0{,}167$

c. Ulm auf Ulmholz $= 0{,}109$

§. 70.

Coulombs Verſuche über die Reibung während der Bewegung des Eiſens und Kupfers auf Eichenholz ohne Schmier.

Nr.	Reibende Körper	Art der Reibung	Berührungsfläche	Druk Q in ℔	Gewicht der Wagſchale P = F	Zeit in Sec.	$\lambda = \frac{F}{Q}$	Bemerkungen
1	Eiſen auf Eichenholz ohne Schmier	nach der Länge der Fibern.	45 Qdr. Zoll	53	45	132	0,085	
2					6,5	3	0,123	
3					9,0	0,75	0,170	
4				453	35	232	0,077	
5					44	12	0,097	
6					53	6,5	0,117	
7					65	2,5	0,144	
8					78	1	0,172	
9				853	67	*	0,079	* ungewiß und langſam
10					80	40	0,094	
11					105	10	0,123	
12					130	2,5	0,152	
13					155	1	0,182	
14				1653	125	*	0,076	* langſam und ungewiß
15					135	1320	0,082	
16					160	74	0,097	
17					185	22	0,112	
18					210	9	0,127	
19					235	2,5	0,142	
20					260	1	0,157	
21		nach der Quere der Fibern	möglich kleinſte	1653	115	476	0,070	
22					135	220	0,082	
23					160	130	0,097	
24					185	48	0,112	
25					210	15	0,127	
26					235	6,5	0,142	
27					260	2,2	0,157	

Nr.	Reibende Körper	Art der Reibung	Berührungsfläche	Druk Q in ℔.	Gewicht der Wagſchale P = F	Zeit in Sec.	$\lambda = \frac{F}{Q}$	Bemerkungen
28	Kupfer auf Eichenholz	längſt den Holzfaſern	45 Qdr. Zoll	50	2,5	288	0,050	
29					3,5	88	0,070	
30					4,5	28	0,090	
31					6,5	2,5	0,130	
32					9,5	0,75	0,190	
33				450	23	1440	0,051	
34					28	360	0,062	
35					33	200	0,073	
36					43	40	0,096	
37					53	8	0,118	
38					65	1,5	0,144	
39					78	0,83	0,173	
40				850	42	*	0,049	* langſam und ungewiß
41					67	180	0,079	
42					80	64	0,094	
43					105	12	0,123	
44					130	3	0,153	
45					155	0,83	0,182	

I. Zuſaz. Die in der ſiebenten Spalte angeführten Zahlen zeigen die Dauer in Secunden an, während die Schleife die Länge eines Fußes gleichförmig durchlief.

II. Zuſaz. Da die Bewegung allemal gleichförmig war, ſo iſt die bewegende Kraft P mit der Reibung F jedesmal im Gleichgewichte (§. 10.), mithin P = F, ſo daß alſo die ſechste Spalte unmittelbar die Reibung angiebt.

III. Zuſaz. Aus den beyden Spalten 6 und 7 erhellet, daß mit der Geſchwindigkeit der Bewegung die Reibung ebenfalls wächst; nimmt man die Verſuche Nr. 16-20, ſo wächst die Reibung in einer arithmetiſchen Progreſſion ſtets um 25 ℔., während die Zeit beynahe in einer geometriſchen Progreſſion jedesmal um $\frac{1}{3}$ abnimmt, alſo die Geſchwindigkeit in eben dieſem Verhältniſſe zunimmt. Es iſt nemlich

Nr.	F	t	t′
16.	160	74;	74
17.	185 = 160 + 25	22;	$\frac{1}{3}$. 74 = 24,66
18.	210 = 160 + 2. 25	9;	$\frac{1}{3^2}$. 74 = 8,22
19.	235 = 160 + 3. 25	2,5;	$\frac{1}{3^3}$. 74 = 2,74
20.	260 = 160 + 4. 25	1;	$\frac{1}{3^4}$. 74 = 1,913

wo die nach der geometriſchen Reihe berechneten Zahlen t′ immer genau genug mit t zuſammenſtimmen.

IV. Zuſaz. Die Größe der Berührungsflächen ſcheint auf die Reibung keinen merklichen Einfluß zu haben, indem bey der kleinſten Berührungsfläche in den Verſuchen Nr. 21 - 27. die Reibung eben dieſelbe beynahe iſt, wie in den Verſuchen Nr. 14 - 20 bey einer Berührungsfläche von 45 □ Zoll.

V. Zuſaz. Die Reibung des Kupfers auf Eichenholz iſt beynahe eben dieſelbe wie zwiſchen Eiſen und Eichenholz.

(S. die am Ende befindliche Tabelle V.)

Coulombs Verſuche über die Reibung des Eichenholzes bey gebrauchter Schmier während der Bewegung.

Nro.	Art der Schmier	Berührungsfläche	Druck Q in ℔.	Gewicht der Wagſchale P in ℔.	Bewegung der Schleife	$\lambda = \frac{P}{Q}$	C in ℔.	$\lambda' = \frac{P-C}{Q}$
1	Unſchlitt bey jedem Verſuche erneuert.	180 Duodec. □ Zoll	3250	118	langſam und ungewiß	0,0363	4,7578	0,0348
2				124	beſchleunigt	0,0381		0,0367
3			1650	64	langſam und ungewiß	0,0388		0,0359
4				70	beſchleunigt	0,0424		0,0395
5			850	36	langſam und ungewiß	0,0423		0,0368
6			450	21	beynahe gleichförmig	0,0467		0,0361
7			250	13,5	gleichförmig 1 Fuß in 60 Sec.	0,0540		0,0350
8				20	beſchleunigt	–		–
9			50	6,5	gleichförmig 1 Fuß in 7,5 Sec.	0,1300		0,0348
10				13	beſchleunigt			
11	Wagenſchmier bey jedem Verſuche erneuert	180 Duodec. □ Zoll.	50	13	gleichförmig 1 Fuß in 540 Sec.	0,2600	11,25	0,0350
12				16	gleichförmig 1 Fuß in 4 Sec.	0,3200	13,75	0,0450
13				22	gleichförmig 1 Fuß in 1,5 Sec.	0,4400	19,75	0,0450
14			250	20	auſſerordentlich langſam	0,0800	11,25	0,0350
15				26	gleichförmig 1 Fuß in 4 Sec.	0,1040	13,75	0,0490
16				32	gleichförmig 1 Fuß in 1,5 Sec.	0,1280	19,75	0,0490
17			450	34	gleichförmig 1 Fuß in 4,5 Sec.	0,0755	13,75	0,0450
18				40	gleichförmig 1 Fuß in 1,5 Sec.	0,0889	19,75	0,0450
19	Die abgewiſchte Bohle blieb fettig.	möglich kleinſte	50	3	die Bewegung gieng un-unterbrochen fort	0,0600		
20			250	15		0,0600		
21			450	28		0,0622		
22			850	50		0,0589		
23			1650	100		0,0606		

I. Zuſaz. Die erſten ſechs Spalten dieſer Tabelle ſind für ſich klar, nimmt man ferner auf kein anderes Hinderniß der Bewegung, als jenes der Reibung Rückſicht, ſo iſt für die gleichförmige Bewegung, die faſt allenthalben bey den Verſuchen Statt hatte, das Gewicht P der Reibung F gleich, mithin der Reibungscoefficient, oder $\lambda = \frac{P}{Q}$, wonach die ſiebente Spalte berechnet iſt.

II. Zuſaz. Aus eben dieſer ſiebenten Spalte ergiebt ſich,

a. daß durch gebrauchte Unſchlittſchmier die Reibung ſehr beträchtlich vermindert werde, wenn die Berührungsflächen beträchtlich ſind, daß aber

b. bey ſehr kleinen Berührungsflächen, oder in den Verſuchen Nr. 19 - 23. die Verminderung nicht ſtatt habe, ſo zwar, daß Coulomb eben dieſelbe Reibung fand, es mochte bey jedem Verſuche Unſchlitt gebraucht, oder aber dieſes abgewiſcht werden, ſo daß die Theile nur fettig blieben.

c. Ferner ſieht man, daß zwar auch durch Wagenſchmier die Reibung vermindert werde, daß aber Unſchlitt vorzuziehen ſeye, und daß endlich

d. allemal bey zunehmendem ſenkrechten Drucke Q der Reibungscoefficient abnimmt.

Anmerk. man vergleiche den 61. §. VII. Zuſ.

III. Zuſaz. Es läßt ſich leicht einſehen, daß zwar durch die gebrauchte Schmier die Reibung vermindert, aber auch der Zuſammenhang der Berührungsflächen vermehrt, alſo ein neues Hinderniß C

der Bewegung geſezt werde, ſo daß bey gleichförmiger Bewegung $P = F + C$, mithin $F = P - C$, folglich der corrigirte Reibungscoefficient $\lambda' = \frac{F}{Q} = \frac{P-C}{Q}$ ſeye.

IV. Zuſaz. Da C eine unveränderliche Größe iſt, ſo lange die Berührungsflächen und die Geſchwindigkeit der Bewegung dieſelben bleiben, ſo wird im Quotienten der Einfluß von C um ſo merklicher, je kleiner Q iſt, es läßt ſich daher vermuthen, daß die Zunahme von $\lambda = \frac{P}{Q} = \frac{F+C}{Q}$, wenn Q abnimmt (II. Zuſ. d.), nur in dem Einfluſſe der Cohaesion ihren Grund hat.

V. Zuſaz. Legt man dieſe Vermuthung indeſſen zum Grunde, ſo müßte für 2 Verſuche bey gleichen Berührungsflächen und Geſchwindigkeiten, wenn für ſelbe Q, q den ſenkrechten Druck, und P, p die in der Wagſchale befindlichen Gewichte bezeichnen, ſo wie C die Cohaesion:

$\lambda' = \frac{P-C}{Q} = \frac{p-C}{q}$ ſeyn, woraus ſich C beſtimmen läßt.

VI. Zuſaz. Nimmt man nemlich den erſten Verſuch, ſo iſt $Q = 3250$, und $P = 118$, ferner im 9ten Verſuche iſt $q = 50$, $p = 6{,}5$, alſo

$\lambda' = \frac{118 - C}{3250} = \frac{6{,}5 - C}{50}$, oder $\frac{118-C}{65} = 6{,}5 - C$;

mithin $118 - C = 422{,}5 - 65\,C$,

$64\,C = 422{,}5 - 118 = 304{,}5$, und

$C = \frac{304{,}5}{64} = 4{,}7578$ ℔. die bey den erſten 9 Verſuchen (mit Ausnahme Nr. 8, wo die Be-

wegung beträchtlich beſchleunigt war) die geſuchte, in der 8ten Spalte angeführte Cohaesion.

VII. Zuſaz. Aus dieſem Werthe von C läßt ſich nun jedesmal $\lambda' = \frac{P-C}{Q}$ berechnen, es iſt nemlich Nr. 1. $\lambda' = \frac{118-4,7578}{3250} = 0,0348$; auf eben dieſe Art wurde bey den folgenden Verſuchen λ' beſtimmt.

VIII. Zuſaz. Auf ähnliche Art erhält man für die Verſuche Nr. 11 und 14, dann für 12, 15 u 17, und endlich für 13, 16 und 18 bey gleichen Geſchwindigkeiten jedesmal die Größen C und λ'.

IX. Zuſaz. Bey den lezten Verſuchen, da die Berührungsflächen ſehr klein ſind, alſo die Cohaesion unmerklich iſt, bedarf der Reibungscoefficient keiner Correctur.

X. Zuſaz. Aus den zahlreichen Verſuchen fand endlich noch Coulomb, daß

a. bey beträchtlichen Berührungsflächen die Reibung des Eiſens, und eben ſo des Kupfers auf Eichenholz, wenn jedesmal friſche Unſchlittſchmier gebraucht wurde, ausserordentlich vermindert werde, für die Berührungsfläche von 45 □ Zoll und langſamer Bewegung bey einem Druck von 53 bis 1650 (die Cohaesion nicht in Anſchlag gebracht) war

α. für Eiſen auf Eichenholz $\lambda = 0,0391$

β. für Kupfer auf Eichenholz $\lambda = 0,0212$

b. Durch die Geſchwindigkeit der Bewegung nimmt die Cohaesion beträchtlich zu, ſo, daß alſo nothwendig λ wächst.

c. Alte Schmier iſt am Ende mehr ſchädlich als nüzlich.

d. Wenn die Berührungsfläche die möglich kleinſte iſt, ſo trägt die Schmier zur Verminderung der Reibung nichts bey, bey Eiſen auf Eichenholz war $\lambda = 0{,}0698$.

§. 72.

Coulombs Verſuche über die Reibung der Metalle während der gleitenden Bewegung ꝛc. ꝛc.

(Siehe die am Ende angebundene Tabelle VI.)

I. Zuſaz. Aus dem 3ten und 6ten Verſuche wurde die Größe C der Cohaesion für Eiſen auf Eiſen bey gebrauchter Unſchlittſchmier wie im vorhergehenden §. berechnet, und daraus der corrigirte Reibungscoefficient λ' beſtimmt.

II. Zuſaz. Eben ſo ergab ſich die Größe C für Eiſen auf Kupfer bey gebrauchter Unſchlittſchmier aus den Verſuchen Nr. 10 und 14, und bey aufgegoſſenem Olivenöle aus Nr. 16 und 20.

III. Zuſaz. Aus dieſer Tabelle ergiebt ſich endlich

a. daß die Unſchlittſchmier die Reibung des Eiſens auf Eiſen ſowohl, als auf Kupfer ſehr beträchtlich vermindere, daß

b. Unſchlitt eine beſſere Schmier als das aufgegoſſene Olivenöl ſey,

c. daß bey ſehr geringen Berührungsflächen hingegen die gebrauchte Schmier wenig Vortheil verſchaffe.

§. 72.

Coulombs Verſuche über die Reibung der Metalle während der gleitenden Bewegung.

A. Eiſen auf Eiſen.

Nro.	Berührungsfläche.	Arten der Schmier	Druck Q in ℔.	Zug an der Rolle P in ℔.	Bewegung der Schleife	$\lambda = \frac{P}{Q}$	C in ℔.	$\lambda' = \frac{P-C}{Q}$
1	45 Duodec. □ Zoll.	ohne Schmier	53	15	Die angefangene Bewegung geht ununterbrochen fort.	0,2830		
2			453	125	eben ſo.	0,2759		
3		Unſchlitt bey jedem Verſuche erneuert.	53	8,5	eben ſo.	0,1604	4,144	0,0822
4			453	40	Bey anfänglicher Geſchwindigkeit von 8 Zoll in 1 Sec. dauert die Bewegung fort.	0,0881	4,144	0,0791
5				45	Die erſchütterte Schleife ſezt die Bewegung fort.	0,0993	4,144	0,0902
6			1653	140	Sezt die anfängl. Geſchwindigkeit von 8 Zoll in 1 Sec. fort.	0,0846	4,144	0,0822
7				160	Sezt erſchüttert die Bewegung fort.	0,0968	4,144	0,0943

B. Eiſen auf Kupfer.

Nro.	Berührungsfläche.	Arten der Schmier	Druck Q in ℔.	Zug an der Rolle P in ℔.	Bewegung der Schleife	$\lambda = \frac{P}{Q}$	C in ℔.	$\lambda' = \frac{P-C}{Q}$
8	45 Duodecimal □ Zoll	ohne Schmier	52	12,5	Die Bewegung fängt ohne Stoß an.	0,2404		
9			452	110	ebenfalls.	0,2433		
10		Unſchlitt bey jedem Verſuche erneuert.	52	6,5	Die Schleife tritt in eine ungewiſſe Bewegung.	0,1250	3,7862	0,0522
11				7,5	Eine Erſchütterung erzeugt ſchnell beſchleunigte Bewegung.	0,1442	3,7862	0,0714
12			452	30	Die Schleife ſezt die anfängl. Bewegung von 8 Zoll in 1 Sec. fort.	0,0666	3,7362	0,0580
13				42	Bey anfänglicher Geſchwindigkeit folgt Beſchleunigung.	0,0929	3,7862	0,0845
14			1652	90	Die anfängl. Bewegung von 1 Fuß in $\frac{3}{2}$ Sec. dauert fort.	0,0344	3,7862	0,0522
15				150	Nach Erſchütterung erfolgt ſchnell beſchleunigte Bewegung.	0,0908	3,7862	0,0885

Fortſezung von B.

Eiſen auf Kupfer.

Nro.	Berührungsfläche.	Arten der Schmier	Druck Q in ℔.	Zug der Rolle P in ℔.	Bewegung der Schleife	$\lambda = \frac{P}{Q}$	C in ℔.	$\lambda' = \frac{P-C}{Q}$
16	45 Duodec. □ Zoll.	Olivenöl auf das Unſchlitt gegoſſen.	52	6,5	Erſchütterung erzeugt ſchnelle Bewegung.	0,1250	0,536	0,1147
17				10	Die Schleife ſezt ſich ſelbſt in Bewegung.	0,1923	0,536	0,1820
18			452	45	Sezet die anfängl. Bewegung von 10 Zoll in 1 Sec. fort.	0,0996	0,536	0,0984
19				56	Erſchütterung bringt ſehr ſchnelle Beſchleunigung hervor.	0,1239	0,536	0,1227
20			1652	190	Sezet die anfängl. Bewegung von 10 Zoll in 1 Sec. fort.	0,1150	0,536	0,1147
21				210	Erſchütterung ſezet die Schleiſe in Bewegung.	0,1271	0,536	0,1268
22	möglich kleinſte	Unſchlitt	847	88	Sezet die anfängl. Bewegung von 6 Zoll in 1 Sec. beſchleunigt fort.	0,1039		
23				95	Eine Erſchütterung ſezet die Schleife in Bewegung.	0,1123		
24		Olivenöl auf Unſchlitt gegoſſen.	847	106	Die ertheilte Bewegung kömmt allemal in's Stocken.	0,1251		
25				112	Erfolgt allemal bey anfänglicher Geſchwindigkeit Beſchleunigung.	0,1322		
26		die Schmier abgewiſcht, daß doch d. Theile fettig blieben.	47	5,5	Erſchütterung ſezet die Schleife in Bewegung.	0,1170		
27			447	51	eben ſo.	0,1141		
28			847	112	Sezet die anfängl. Bewegung von 2 Zoll in 1 Sec. fort.	0,1322		

d. Daß bey Metallen die Geſchwindigkeit der Bewegung auf die Reibung keinen merklichen Einfluß habe.

e. Endlich nimmt wieder λ bey vermehrtem ſenkrechtem Drucke Q; ab, wovon zum Theil der Grund in dem Einfluſſe der Cohaesion liegt.

IV. Zuſaz. Vergleichet man endlich alle bisher angeführten Verſuche der drey Naturforſcher van Muſschenbroek, Ximenes und Coulomb, ſo ſieht man, daß die Unterſuchung über die Reibung feſter Körper eine der beſchwerlichſten ſeye, und daß es bey der unendlichen Mannigfaltigkeit der Körper, ſelbſt derjenigen, die man mit einerley Namen belegt, ferner, bey dem großen Einfluſſe der Umgebungen, vorzüglich der Temperatur, wohl nie gelingen werde, ganz befriedigende Reſultate zu erhalten.

II. Abſchnitt.

Von der Steifigkeit eines Seils, dann von der Reibung bey wälzender Bewegung, und eines Seils, welches um einen Cylinder gelegt iſt.

---

§. 73.

Lehrſaz.

Wenn ein Seil um einen Cylinder, oder Rolle gelegt wird, ferner d den Durchmeſſer des Seils, r den Halbmeſſer des Cylinders oder Rolle, Q die dehnende Kraft, oder Größe der Spannung, dann m, a b unveränderliche Größen, und endlich R die aus der

Steife des Seils entſtehende Nebenlaſt bezeichnen, ſo iſt:

$$R = \frac{d^m}{r} (a + bQ)$$

Beweis.

1. Die von der Steife des Seils entſtehende Nebenlaſt hängt offenbar zum Theil von der Verflechtung, wodurch die Fäden bis auf den dritten oder vierten Theil ihrer Länge verkürzet werden, und zum Theil von der Spannung des Seils, und endlich von dem Halbmeſſer des Cylinders oder Rolle ab.

2. Durch die Verflechtung wird ein Seil um ſo ſteifer, je dicker es iſt, man kann alſo die Größe derſelben als eine Function der Seilsdicke betrachten, und ſie $= a d^m$ ſezen.

3. Dieſer aus der Verflechtung entſpringende Antheil der Nebenlaſt wird um ſo größer, je kleiner der Halbmeſſer des Cylinders iſt, um welchen das Seil ſich biegen muß, ſo daß alſo der ganze Antheil $= \frac{a d^m}{r}$ wird.

4. Legt man nun (Fig. 30.) das Seil um die verticale Rolle ACB, und bringt an die beyden Ende die Gewichte F, Q, ſo muß, wenn F ſinkt, alſo Q ſteigt, ſobald die Bewegung aus der beſchleunigten in die gleichförmige übergeht, die bewegende Kraft F, wenn man noch von der Zapfenreibung der Rolle abſtrahirt, der ſteigenden Laſt Q gleich ſeyn (§. 12. I. Zuſ.).

5. Die Steife des Seils verurſacht aber, daß die beyden Ende nicht die Richtungen der verticalen Tangenten (Reine Mech. §. 114. V und VI. Zuſ.), ſondern der Schwerpunct der ſinkenden Kraft F fällt in der ver-

ticale Linie a α, und jener der ſteigenden Laſt Q in die verticale b β, folglich

6. muß F auch bey eingetrettener gleichförmigen Bewegung noch größer als die geſammte Laſt Q ſeyn, es muß nemlich

7. $F . Ca = Q . Cb$, das iſt
$F . (CA - Aa) = Q . (CB + Bb)$ oder
$F . (r - Aa) = Q . (r + Bb)$, alſo
$F . r - F . Aa = Q . r + Q . Bb$, mithin
$F . r - Q . r = Q . Bb + F . Aa$, folglich
$F - Q = \frac{Q . Bb + F . Aa}{r}$ ſeyn.

8. Da man nun annehmen darf, daß Aa in Beziehung auf Bb, mithin bey der Abwindung die Abweichung des Seils von der verticalen Tangente durch A in Beziehung auf eben dieſe Abweichung bey dem Aufwinden des Seils in B ſehr unbeträchtlich iſt, ſo kann man $Aa = o$, mithin

9. $F - Q = \frac{Q . Bb}{r}$ ſezen.

10. Sezet man endlich die Größe Bb ebenfalls einer Function vom Durchmeſſer des Seils gleich, nemlich $Bb = b . d^m$, ſo wird

11. der von der Spannkraft herrührende Antheil $= \frac{Q . b\, d^m}{r}$, alſo

12. die ganze aus der Steife entſtehende Nebenlaſt
$$R = \frac{a . d^m}{r} + \frac{Q\, b . d^m}{r} = \frac{d^m}{r}\,(a + Q . b)$$

I. Zuſaz. Die Größe des von der Steife des Seils entſtehenden Widerſtandes iſt für den Fall be-

ſtimmt, wenn ſich die Walze um ihre Axe drehet, in dieſem Falle muß alſo bey der eingetrettenen gleichförmigen Bewegung die bewegende Kraft

$$F = Q + R = Q + \frac{d^m}{r} (a + bQ) \text{ ſeyn.}$$

II. Zuſaz. Die beyden beſtändigen Coefficienten a, b, ſo wie der Exponent m laſſen ſich nur durch mehrere Verſuche beſtimmen.

§. 74.

Aufgabe.

Die Steiſe eines Seils durch Verſuche zu beſtimmen.

I. Auflöſung. (Fig. 31 und 32.)

1. An den Balken AA′ hänge man vermittels Hacken durch das Seil dbaa′b′d′, welches um eine Walze geſchlungen iſt, das Wagbret BB′ auf,

2. beſchwere lezteres durch mehrere zugelegte Gewichte, bezeichnet nun P die ganze Laſt dieſer Gewichte nebſt dem Wagbret, ſo trägt der Theil dba des Seils, und eben ſo der andere Theil des Seils d′b′α′ jeder die halbe Laſt, oder $\frac{1}{2}$ P.

3. Nun befeſtige man das eine Ende einer ſehr biegſamen Schnur in der Mitte der Walze, umſchlinge damit die Walze, und am andern Ende hänge man eine Wagſchale,

4 auf leztere kann man ſo lange kleine Gewichte zulegen, bis die Walze zu ſinken anfängt, alſo die Steiſe der beyden Theile des Seils dadurch überwogen wird.

II. Auflöſung. (Fig. 33 und 34.)

5. Man nehme zwey feſte Fußgeſtelle, etwa 6 Schuhe hoch, und lege auf ſolche 2 viereckig zugehauene gleiche Hölzer AA′, BB′,

6. auf leztere befeſtige man die beyden hölzerne Leiſten aa′, bb′, die gut abgehobelt, und mit der Haut eines Seehundes polirt ſind.

7. Nun gebe man der ganzen Vorrichtung ſo eine Stellung, daß die beyden Linialen genau wagrecht ſind, und

8. Lege auf ſelbe eine Walze nach der Quer, ſo, daß ihre Axe mit dieſen Liniale rechte Winkel macht.

9. Vermittels einer um dieſe Walze gelegten ſehr biegſamen Schnur, an deren beyden Ende Gewichte angebracht werden, beſtimme man zuerſt für eine kleine unmerkliche Bewegung der Größe der Reibung,

10. Wird endlich ſtatt dieſer biegſamen Schnur ein Seil genommen, ſo läßt ſich, durch die auf der einen Seite angebrachte Ueberwucht, wenn man den vorherbeſtimmten Effect der Reibung abzieht, die Größe der Steife eines ſolchen Seils angeben.

I. Zuſaz. Beyder dieſer Auflöſungen bediente ſich Coulomb zu ſeinen Verſuchen, die in der erſten Auflöſung angeführte Vorrichtung hat Amonton zum Erfinder, der ſie im Jahre 1699 bekannt machte. Die in der zweyten Auflöſung angegebene Vorrichtung iſt Coulomb eigenthümlich.

II. Zuſaz. Bey der zweyten Auflöſung, wenn Q die ſteigende Laſt auf der einen, und $F = Q + p$ die auf der andern Seite überwältigende Kraft be-

zeichnen, giebt p unmittelbar die aus der Reibung der Walze, und der Seilſteife entſtehende Nebenlaſt an.

III. Zuſaz. Bey Amontons Vorrichtung, wenn P das Gewicht des Wagbalkens und der ſämmtlichen darauf gelegten Gewichte, ferner p das Gewicht der Waagſchale und der auf ihr befindlichen Gewichte, endlich 𝔭 das Gewicht der Walze bezeichnen, so wird jeder Theil des Seils gleich geſpannt, mithin die auf den Theil dba treffende Spannung $= \frac{1}{2}$ P (wo das Gewicht der Walze in Beziehung auf P als ſehr klein auſſer acht gelaſſen wird, wenn hingegen 𝔭 eine bedeutende Größe hatte, ſo brachte Coulomb ein Gegengewicht q mittels einer ſehr biegſamen um eine Rolle geſchlungenen Schnur an). Am Umfange der Walze in c ſtrebt die Kraft p ſolche abwärts zu ziehen, wozu noch das Gewicht 𝔭 der Walze in ihrem Schwerpuncte, das iſt, in der Mitte ihrer Axe kömmt. (Reine Mech. §. 105. VII Zuſ.) Da ſich nun die Walze nur um die Puncte b, b′, wo ſie die Seile am Umfange berühren, drehen kann, ſo liegt der Schwerpunct vom Umdrehungspuncte des Umfanges um den Halbmeſſer der Rolle entfernt, will man alſo das Gewicht 𝔭 auf den Umfang nach c verlegen, ſo darf man nur die Hälfte nehmen, ſo, daß nun die ganze Kraft am Umfange der Walze $= p + \frac{1}{2}$ 𝔭 iſt. Da endlich dieſe Kraft nur dazu verwendet wird, die beyden Seiltheile in b, b′ zu biegen, ſo iſt die auf einem Theil verwendete Kraft $= \frac{1}{2}$ (p $+ \frac{1}{2}$ 𝔭).

IV. Zuſaz. Da bey der Beſtimmung der Formel $R = \frac{d^m}{r}(a + bQ)$ (§. 73.) die Vorrichtung ſo

angenommen wurde, daß ſich die Walze um ihren Mittelpunct drehete, ſo daß die bewegende Kraft von dem Umdrehungspuncte um den Halbmeſſer r der Walze entfernt war, nach Amontons Vorrichtung aber der Umdrehungspunct ebenfalls in den Umfang fällt, alſo der Kraftpunct c um 2 r vom Umdrehungspuncte, alſo doppelt ſo weit, entfernt liegt, ſo giebt, wenn man alle Bezeichnungen des vorigen Zuſazes beybehält, bey Verſuchen nach Amontons Methode $\frac{1}{2}(p+\frac{1}{2}p)$ nur die Hälfte der aus der Stelfe des Seils entſpringenden Nebenlaſt R, oder es iſt $\frac{1}{2}(p+\frac{1}{2}p) = \frac{1}{2}R$, will man alſo aus Verſuchen bey dieſer Vorrichtung die Größen a, b, m in obiger Formel beſtimmen, ſo muß man $R = p+\frac{1}{2}p$, und $Q = \frac{1}{2}P$ ſezen.

§. 75.

§. 75.

Coulombs Verſuche nach Amontons Vorrichtung mit neuen ungepichten Seilen.

Spannung $Q = \frac{1}{2}P$	I. Seil beſteht aus 3 Schnüren, jede zu 2 Fäden, und hält im Umfange 12 5 Par. Linien.						II. Seil beſteht aus 3 Schnüren, jede zu 5 Fäden, und der Umfang iſt 20 Par. Linien.						III. Seil beſteht aus 3 Schnüren, jede zu 10 Fäden, und ſein Umfang = 28 Par. Linien.					
℔.	r	$p+\frac{1}{2}p$	r	$p+\frac{1}{2}p$	r	$p+\frac{1}{2}p$	r	$p+\frac{1}{2}p$	r	$p+\frac{1}{2}p$	r	$p+\frac{1}{2}p$	r	$p+\frac{1}{2}p$	r	$p+\frac{1}{2}p$	r	$p+\frac{1}{2}p$
	6 Par. Linien	℔.	12 Linien.	℔.	24 Par. Linien	℔.	6 Par. Linien	℔.	12 Par. Linien	℔.	24 Par. Linien	℔.	12 Par. Linien	℔.	24 Par. Linien	℔.	36 Par. Linien	℔.
12,5		2		—		—		7		3,2		1,7		11		5		—
62,5		11		4		—		22		9		5		21		8,5		—
112,5		17		6,5		—		30		17		7		29		14		—
212,5		31		12		5,7		65		31		13		47		23		—
312,5		43		15		7,2		92		41		16,7		67		31		—
512,5		—		—		11		—		—		27		—		50		34

I. Zuſaz. Die Einrichtung dieſer Tabelle iſt für ſich klar; es bezeichnet Q die ſpannende Kraft, r den Halbmeſſer, und p das Gewicht des gebrauchten Cylinders, ferner p die in die Wagſchale gelegten Gewichte mit Einſchlüß der Wagſchale ſelbſt, ſo daß wieder die aus der Steife eines Seiles entſpringende Nebenlaſt $R = p + \frac{1}{2} p$ iſt. (§. 74. III und IV. Zuſ.)

II. Zuſaz. Die Seile waren vom ſehr guten Hanf verfertiget, und die Fäden ungefähr um $\frac{1}{3}$ ihrer Länge eingedreht, das gebrauchte Längenmaaß iſt das Pariſer Fußmaaß in Duodec. Zoll und Linien getheilet, und die Gewichte waren Pariſer Pfunde.

III. Zuſaz. Berechnet man für jedes der 3 Seile, aus dem gegebenen Umfange, deſſen Dürchmeſſer, ſo iſt

für Nr. I. $d = 3{,}9789$ Lin. und $\log. d = 0{,}5997601$
II. $d = 6{,}3662$ Lin.; $\log. d = 0{,}8038801$
III. $d = 8{,}9127$ Lin.; $\log. d = 0{,}9500081$

IV. Zuſaz. Will man bey den angeführten Verſuchen alles auf baieriſches Maaß und Gewicht reduciren, ſo iſt vermög Arithmetik, Anhang 1 Pariſ. Duodec. Linie = 1,113 baieriſchen Duodec. Linien, 1 ℔. Poids de Marc = 0,87211 ℔. baieriſchen Handelsgewichtes.

§. 76.

Aufgabe.

Aus der Tabelle des vorhergehenden § für die Formel $R = \frac{d^m}{r} (a + bQ)$ den Exponenten m zu beſtimmen.

Auflöſung.

1. Man nehme für zwey verſchiedene Seile von jedem einen Verſuche bey eben derſelben Spannung Q

und demſelben Halbmeſſer r der Walze, als z. B. vom Seile Nr. I. den Verſuch, wo $Q = 312,5$ ℔., $r = 24$ Lin. und $R = p + \frac{1}{2} p = 7,2$, ſo iſt

2. vom Seile Nr. II. bey eben dieſem Q und r die Größe $R = 16,7$ ℔.

3. Ferner iſt für Nr. I. $d = 3,9789$, und für das Seil Nr. II. $d = 6,3662$ (§. 75. III. Zuſ.), mithin

4. Für Nr. I. $$7,2 = \frac{3,9789^m}{r}(a + bQ)$$

für Nr. II. $$16,7 = \frac{6,3662^m}{r}(a + bQ),$$ alſo

5. $16,7 : 7,2 = 6,3662^m : 3,9789^m$, und

$$\frac{16,7}{7,2} = \frac{6,3662^m}{,39789^m} = \left(\frac{6,3662}{3,9789}\right)^m,$$

$$m \log. \frac{6,3662}{3,9789} = \log \frac{16,7}{7,2},$$ folglich

6. $$m = \log. \frac{16,7}{7,2} : \log. \frac{6,3662}{3,9789}$$

7. Nun iſt $\log. 16,7 = 1,2227165$
$\log. 7,2 = 0,8573325$

$$\log. \frac{16,7}{7,2} = 0,3653840$$

8. Ferner iſt $\log. 6,3662 = 0,8038801$
$\log. 3,9789 = 0,5997601$

$$\log. \frac{6,3662}{3,9789} = 0,2041200,$$ folglich

9. $$m = \frac{0,3653840}{0,2041200} = \frac{365384}{204120} = 1,790.$$

I. Zuſaz. Auf die nemliche Art wurde aus jedem Paare Verſuche bey verſchiedenen Seilen, aber gleichen Spannungen, und gleichen Halbmeſſern der Walzen die Größe von m in nachſtehender Tabelle beſtimmt.

Q in ℔	Verſuche mit den Seilen I und II.						Verſuche mit den Seilen I u. III.				Verſuche mit den Seilen II und III.			
	r	m	r	m	r	m	r	m	r	m	r	m	r	m
12,5	6 Pariſer Linien	2,665	12 Pariſer Linien	—	24 Pariſer Linien	—	12 Pariſer Linien	—	24 Pariſer Linien	—	12 Pariſer Linien	3,670*	24 Pariſer Linien	3,206*
62,5		1,474		1,725		—		2,056		—		2,518		1,577
112,5		1,210		2,045		—		1,854		—		1,587		2,060
212,5		1,575		2,020		1,753		1,693		1,730		1,236		1,695
312,5		1,618		2,140		1,790		1,855		1,810		1,460		1,838
512,5		—		—		—		—		1,877		—		1,831
Summa		8,542		7,930		3,543		7,458		5,417		6,801		9,001
arithmet. Mittelzahl		1,708		1,982		1,771		1,864		1,806		1,700		1,800

II. Zuſaz. In den beyden lezten Spalten wurden die von den übrigen für m gefundenen Werthe zu ſehr abweichenden Zahlen 3,670, und 3,206 bey der Summe und der arithmetiſchen Mittelzahl nicht in Anſchlag gebracht; man ſieht nun, daß m eine beſtändige Größe und beynahe = 2 iſt.

III. Zuſaz. Coulomb glaubt, daß man überhaupt für neue ungepichte Seile m = 1,73, und für ſchon gebrauchte ungepichte Seile m = 1,4 ſezen könne.

IV. Zuſaz. Reduciret man §. 75. alles auf baier. Maaß und Gewicht, ſo ergiebt ſich jedesmal für m eben derſelbe Werth wie im I. Zuſaz, ſo daß man ebenfalls m = 1,73, oder kürzer m = 1,7 ſezen kann.

§. 77.

Aufgabe.

Aus den §. 75. angeführten Verſuchen in der Formel $R = \frac{d^m}{r}(a + b.Q)$ die unveränderlichen Größen a, b zu beſtimmen.

Auflöſung.

1. Man wähle die Verſuche für ein Seil, und eben denſelben Halbmeſſer der Walze, z. B. für das Seil Nr. III. und den Halbmeſſer der Walze = 24 Linien.

2. Man ſieht nun, daß während die ſpannende Laſt Q von 12,5 bis 512,5 ℔. wächst, die von der Steife des Seils entſpringende Nebenlaſt $p + \frac{1}{2}p = R$, von 5 bis 50 ℔. zunimmt; das iſt,

3. wenn die Laſt Q = 12,5 ℔. um 500 ℔. vermehrt wird, dadurch der Widerſtand des Seils von 5 ℔. einen Zuwachs von 45 ℔. erhält.

4. Iſt

A. für das Seil Nr. I.

Q in ℔.	r	$\frac{d^m}{r}a$	$\frac{d^m}{r}b.Q$	R	r	$\frac{d^m}{r}a$	$\frac{d^m}{r}b.Q$	R	r	$\frac{d^m}{r}a$	$\frac{d^m}{r}b.Q$	R
100	6 Pariſer Linien	3	12,8	15,8	12 Pariſer Duodec. Linien	1,25	4,4	5,65	24 Par. Duodec. Linien.	1,9458	1,7667	3,7125
12,5		3	1,6	4,6		-	-	-		-	-	-
62,5		3	8	11		1,25	2,75	4		-	-	-
112,5		3	14,4	17,4		1,25	4,95	6,2		-	-	-
212,5		3	27,2	30,2		1,25	9,35	11,6		1,9458	3,7542	5,7
312,5		3	40,	43		1,25	13,75	15		1,9458	5,5209	7,4667
512,5		-	-	-		-	-	-		1,9458	9,0543	11
	a = 17207 ; b = 0,0734				a = 1,4338 ; b = 0,05047				a = 4,4649 ; b = 0,04053			

B. für das Seil Nr. II.

100	6 Par. Duodec. Linien	3,4583	28,3333	31,7916	12 Par. Duodec. Linien	1,622	12,6	14,222	24 Duodec. Linien	1,0675	5,06	6,1275
12,5		3,4583	3,5417	7		1,622	1,578	3,2		1,0675	0,6325	1,7
62,5		3,4583	17,7083	21,2666		1,622	7,878	9,5		1,0675	3,1625	4,23
112,5		3,4583	31,8750	35,3333		1,622	14,178	15,8		1,0675	5,6925	6,76
212,5		3,4583	60,2083	63,6666		1,622	26,778	28,4		1,0675	10,7525	11,82
312,5		3,4583	88,5426	92		1,622	39,378	41		1,0675	15,8125	16,88
512,5		-	-	-		-	-	-		1,0675	25,9325	27
	a = 0,8921 ; b = 0,0731				a = 0,8368 ; b = 0,0650				a = 1,1015 ; b = 0,0522			

C. für das Seil Nr. III.

100	12 Par. Linien	8,667	18,667	27,333	24 Par. Duodec. Linien	3,875	9	12,875
12,5		8,667	2,333	11		3,875	1,125	5
62,5		8,667	11,666	20,333		3,875	5,625	9,5
112,5		8,667	21	29,667		3,875	10,125	14
212,5		8,667	39,667	48,333		3,875	19,125	23
312,5		8,667	58,333	67		3,875	28,125	32
512,5		-	-	-		3,875	46,125	50
	a = 2,5237 ; b = 0,0544				a = 2,2566 ; b = 0,0524			

4. Iſt nun jedesmals $R = \frac{d^m}{r}(a + b.Q)$ $= \frac{d^m}{r} a + \frac{d^m b}{r} Q$, ſo iſt lezterer Zuwachs der Laſt Q proportionirt, weil für eben dieſes Seil und eben dieſelbe Walze nur die Größe Q veränderlich iſt, mithin

5. Kömmt auf eine Vermehrung der Laſt von 100 ℔. ein Zuwachs des Widerſtandes von 9 ℔., oder es iſt 500 : 100 = 45 : 9; und eben ſo iſt der auf die Laſt 12,5 ℔. treffende Widerſtand = 1,125 ℔., das iſt $\frac{d^m b}{r} \times 100$ ℔. = 9 ℔.; $\frac{d^m b}{r} \times 12,5 = 1,125$ ℔. mithin

6. $\frac{d^m}{r} a + \frac{d^m b}{r} \times 12,5 = 5$; oder

$\frac{d^m}{r} a + 1,125 = 5$, alſo

7. $\frac{d^m}{r} a = 5 - 1,125 = 3,875$ ℔. Dieſe Größe nun bleibt für jeden Werth von Q unveränderlich.

8. $\frac{d^m b}{r} Q$ nimmt hingegen nach dem Nr. 5; beſtimmten Verhältniſſe zu, es iſt nemlich für $Q = 62,5 = 12,5 + 50$, $\frac{d^m b}{r} Q = 1,125 + 4,5 = 5,625$, weil auf die Vermehrung der Laſt um 50 ℔., ein Zuwachs von 4,5 ℔. des Widerſtandes kömmt.

9. Da alſo $\frac{d^m}{r} a = 3,875$, ſo iſt für $m = 1,7$

$$a = \frac{3,875 \times r}{d^m} = \frac{3,875 \times 24}{8,9127^{1,7}}, \text{ und}$$

10. eben ſo, da $\frac{d^m}{r}$ b. 12,5 = 1,125 (Nr. 5.), ſo iſt

$$b = \frac{1,125 \times r}{12,5\, d^m} = \frac{1,125 \times 24}{125 \times 8,927^{1,7}}$$

11. Nun iſt log. 8,9127 = 0,9500081

$$\begin{array}{rr} 1,7 = & 1,7 \\ \hline & 66500567 \\ & 9500081 \\ \hline \text{log. } 8,9127^{1,7} = & 1,61501377 \end{array}$$

12. Ferner

$$\begin{array}{rr} \text{log. } 3,875 = & 0,5882717 \\ \text{log. } 24 = & 1,3802112 \\ \hline \text{log. } (3,875 \times 24) = & 1,9684829 \\ \text{log. } 8,9127^{1,7} = & 1,6150138 \\ \hline \text{log. } a = & 0,3534691 \end{array}$$

, folglich

13. a = 2,2566

14. Endlich iſt

$$\begin{array}{rr} \text{log. } 8,9127^{1,7} = & 1,6150138 \\ \text{log. } 12,5 = & 1,0969100 \\ \hline \text{log. } (12,5 \times 8,9127^{1,7}) = & 2,7119238 \end{array}$$

15.

$$\begin{array}{rr} \text{log. } 1,125 = & 0,0511525 \\ \text{log. } 24 = & 1,3802112 \\ \hline \text{log. } (24 \times 1,125) = & 3,4313637 - 2 \\ \text{log. } (12,5 \times 8,9127^{1,7}) = & 2,7119238 \\ \hline \text{log. } b = & 0,7194399 - 2 \end{array}$$

(Nr. 10), folglich

16. b = 0,0524, wodurch nebſt Nr. 13. die Aufgabe aufgelöſet iſt.

I. Zuſaz. Berechnet man auf ähnliche Art bey jedem Seile die Größen $\frac{d^m}{r}$ a und $\frac{d^m}{r}$ bQ, dann aus dieſen die Größen a, b, ſo erhält man für m = 1,7 nachſtehende Tabellen.

(Siehe die am Ende angebundene Tabelle VII.)

II. Zuſaz. Wenn man die in gegenwärtiger Tabelle VII. für R nach der Formel berechneten Werthe, mit jenen durch Verſuche beſtimmten, und §. 75. ebenfalls in einer Tabelle unter der Spalte $p + \frac{1}{2} p$ angeführten vergleicht, ſo ſtimmen ſie miteinander ſo gut überein, als man es nur immer bey ſolchen Gegenſtänden erwarten kann.

III. Zuſaz. Eben ſo harmoniren gegenwärtig die in der Tabelle für b berechneten Werthe genau genug miteinander; als arithmetiſches Mittel ergiebt ſich b = 0,0577, wofür Prony in ſeiner Hydraulik b = 0,053 ſezet.

IV. Zuſaz. Die Abweichung der für die beſtändige Größe a gefundenen Werthe untereinander iſt hingegen auffallend, ſo, daß es wohl nur eine blos willkürliche Annahme iſt, wenn man entweder das arithmetiſche Mittel nimmt, und a = 1,9033, oder aber nach Prony a = 2,45 ſezet. Da aber $\frac{d^m}{r}$ a nie einen beträchtlich großen Werth hat, ſo wird die unrichtige Annahme ſelten einen bedeutenden Fehler verurſachen.

V. Zuſaz. Coulomb legte die §. 75. angeführten 3 Seile während 5 bis 6 Stunden in's Waſſer, und

fand, daß nun die Steife der benezten Säule, vorzüglich bey größern Cylindern, vermehrt wurde.

VI. Zuſaz. Endlich unterſuchte eben dieſer Naturforſcher noch mit Ther gepichte dreyſchnürige Seile, und fand mit Amontons Vorrichtung

A. bey einem Seile, wo jede Schnur aus 10 Fäden, mithin das Seil aus 30 Fäden beſtand, und deſſen Umfang 33 Pariſer Linien hielt

für $r = 36$ Linien; $Q = 500$; $R = p + \frac{1}{2} p = 42$ ℔.
$r = 24$ „ „ $Q = 500$; $R = 65$
$r = 24$ „ „ $Q = 12{,}5$ $R = 8$
$r = 12$ „ „ $Q = 12{,}5$ $R = 21$

B. Bey dem andern Seile, wo jede Schnur aus 5, alſo das ganze aus 15 Fäden beſtand, und deſſen Umfang 24 Pariſer Linien hielt

für $r = 24$ Linien; $Q = 500$ ℔.; $R = 30$ ℔.
$r = 24$ Linien; $Q = 12{,}5$; $R = 2{,}5$ ℔.

Vergleichet man nun die gegenwärtigen Werthe von R bey gepichten Seilen, mit jenen §. 75. für die ähnlichen aber ungepichten Seile Nr. II und III. bey ebenfalls ähnlicher Belaſtung Q, ſo ſieht man, daß bey gepichten Seilen die Steife etwas größer als bey ungepichten iſt.

VII. Zuſaz. Beſtimmt man für die eben angeführten beyden gepichten Seile die Werthe von R, aus der allgemeinen Formel $R = \frac{d^m}{r}\,(a + b\,Q)$ (§. 73.), und ſezet $m = 1{,}7$ (§. 76. III. Zuſ.), ferner $a = 2{,}45$; $b = 0{,}053$ (III und IV. Zuſaz), ſo wird

bey A für	$r = 36$ Lin.	$Q = 500$;	$R = 55{,}03$
	$r = 24$ ſ	$Q = 500$;	$R = 82{,}56$
	$r = 24$ ſ	$Q = 12{,}5$;	$R = 8{,}876$
	$r = 12$ ſ	$Q = 12{,}5$;	$R = 14{,}13$
bey B für	$r = 24$ Lin.	$Q = 600$ ℔.,	$R = 38{,}25$
	$r = 22$ ſ	$Q = 12{,}5$,	$R = 4{,}112$

Sämmtliche dieſe Werthe mit Ausnahme des 4ten Falles ſind beträchtlich größer, als die oben durch Erfahrung beſtimmten.

VIII. Zuſaz. Will man zur Berechnung der Steiffe eines Seiles die Formel $R = \frac{d^{1,7}}{r}(2{,}45 + 0{,}053Q)$ anwenden, ſo muß man bedenken, daß d ſowohl als r in Pariſer Duodec. Linien, und Q in Pariſer ℔. ausgedrückt werden müſſen.

IX. Zuſaz. Reducirt man §. 75. alles auf baieriſches Maaß und Gewicht, beſtimmt dann ebenfalls die Werthe für a und b, ſo kann man als den mittlern Werth $a = 2$, und $b = 0{,}048$, mithin, wenn Q in baieriſchen ℔., und d, r in baieriſchen Duodec. Linien gegeben ſind, $R = \frac{d^{1,7}}{r}(2 + 0{,}048Q)$ ſezen.

§. 78.

Aufgabe. (Fig. 33 und 34.)

Nach Coulombs Vorrichtung (§. 74. II. Aufloͤſung) iſt um die Walze in ihrer Mitte ein Seil gelegt, und an jedem Ende deſſelben die gleiche Laſt Q angebracht, auf der einen Seite aber wird dieſer Laſt noch das Gewicht p beygefügt, wodurch die Walze die mit einer gegebenen Geſchwindigkeit ertheilte rollende Bewegung

gleichförmig fortſezet, man ſucht nun das Verhältniß dieſer Kraft p zu dem Widerſtande, welchen der Bewegung die Reibung der Walze, und Steiſe des Seils entgegenſezet.

Auflöſung.

1. Da die ganze Laſt der Walze ſowohl, als der angehängten Gewichte von der wagrechten Vorrichtung getragen wird, ſo würde die Walze ihre Bewegung mit der anfänglich ertheilten Geſchwindigkeit gleichförmig vermög ihrer Trägheit fortſezen (R. Mech. §. 5. b), wenn ſich nicht dagegen die Reibung der Walze, und Steife des Seils ſtemmten.

2. Soll alſo ungeachtet dieſes Widerſtandes die rollende Bewegung der Walze gleichförmig fortdauren, ſo muß das auf einer Seite des Seils noch beygefügte Gewicht p mit demſelben im Gleichgewichte ſeyn (§. 12. I. Zuſ.).

3. Man ſeze den Halbmeſſer der Walze $= r$, ihr Gewicht $= \mathfrak{p}$, ſo vertheilet ſich

4. auf die beyden Stellen, wo die Walze die Liniale aa′, bb′ berühret, (Fig. 34.) die geſammte Laſt $= 2Q + p + \mathfrak{p}$, und dadurch entſtehet eine Reibung, weil bey phyſiſchen Körpern ihre Oberflächen, mithin gegenwärtig jene des Cylinders und der beyden Liniale rauh ſind.

5. Eben dieſer Rauhigkeit wegen berührt nun die Walze an beyden Stellen die Liniale nicht nur mit einer Seite (Reine Mechan. §. 126.), ſondern in einem ſchmalen Streifen, folglich jeder auf die Axe ſenkrechte

Querſchnitt der Walze, nicht in einem Puncte, ſondern einer kleinen Linie.

6. Stellet nun (Fig. 33.) der Kreis mni einen ſolchen Querſchnitt durch die Mitte der Axe, alſo durch den Schwerpunct G (Reine Mechan. §. 105. VII. Zuſ.) des Cylinders vor, und verlegt man die an beyden Stellen vorhandene Reibung auf dieſe Ebene, ſo wirkt ſie nicht im Berührungspuncte m der Tangens vereinigt, ſondern iſt durch eine kleine, durch m gezogene Linie verbreitet, und bekömmt dadurch ein ſtatiſches Moment.

7. Bezeichnet alſo ϱ die Entfernung vom Umdrehungspuncte m, wo die geſammte Laſt $2Q+p+\mathfrak{p}$ der Reibung gleichgeltend iſt, ſo wird

8. das ſtatiſche Moment der Reibung $= \varrho\,(2Q+p+\mathfrak{p})$

9. Da ſich ferner das Seil in eben dieſem Querſchnitt durch G befindet, ſo wirkt bey i die Steife, oder $R = \frac{d^m}{r}\cdot(a+bQ)$, (§. 73.) mithin am Hebelsarm mi, nach der Richtung is, ſo daß $ms = Gi = r$ die Entfernung vom Umdrehungspuncte, alſo

10. $d^m\,(a+bQ)$ das ſtatiſche Moment der Steife des Seils iſt.

11. Endlich wirkt bey n das zugelegte Gewicht p am Hebelsarm mn nach der Richtung no, mithin iſt wieder $mo = Gn = r$ die Entfernung, und pr das ſtatiſche Moment.

12. Folglich wird nach Nr. 2.

$p \cdot r = \varrho(2Q + \mathfrak{p} + p) + d^m(a + bQ)$; wodurch das geſuchte Verhältniß beſtimmt iſt.

I. Zuſaz. Es leuchtet für ſich ein, daß, ſo wie Q, $\mathfrak{p}$, p durch einerley Gewichtmaaß, auch die Größen r, ϱ, d durch eben daſſelbe Längenmaaß beſtimmt werden müſſen.

II. Zuſaz. Wenn die Größe der Reibung eines Cylinders bekannt iſt, ſo läßt ſich durch Verſuche aus $\mathfrak{p}$ die Richtigkeit der bisher angenommenen Formel der Seils-Steife prüfen, denn es iſt

$$d^m(a + bQ) = p \cdot r - \varrho(2Q + \mathfrak{p} + p), \text{ und}$$

$$\frac{d^m}{r}(a + bQ) = p - \frac{\varrho}{r}(2Q + \mathfrak{p} + p)$$

III. Zuſaz. Nimmt man ſtatt einem Seil eine ſehr biegſame Schnur, ſo kann man die Steifigkeit als unbedeutend weglaſſen, und vermittels Verſuchen die Größe ϱ beſtimmen, es iſt nemlich $p \cdot r = \varrho(2Q + \mathfrak{p} + p)$, mithin $\varrho = \frac{p \cdot r}{2Q + \mathfrak{p} + p}$

IV. Zuſaz. Wollte man ſtatt dem zugelegten Gewichte p (Nr. 2.) die Fortſezung der rollenden Bewegung durch eine Kraft F bewirken, deren Richtung wagrecht durch den Schwerpunct G der Walze geht, und auf ihrer Axe ſenkrecht ſteht, alſo mit der Linie in (Fig. 33.) zuſammen fällt, ſo iſt das Moment dieſer Kraft in Beziehung auf den Umdrehungspunct m der Walze $= F \cdot mG = F \cdot r$.

Da ferner durch die zur wagrechten Ebene, worauf die Walze gelegt iſt, parallelen Kraft der Druck nicht vermehrt wird, ſo iſt nun das Moment der Reibung der belaſteten Walze (Nr. 8.) $= \varrho\,(2Q + p)$; folglich muß $r.F = \varrho\,(2R + p)$ mithin

$F = \frac{\varrho}{r}\,(2Q + p)$ ſeyn.

V. Zuſaz. Bezeichnet überhaupt P die Größe des Druckes, welchen die belaſtete Walze gegen eine Ebene äuſſert, ſo giebt $F = \frac{\varrho}{r}\,P$ die Größe der Reibung an, die bey der wälzenden Bewegung ſtatt findet, es iſt nemlich F die Größe der Kraft, welche nach einer zur Ebene, auf welcher die Walze liegt, parallelen, auf die Axe ſenkrechten durch den Schwerpunct gehenden Richtung angebracht, der Reibung das Gleichgewicht hält.

VI. Zuſaz. Da $\frac{\varrho}{r} = \frac{F}{P}$, ſo kann man, wie §. 58., dieſen Coefficienten $\frac{\varrho}{r}$ den Reibungscoefficienten nennen.

§. 79.

Coulombs Verſuche über die Reibung bey langſamer wälzender Bewegung eines Cylinders.

Material der Walze	2Q + p in ℔.	r par. Zoll	p in ℔.	ϱ par. Zoll	r par. Zoll	p ℔.	ϱ par. Zoll	r par. Zoll	p ℔.	ϱ par. Zoll
Gajakholz	100		-	-		0,6	0,0179		1,6	0,0157
	500	-	-	-	3	3	0,0179	1	9,4	0,0184
	1000		-	-		6	0,0179		18	0,0177
Ulmholz	1000	6	5	0,0298	3	10	0,0291	-	-	-

I. Zuſaz. Die Bezeichnungen ſind die nemlichen wie im vorhergehenden §., wodurch alſo die Tabelle für ſich klar wird, und ϱ wurde jedesmal nach dem III. Zuſ. eben dieſes vorhergehenden §. berechnet. Um 2Q, p beträchtlich zu machen, ohne ein Seil nehmen zu müſſen, deſſen Steife merklich geworden wäre, legte Coulomb um die Walze mehrere biegſame Schnüre, und vertheilte darauf jedesmal die angebrachte Laſt.

II. Zuſaz. Die Größe ϱ iſt bey einerley Material unveränderlich, und für eine Walze von Gajakholz = 0,0179 oder beynahe = 0,018, und für eine Walze aus Ulmholz = 0,02945, jedesmal Pariſer Duodec. Zoll.

III. Zuſaz. Beſtimmt man den Halbmeſſer der Walze r, mithin auch ϱ in Pariſer Duodec. Linien, ſo wird für Gajakholz ϱ = 0,2148 = 0,215 Par. Duodec. Linien für Ulmholz ϱ = 0,3534 Par. Duodec. Linien.

IV. Zuſaz. Bey der Anwendung darf nicht vergeſſen werden, daß bey dem Reibungscoefficienten $\frac{\varrho}{r}$ die beyden Größen ϱ, r ſich auf einerley Längenmaaße beziehen (§. 78. Nr. 12.); will man alſo ſtatt ϱ aus dem II. Zuſ. die Zahlen, alſo $F = \frac{0{,}018}{r} P$ ſezen, ſo muß r in Pariſer Duodecimal-Zoll ausgedrückt ſeyn, ſo wie man r in Pariſer Duodec. Linien ausdrücken muß, im Falle man ſtatt ϱ die Zahlen des IIIten Zuſ. nehmen wollte, z. B. für $F = \frac{0{,}215}{r} P$.

§. 80.

Coulombs Verſuche über die Steife der drey ungepichten Seile (§. 75.) nach einiger Vorrichtung (§. 74. II. Aufl.)

Seil	Walze: Materie	Walze: Gewicht p ℔.	Walze: Halbm. r	Laſt auf jeder Seite Q ℔.	zugelegt. Gewicht P ℔.	$\frac{\varrho}{r}(2Q+p+P)$ ℔.	$P-\frac{\varrho}{r}\times(2Q+p+P)$ ℔.	$\frac{d^m}{r}(a+bQ)$ ℔.
Nr. III.	Ulmholz	110	6 Zoll = 72 Linien	100	5	1,54612	3,45388	4,4359
				300	11	3,53891	7,46109	10,5031
				500	20	5,54642	14,45358	16,5703
		25	3 Zoll = 36 Lin.	200	18	4,34878	13,65122	14,9390
Nr. II.	Gajakholz	50	3 Zoll = 36 Lin.	200	16	2,7339	13,2661	14,9390
		4,5	1 Zoll = 12 Lin.	25	11	1,17245	9,82755	12,0613
				200	52	8,17135	43,82865	44,8170
Nr. I.		50	3 Zoll = 36 Lin.	25	1,25	0,60413	0,64588	1,9374
				100	6	1,5275	4,4725	5,0072
				200	11	2,7506	8,2494	8,4315
				500	24	6,4082	17,5918	18,7043
		50	3 Zoll = 36 Lin.	100	3	1,5096	1,4905	2,2521
				200	6	2,7208	3,2792	3,7923

I. Zuſaz. Da die bisher gebrauchten Zeichen beybehalten ſind, ſo bedarf die Tabelle keiner weitern Erklärung in dieſer Beziehung.

II. Zuſaz. Die ſiebente Spalte giebt jedesmal die Größe der auf die Ueberwindung der Reibung des Cylinders verwendeten Kraft an, es iſt nemlich bey dem erſten Verſuch $r = 6$ Zoll; $2Q + p + p = 200 + 110 + 5 = 315$ ℔., und $\varrho = 0{,}02945$ (§. 79. II. Zuſ.), mithin

$$\frac{\varrho}{r}(2Q + p + p) = \frac{0{,}02945}{6} \times 315 = 1{,}54612 \text{ Pfund.}$$

III. Zuſaz. Aus der ſiebenten Spalte ergiebt ſich nun allemal leicht die nächſtfolgende achte, welche den übrigen auf den Widerſtand des Seils verwendeten Theil der Kraft angiebt. Es iſt nemlich bey dem erſten Verſuche die Steifigkeit des Seils $= p - \frac{\varrho}{r}(2Q + p + p)$ (§. 78. II. Zuſ.) $= 5 - 1{,}54612 = 3{,}45388$ Pfund.

IV. Zuſaz. Berechnet man endlich jedesmal die Seilsſteife nach der Formel $\frac{d^m}{r}(a + bQ)$ (§. 73.) $= \frac{d^{1/7}}{r}(2{,}45 + 0{,}053\,Q)$ (§. 77. VIII. Zuſ.), drückt alſo d ſowohl als r in Pariſer Duodecimallinien aus, ſo erhält man die in der lezten Spalte angegebenen Zahlen.

Bey dem erſten Verſuch iſt: $r = 72$ Linien, und

$$2{,}45 + 0{,}053 \times 100 = 2{,}45 + 5{,}3 = 7{,}75.$$

Ferner log. d = 0,9500081 (§. 75. III. Zuſ.)
1,7 = 1,7

66500567
9500081

1,61501377, alſo

$\log. d^{1,7} = 1,6150138$
$\log. 7,75 = 0,8893017$

$\log. 7,75\, d^{1,7} = 2,5043155$
$\log. r = 1,8573325$

0,6469830; folglich

$$\frac{d^m}{r}(a+bQ) = 4,4359.$$

V. Zuſaz. Die Zahlen der beyden lezten Spalten harmoniren immer genau genug, daher bekömmt die §. 77. VIII. Zuſ. zur Berechnung der Seilſteiſe aufgeſtellte Form eine Beſtättigung. Ein Grund, warum die in der achten Spalte angegebenen Zahlen größer als jene der ſiebenten ſind, liegt darin, daß durch die öftern vorhergehenden Verſuche die Seile bereits einen Theil ihrer Steifigkeit verlohren hatten.

§. 81.

Aufgabe. (Fig. 35. Tab. I.)

Um einen unbeweglichen ſenkrechten Cylinder, wovon der Kreis AMBD ein mit der Grundfläche paralleler Querſchnitt iſt, werde ein Seil gelegt, ſo daß ſolches den gegebenen Bogen AMB faßt; an dem einem Ende bey A zieht eine Laſt Q nach der Richtung der Tangens AQ, man ſoll die Kraft P beſtimmen, welche am andern Ende des Seils in B nach der Rich-

tung der Tangens BP der Laſt Q und der durch dieſe beyden Kräfte verurſachten Reibung des Seiles das Gleichgewicht hält.

Auflöſung.

1. Man nehme von dem Bogen AMB das beliebige Stück AM = s, und den Punct m unendlich nahe, ſo iſt Mm = ds.

2. Ziehe die Halbmeſſer CA = CM = cm = r.

3. Durch M und m errichte man die Tangenten MT, mt, welche in n zuſammentreffen, ziehe endlich noch Cn, ſo iſt

4. Δ MCn ≅ Δ mCn (Geom. §. 38. IX. Zuſ.), mithin halbirt Cn das Element Mm, und den Winkel Mnm, folglich iſt

5. Mn = mn = $\frac{1}{2}$ds; Cn = r (höhere Geometr. §. 233. VII Zuſ.), und mnC = $\frac{1}{2}$mnM.

6. Sezet man ferner für den Halbmeſſer 1 die Größe des dem Winkel ACM entſprechenden Bogens = φ, und für den Winkel ACB die Größe des Bogens für eben den Halbmeſſer 1 = α, ſo wird

7. der Bogen AMB = r. α, und s = rφ; ds = rdφ, und $\frac{1}{2}$ds = $\frac{1}{2}$rdφ.

8. Bezeichnet nun T die Größe der Spannung des Elementes Mm, ſo läßt ſich ſolche an jedem Puncte deſſelben als gleichförmig annehmen, mithin wirken bey n zwey Kräfte jede = T nach den Richtungen der Tangenten MT und mt, dadurch entſteht alſo

9. ein Druck nach der Richtung nC = 2T. cos. $\frac{1}{2}$ Mnm (Reine Mechan. §. 53. VIII. Zuſ.) = 2T. cos. mnC (Nr. 5.) = 2T. sin. mCn.

10. Im rechtwinklichten Dreyecke $n\,m\,C$ iſt aber
$Cn : mn = r : \sin.\ mCn$, oder nach Nr. 5.
$r : \frac{1}{2}ds = 1 : \sin.\ mCn$, mithin

11. $\sin.\ mCn = \frac{\frac{1}{2}ds}{r} = \frac{1}{2}d\varphi$ (Nr. 7.)

12. Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 9., ſo iſt der Normaldruck des Elementes

$$= 2T.\tfrac{1}{2}\frac{ds}{r} = \frac{T\,ds}{r}$$

$$= 2T.\tfrac{1}{2}d\varphi = T.d\varphi$$

13. Bezeichnet p den geſammten Normal-Druck, welchen das geſpannte Seilſtück AM gegen die Walze äuſſert, ſo iſt λp die Größe der dadurch entſtehenden Reibung (§. 58.); ferner iſt $dp = T\,d\varphi$ (Nr. 12.).

14. Am Puncte M ſoll nun die Spannung T des Elementes Mm, ſowohl der Laſt Q, als der Reibung des Stückes AM, mithin λp das Gleichgewicht halten, folglich muß

15. $T = Q + \lambda p$, alſo $dT = \lambda dp = \lambda T\,d\varphi$ (Nr. 13.) ſeyn, und

16. $\frac{dT}{T} = \lambda d\varphi$, alſo

17. $\log.\ nat.\ T = \lambda\varphi + C$ (Arithm. §. 325.).

18. Nun iſt für $\varphi = 0$, oder bey A auch $p = 0$; alſo $T = Q$ (Nr. 15.) und $\log.\ nat.\ T = \log.\ nat.\ Q$, mithin dieſer Werth in der vorhergehenden Gleichung ſubſtituirt, giebt

19. $\log.\ nat.\ T = \lambda\varphi + \log.\ nat.\ Q.$

20.

20. Da nun die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= e$, und $1 = \log.\ nat.\ e$ iſt (Arithm. §. 238. I und II. Zuſ.), ſo wird

20. $\log.\ nat.\ T = \lambda\varphi \log.\ nat.\ e + \log.\ nat.\ Q$

$= \log.\ nat.\ e^{\lambda\varphi} + \log.\ nat.\ Q$

$= \log.\ nat.\ [Q.e^{\lambda\varphi}]$ alſo

21. $T = Q.e^{\lambda\varphi}$

22. Für $\varphi = \alpha$, (Nr. 6.) oder in B ſoll nun die Kraft P der geſammten Spannung das Gleichgewicht halten, mithin wird allda $P = T$, alſo

23. $P = Q.e^{\lambda\alpha}$

I. Zuſatz. Man ſieht, daß, wenn α in arithmetiſcher Progreſſion wächst, der Werth von P in einer geometriſchen Progreſſion zunimmt, folglich durch öftere Umwickelung des Seils einen auſſerordentlich groſſen Zuwachs erhält.

II. Zuſatz. Da $\log.\ nat.\ e = 1$, alſo $\log.\ vulg.\ e = 0{,}4342945$ (Arithm. §. 240.), ſo iſt für $\lambda = \frac{1}{3}$ (§. 58. I. Zuſ.)

$$\log.\ vulg.\ e^{\lambda.\alpha} = \lambda.\alpha \log.e = \tfrac{1}{3} \times 0{,}4342945\,\alpha$$
$$= 0{,}1447648.\alpha$$

III. Zuſatz. Für $\alpha = n\pi = n \times 3{,}1415927$ iſt

$$\log.e^{\lambda\alpha} = n \times 3{,}1415927 \times 0{,}1447648 = n \times 0{,}4547920$$

Bey einer halben Umwindung des Seils iſt $\alpha = \pi$, mithin $n = 1$, alſo

$$\log.e^{\lambda\alpha} = \log.\ e^{\lambda\pi} = 0{,}4547920 = \log.\ 2{,}84965$$

folglich $P = 2{,}84965\ Q$.

Bey einer ganzen Umwicklung des Seils, das iſt, für $\alpha = 2\pi$, mithin für $n = 2$, iſt

$$\log. e^{\lambda\alpha} = \log. e^{\lambda \cdot 2\pi} = 2 \times 0{,}4547920$$
$$= 0{,}9095840 = \log. 8{,}12052$$

alſo $P = 8{,}12052\ Q$.

IV. Zuſaz. Bezeichnet c den Umfang des Cylinders, ſo läßt ſich auf die nemliche Art für mehrere Umwickelungen des Seils die Zunahme von P berechnen, es iſt nemlich:

$\frac{1}{2}c = \pi$	$P =$	$2{,}84965\ Q$
$c = 2\pi$	$P =$	$8{,}12052\ Q$
$\frac{3}{2} = 3\pi$	$P =$	$23{,}14014\ Q$
$2c = 4\pi$	$P =$	$65{,}94290\ Q$
$3c = 6\pi$	$P =$	$535{,}49080\ Q$
$4c = 8\pi$	$P =$	$4348{,}46500\ Q$
$5c = 10\pi$	$P =$	$35311{,}81000\ Q$
$6c = 12\pi$	$P =$	$286750{,}40000\ Q$
$7c = 14\pi$	$P =$	$2328563{,}00000\ Q$
$8c = 16\pi$	$P =$	$18909148{,}00000\ Q$

V. Zuſaz. Will man zugleich auf die Steife des Seils Rückſicht nehmen, ſo wird

$$P = Q.\, e^{\lambda\alpha} + \frac{d^m}{r}(a + bQ)$$

III. Abſchnitt.

Von der Reibung bey umdrehender Bewegung.

---

§. 82.

Aufgabe. (Fig. 36 und 37.)

Am Umfange einer unbeweglichen Rolle (Reine Mech. §. 73.) wirken die beyden Kräfte P, Q nach entgegengeſezten Richtungen der Tangenten, man ſucht ihr Verhältniß, wenn P nicht nur der Kraſt Q, ſondern auch der Nebenlaſt, welche durch die Zapfenreibung und Steiſe des Seils entſteht, das Gleichgewicht hält.

Auflöſung.

1. Die Vorrichtung bey der unbeweglichen Rolle iſt entweder ſo beſchaffen, daß

I. der mit der Scheibe verbundene Polzen an ſeinen beyden Enden in kreisrunden Oeffnungen (Pfannen, Zapfenlager) aufliegt, und ſich in ſelben ſammt der Scheibe um den gemeinſchaftlichen Mittelpunct drehet, oder

II. die Scheibe drehet ſich vermittels einer in ihrer Mitte gemachten kreisrunden Oeffnung, durch welche der Polzen geſteckt iſt, um dieſen Polzen, welcher an ſeinen beyden Enden unbeweglich befeſtiget wird, ſo, daß nun die Umdrehung um den der Scheibe und ihrer kreisrunden Oeffnung gemeinſchaftlichen Mittelpunct geſchieht.

2. Im erſten Falle vertheilet ſich der Druck, welchen die Kräfte auf die Scheibe äuſſern, auf die bey-

den Stellen, wo der Polzen in den Zapfenlagern oder Pfannen ruhet, gleichförmig; verlegt man dieſen Druck auf eine einzige Stelle in der Ebene der Scheibe, ſo daß (Fig. 36.) ABO die Scheibe, LMN einen Querſchnitt des Zapfenlagers, und lmN einen Querſchnitt des Polzens mit dieſer Ebene vorſtellet, ferner

3. r den Halbmeſſer der Scheibe, c jenen des Polzens, π den ſenkrechten Druck des Polzens auf die Zapfenlager bezeichnen, ſo wirken

4. Am Umfange der Rolle bey A die Kraft P, und nach entgegengeſezten Richtungen bey B die Laſt Q, und die Seilsſteife $\frac{d^m}{r}$ (a+bQ) (§. 73.), und da endlich durch die Umdrehung an der berührenden Stelle N, durch den ſenkrechten Druck π, eine Reibung zwiſchen dem Zapfen, und dem Zapfenlager erfolgt, ſo wirkt noch am Umfange des Zapfen in N die Kraft $\lambda\pi$ (§. 58.) ebenfalls der Kraft P entgegen, und die Momente dieſer Kräfte ſind: P.r; Q.r; d^m (a+bQ); endlich noch $\lambda\pi$.c, folglich iſt

5. für den erſten Fall

$$P.r = Q.r + \lambda\pi.c + d^m\,(a+bQ)$$

6. Im zweyten Falle (Fig. 37.), wenn man den Halbmeſſer der kreisrunden Oeffnung, oder CN = E ſezt, ſonſt aber alle bisher angenommenen Bezeichnungen beybehält, iſt alles wie Nr. 4., nur daß gegenwärtig, weil die Umdrehung nicht um den Mittelpunct c des Polzens, ſondern jenen C der Scheibe und ihrer concentriſchen Oeffnung geſchieht, das Moment der Reibung = $\lambda\pi$.E geſezt werden muß, folglich

7. im zweyten Falle wird

$$P.r = Q.r. + \lambda\pi.E + d^m\,(a+bQ)$$

8. Um nun für beyde Fälle die Größe π des ſenkrechten Druckes in N zu beſtimmen, ſo verlängere man die Richtungen PA, QB der beyden Kräfte, bis ſie in M zuſammentreffen, ſeze ferner den Winkel, welchen dieſe Richtungen einſchließen, das iſt, $AMB = \gamma$, und die mittlere Kraft $= F$, ſo wird

9. $F = \sqrt{(P^2 + 2PQ \cos. \gamma + Q^2)}$ (Reine Mechanik §. 53.).

10. Ferner geht die mittlere Richtung offenbar durch M und den Unterſtüzungspunct N, man ziehe alſo dieſe mittlere Richtung, oder die gerade Linie MNO.

11. Die beyden Kreiſe LNM, und lNm berühren einander in N, mithin liegen ihre Mittelpuncte C, c mit N in einer geraden Linie NC, und die Tangens NT iſt beyden Kreiſen gemeinſchaftlich, (Geometr. §. 111. I und II. Zuſ.), auf welcher alſo CN ſenkrecht ſteht (Geomet. §. 76. I. Zuſ.).

12. Da die beyden Kräfte P, Q am Winkelhebel ACB wirken, ſo würde ihre mittlere Richtung für den Zuſtand des Gleichgewichtes nothwendig durch C gehen (Reine Mechan. §. 51. VI. Zuſ.), alſo mit NC zuſammenfallen, und daher auf der Tangens NT ſenkrecht ſtehen.

13. Nun aber ſoll der Aufgabe gemäß die Kraft P nicht nur der Laſt Q, ſondern auch der Nebenlaſt das Gleichgewicht halten, ſie muß alſo größer ſeyn, als Nr. 12. erfordert, folglich kann die mittlere Richtung MNO (Nr. 10.) nicht durch C gehen, alſo mit NC nicht zuſamenfallen, und daher auch auf der Tangens NT nicht ſenkrecht ſtehen.

14. Sezet man den Winkel, welchen MNO mit NC einſchließt, das iſt, ONC′ (Fig. 36.) oder ONC (Fig. 37.) = α, ſo kann man die mittlere Kraft F (Nr. 9.) in zwey Seitenkräfte nach den Richtungen der Tangens NT, und der Normal NC zerlegen, es iſt nemlich

15. die Kraft nach NT = F sin. α, und
die Kraft nach NC = F cos. α (N. Mech. §.53. IX Zuſ.).

16. Leztere Kraft iſt alſo der geſuchte ſenkrechte Druck π (Nr. 8.), mithin die Reibung $\lambda\pi = \lambda F \cos \alpha$.

17. Die erſtere Kraft nach NT muß alſo der Reibung, welche die Bewegung hemmet, und eine gerade entgegengeſezte Richtung hat, gleich ſeyn, alſo wird

$$\lambda\pi = \lambda F \cos \alpha = F \sin \alpha \text{, und}$$

18. $\lambda = \frac{F \sin. \alpha}{F \cos. \alpha} = \text{tang. } \alpha.$

19. Sezet man endlich ſtatt $\lambda\pi$ den Werth Nr. 17. in die Gleichung Nr. 5. ſo wird

20. im erſten Falle:

$$P.r = Q.r + F. \sin. \alpha. e + d^m (a + bQ)$$
$$= Q.r + e \sin. \alpha \sqrt{(P^2 + 2PQ \cos. \gamma + Q^2)}$$
$$+ d^m (a + bQ) \text{ (Nr. 9.)}.$$

21. Eben ſo erhält man für den zweyten Fall

$$P.r = Q.r + F \sin. \alpha. E + d^m (a + bQ) \text{ (Nr. 7.)}$$
$$= Q.r + E \sin. \alpha. \sqrt{(P^2 + 2PQ \cos. \gamma + Q^2)}$$
$$+ d^m (a + bQ)$$

wodurch das geſuchte Verhältniß zwiſchen P und Q beſtimmt iſt.

I. Zuſaz. Da in beyden Fällen die Werthe für P.r ganz einerley ſind, nur daß man im erſten Falle bey der Reibung den Halbmeſſer e des Polzens, im zweyten hingegen an deſſen Stelle den Halbmeſſer E der kreisrunden Oeffnung ſezen muß, ſo kann man allgemein

$$Pr = Qr + e \sin.\alpha \sqrt{(P^2 + 2PQ\cos.\gamma + Q^2)} + d^m(a + bQ)$$

ſezen, wo aber e im erſten Falle den Halbmeſſer des Polzens, im zweyten jenen der kreisrunden Oeffnung der Scheibe bezeichnet.

II. Zuſaz. Wirket die Kraft P nicht am Umfange der Rolle in A, ſondern am Hebelsarme CD = f, ſo iſt

$$P.f = Q.r + e \sin.\alpha \sqrt{(P^2 + 2PQ\cos.\gamma + Q^2)} + d^m(a + bQ)$$

III. Zuſaz. Wenn im erſten Falle das Gewicht der Rolle nebſt ihrem Polzen, und im zweyten jenes der Rolle allein, beträchtlich iſt, ſo muß die daraus entſpringende Reibung noch beſonders in Anſchlag gebracht werden.

IV. Zuſaz. Wirken die beyden Kräfte nach parallelen Richtungen, ſo iſt $\gamma = 0$, alſo $\cos.\gamma = 1$, mithin

$$P.r = Q.r + e \sin.\alpha \sqrt{(P^2 + 2PQ + Q^2)} + d^m(a + bQ)$$
$$= Qr + e \sin.\alpha (P + Q) + d^m(a + bQ)$$

§. 83.

Aufgabe. (Fig. 38.)

An einer unbeweglichen Rolle, welche ſich mit den beyden Enden ihres wagrechten Polzens in Zapfenlagern drehen kann, ziehen die beyden Kräfte P, Q nach verticalen

Richtungen abwärts, ferner iſt q die Größe des Gewichtes der Scheibe ſammt ihrem Bolzen, man ſucht das Verhältniß der beyden Kräfte, wenn P der Hauptlaſt Q ſowohl, als der Nebenlaſt, welche aus der Reibung und Seilsſteife entſpringt, das Gleichgewicht halten ſoll.

Auflöſung.

Da die gegenwärtige Aufgabe nur ein ſpecieller Fall der vorhergehenden iſt, ſo werden die Nr. deſſelben fortgeſezet.

22. Aus eben den Gründen wie Nr. 1—5 iſt nun

$$P.r = Q.r + \lambda\pi e + d^m(a + bQ)$$

23. Um nun den ſenkrechten Druck π zu beſtimmen, welchen die 3 parallel laufenden Kräfte P an A, Q an B und q im Schwerpuncte alſo im Mittelpuncte der Rolle in C hervorbringen, ſo kann man

24. die Laſt q auf die beyden Endespuncte A, B des wagrechten Durchmeſſers gleichheitlich vertheilen (Reine Mech. §. 12. IV. Zuſ. §. 114. V. Zuſ.), ſo daß nun

25. bey A die Kraft $P' = P + \frac{1}{2}q$ und bey B die Kraft $Q' = Q + \frac{1}{2}q$ nach parallelen Richtungen wirken, mithin iſt

26. die mittlere Kraft

$F = \sqrt{[P'^2 + 2P'Q' \cos.\gamma + Q'^2]}$ (Nr. 9.), und da $\gamma = 0$, ſo iſt $F = \sqrt{[P'^2 + 2P'Q' + Q'^2]} = P' + Q'$
$= P + Q + q$

27. Ferner iſt $\lambda\pi = F \sin.\alpha$ (Nr. 17.)
$= \sin.\alpha\,[P + Q + q]$ folglich

28. wenn man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 22. ſezet, ſo wird

29. $P.r = Q.r + e \sin.\alpha [P + Q + q] + d^m (a + bQ)$

wodurch das Verhältniß der Kräfte beſtimmt iſt.

I. Zuſaz. Würde ſich die Rolle vermittels einer concentriſchen Oeffnung, wie im zweyten Falle (Nr. 1.), um ihren Polzen drehen, ſo bezeichnet e den Halbmeſſer der kreisrunden Oeffnung, und q das Gewicht der Rolle ohne ihren Polzen.

II. Zuſaz. Nimmt man eine ſehr biegſame Schnur, ſo fällt der Widerſtand des Seils weg, mithin iſt

$$Pr = Q.r + e \sin.\alpha (P + Q + q)$$
$$= Q.r + e \sin.\alpha . P + e \sin.\alpha (Q + q)$$
$$P(r - e \sin.\alpha) = Qr + e \sin.\alpha Q + e \sin.\alpha q;$$
$$P = \frac{Qr + e \sin.\alpha . Q + e \sin.\alpha . q}{r - e \sin.\alpha}$$
$$P - Q = \frac{Q.r + e \sin.\alpha . Q + e \sin.\alpha . q}{r - e \sin.\alpha} - Q$$
$$= \frac{Q.r + e \sin.\alpha . Q + e \sin.\alpha . q - Qr + e \sin.\alpha . Q}{r - e \sin.\alpha}$$
$$= \frac{e \sin.\alpha (2Q + q)}{r - e \sin.\alpha}$$

III. Zuſaz. Sezet man $P - Q = p$, ſo iſt $P = Q + p$; mithin der zur Ueberwindung nothwendige Zuſaz an Kraft, oder $p = \frac{e \sin.\alpha (2Q + q)}{r - e \sin.\alpha}$.

IV. Zuſaz. $p.r - p.e \sin.\alpha = e \sin.(2Q + q)$;
$p.r = e \sin.\alpha [2Q + q + p]$, mithin

$\sin.\alpha = \frac{r}{c} \cdot \frac{p}{2Q+q+p}$, wodurch ſich jedesmal leicht der Reibungscoefficient $\lambda = \text{tang.}\,\alpha$ (Nr. 18.) beſtimmen läßt.

V. Zuſaz. Würde man ſtatt der Rolle eine Walze nehmen, welche ſich vermittels an beyden Enden befeſtigten Zapfen in Lagern um ihre Axe drehet, ſo gilt alles bisher vorgetragene.

§. 84.

van Muſſchenbroek's Verſuche über die Reibung bey umdrehender Bewegung für ſtählerne Zapfen.

Materie der Pfanne	Q in ℔	ohne Schmier.			mit Oel=Schmier.		
		p Drach.	$\sin.\alpha$	$\text{tang.}\,\alpha = \lambda$	p Drach.	$\sin.\alpha$	$\text{tang.}\,\alpha = \lambda$
Gajakholz	0	10	0,4061	0,4445	6	0,2461	0,2540
	1	12	0,2944	0,3079	10	0,2461	0,2540
	2	14	0,2461	0,2540	14	0,2461	0,2540
	3	20	0,2730	0,2839	21	0,2864	0,2990
Gehärteter Stahl	0	6	0,2461	0,2540	4	0,1650	0,1673
	1	11	0,2703	0,2808	10	0,2461	0,2540
	2	17	0,2979	0,3121	14	0,2461	0,2540
	3	21	0,2864	0,2990	17	0,2326	0,2392
Kupfer	0	4	0,1650	0,1673	3	0,1240	0,1251
	1	8	0,1951	0,1989	7	0,1731	0,1757
	2	12	0,2114	0,2162	10	0,1766	0,1793
	3	15	0,2057	0,2101	13	0,1786	0,1814
Zinn	0	6	0,2461	0,2540	5	0,2057	0,2101
	1	11	0,2703	0,2808	9	0,2219	0,2275
	2	18	0,3151	0,3320	14	0,2461	0,2540
	3	22	0,2998	0,3143	18	0,2462	0,2540
Bley	0	4	0,1650	0,1673	3	0,1240	0,1251
	1	7	0,1731	0,1757	6	0,1486	0,1503
	2	8	0,1416	0,1429	8	0,1416	0,1429
	3	10	0,1375	0,1388	10	0,1375	0,1388
Meſſing	0	4	0,1650	0,1673	3	0,1240	0,1251
	1	6	0,1486	0,1503	5,5	0,1363	0,1376
	2	8	0,1416	0,1429	7,5	0,1328	0,1340
	3	10	0,1375	0,1388	9,5	0,1309	0,1319

I. Zuſaz. Muſſchenbroek's Vorrichtung (Tab. II, Fig. 39) beſtand aus einer hölzernen Walze A, B, welche beyderſeits mit ihrer ſtählernen Axe c, d in Pfannen g, h ruhete, die Axe ſowohl, als das Zapfenlager, welches auf jeder Seite ein halber hohler Cylinder war, wurden auf das feinſte polirt; der Halbmeſſer der Walze hielte 2, und jener der Axe ⅛ rhl. Duodec. Zoll. Die Walze ſammt ihrer ſtählernen Axe wog 3 Pfund Amſterd. Gewichtes, ſo daß 1 Pfund = 16 Unzen = 128 Drachmen war.

II. Zuſaz. Um die Reibung ſelbſt zu unterſuchen, wurde die Walze in wagrechter Lage auf die Zapfenlager gebracht, um ſie eine Schnur gelegt, und die beyden Ende derſelben mit gleichen Gewichten Q beſchwert, und durch den Zuſaz p auf einer Seite, das iſt, durch ein in die Wagſchale gelegtes Gewicht, ſo daß p das eingelegte Gewicht ſammt der Schale bezeichnet, die Walze zur Umdrehung, mithin die Größe der Reibung, beſtimmt.

III. Zuſaz. Die Axe bekam (Fig. 40.), um die Reibung bey verſchiedener Größe der Zapfen zu unterſuchen, zwey verſchiedene Durchmeſſer, nemlich der Theil bey e und f hielt ½ Zoll oder 6 Linien, hingegen der Theil bey c und d ¼ Zoll oder 3 Linien im Durchmeſſer. Bey den Verſuchen in der Tabelle wurde lezterer genommen.

IV. Zuſaz. In der Tabelle ſind die bisher angenommenen Bezeichnungen beybehalten, ſo daß Q die auf jeder Seite der Walze angebrachte Laſt, p die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Zulage bezeichnen, ferner iſt q = 3 Pfund = 384 Drachm.;

$r = 2$ Zoll, $e = \frac{1}{8}$ Zoll, alſo $\frac{r}{e} = 2 : \frac{1}{8} = 16$, und

$\sin.\alpha = \frac{16.p}{2Q.128+p+384}$ (§. 83. IV. Zuſ.), weil p allemal in Drachmen, hingegen Q in Pfund bey den Beobachtungen ausgedrückt iſt.

V. Zuſaz. Für den erſten Verſuch bey Gajakholz wird $\sin.\alpha = 16.\frac{10}{10+384} = \frac{160}{394} = 0{,}4061$; ſchlägt man endlich in den trigonometriſchen Tabellen dieſen Sinus nach, ſo findet man allda die entſprechende Tangens $\alpha = \lambda = 0{,}4445$, welches der Reibungscoefficient iſt.

VI. Zuſaz. Eben ſo iſt für den vierten Verſuch bey Gajakholz ohne Schmier $Q = 3$ Pfund; $p = 20$ Drachm., mithin

$$\sin.\alpha = 16.\frac{20}{2.3.128+20+384} = \frac{5.16}{3.64+5+96}$$

$= \frac{80}{293} = 0{,}2730$, wo man aus den trigonometriſchen Tabellen wieder $\tang.\alpha = 0{,}2839$ erhält, welches der Reibungscoefficient iſt.

VII. Zuſaz. Auf ähnliche Art wurden für jeden Verſuch jedesmal die Größen $\sin.\alpha$, und $\tang.\alpha = \lambda$ beſtimmt.

VIII. Zuſaz. Da ſämmtliche Verſuche nur bey einem ſehr unbeträchtlichen Druck, und nur für den Anfang der Umdrehung gemacht wurden, ſo läßt ſich für den Zuſtand der Bewegung bey einem großen Druck kein ſicheres Reſultat aus ſelben ziehen.

§. 85.

Erklärung von Coulombs Vorrichtung:

1. Die Vorrichtung (Fig. 41.) beſteht

a. Aus einer Rolle ACB von Gajakholz, mit einer concentriſchen Oeffnung, welche mit Kupfer gefüttert iſt.

b. Durch die kreisrunde Oeffnung iſt die eiſerne Axe oder der Polzen geſteckt, und ruhet beyderſeits mit ſeinen Enden in den Querbalken DD′, EE′, (Fig. 42.); zu dieſem Behuf wird der Polzen in der Mitte, wo ſich nemlich die Rolle um ſelben drehen muß, genau abgerundet, an den beyden Enden aber, wo er in die Querbalken eingelaſſen iſt, vierkantig gelaſſen.

c. Das Ganze ruhet endlich auf ſenkrechten Stützen FG, die gegen 10 Pariſer Fuß hoch ſind.

2. Um die Rolle wird nun eine Schnur oder Seil gelegt, und die beyden Ende mit gleichen Gewichten Q beſchwert, jedes beſtehet aus einzelnen Stücken zu 50 Pfund, die durch die Oeffnungen r, s an einem Stricke angefaßt und miteinander verbunden ſind.

3. Zur Beſtimmung der Reibung wird nun auf einer Seite ſo lange an Gewichte zugelegt, bis durch dieſe Zulage p eine drehende Bewegung der Rolle um ihren Zapfen erfolgt.

4. Die Rolle wiegt ſammt der kupfernen Büchſe 14 Pfund, der Diameter der Rolle hält 12 Pariſer Duodec. Zoll, und jener der kreisrunden Oeffnung 20,75 Linien; der Durchmeſſer endlich des Polzens iſt 19 Linien, ſo daß der Spielraum 1,75 Linien beträgt.

I. Zuſaz. Bey Coulombs Vorrichtung, wenn man die bisher angenommenen Bezeichnungen beybehält, iſt jedesmal das Gewicht der Rolle ſammt der Büchſe, oder $q = 14$ Pfund, und $2e = 20{,}75$ Linien (§. 83. I. Zuſ.).

II. Zuſaz. Nimmt man eine ſehr biegſame dünne Schnur, ſo kann man ſowohl ihre Steife als Dicke auſſer Acht laſſen, mithin iſt $2r = 12$ Zoll $= 144$ Linien; und $\frac{r}{e} = \frac{2r}{2e} = \frac{144}{20{,}75}$, log. $\frac{2r}{2e} = 0{,}8413444$, ferner iſt in dieſem Falle bey erfolgter gleichförmiger umdrehender Bewegung, weil die bewegende Kraft der Reibung das Gleichgewicht hält (§. 12. I. Zuſaz);

$$\sin.\alpha = \frac{2r}{2e} \cdot \frac{p}{2Q+p+q} \text{ (§. 83. IV. Zuſ.)}$$

$$= \frac{144}{20{,}75} \cdot \frac{p}{2Q+p+14}$$

III. Zuſaz. Coulomb fand bey einer Schnur, deren Umfang nur 3 Linien hielt, daß ohne gebrauchter Schmier, wenn er auf jede Seite der Rolle die Laſt $Q = 103$ Pfund hieng, durch den Zuſaz $p = 6$ Pfund auf einer Seite eine langſame aber etwas irreguläre Bewegung erfolgte, mithin iſt in dieſem Falle

$$\sin.\alpha = \frac{144}{20{,}75} \cdot \frac{6}{206 + 6.14} = \frac{144}{20{,}75} \cdot \frac{6}{226};$$

Nun iſt log. $\frac{144}{20{,}75} = 0{,}8413444$

$$\begin{array}{r} \log. 6 = 0{,}7781513 \\ \hline 1{,}6194957 \\ \log. 226 = 2{,}3541084 \\ \hline \end{array}$$

log. sin. $\alpha = 9{,}2653873$ (Trig. §. 305. III. Zuſ.) folglich, wird für den Halbmeſſer 1, sin. $\alpha = 0{,}1842373$ u. tang. $\alpha = \lambda = 0{,}1874460$ (§. 83. IV. Zuſ.).

IV. Zuſaz. Wird hingegen um die Rolle ein Seil von beträchtlicher Dicke und Steiffe gelegt, ſo muß man erſt die Seilſteiffe R nach §. 77. VIII. Zuſ.) beſtimmen, und von p abziehen, ſo daß $p' = p - R$ als die bewegende Kraft betrachtet wird; ferner wirkt nun auf jeder Seite die angehängte Laſt eigentlich nicht am Umfange der Rolle, ſondern in der Mitte des Seils, ſo daß auf jeder Seite zu dem Halbmeſſer der Rolle die halbe, folglich zu dem Diameter der Rolle der Diameter des Seils addirt werden muß, in dieſem Falle iſt nun für die gleichförmige umdrehende Bewegung $\sin.\alpha = \frac{2r+d}{2e} \cdot \frac{p'}{2Q+p+q}$

V. Zuſaz. Coulomb brauchte bey mehrern Verſuchen das Seil Nr. I. (§. 75. III. Zuſ.), wo $d = 3{,}9789$ Lin. war, mithin iſt für $Q = 100$ Pfund.

$$R = \frac{d^{1,7}}{r}(a + bQ) = \frac{d'}{r}(2{,}45 + 0{,}53 \times 100) \text{ (§. 77. VIII. Zuſ.)} = \frac{d^{1,7}}{72} \times 7{,}75$$

$$\begin{array}{lr}
\log.\ d = & 0{,}5997601 \\
1{,}7 = & 1{,}7 \\
\hline
& 41983207 \\
& 5997601 \\
\hline
\log.\ d^{1,7} = & 1{,}0195922 \\
\log.\ 7{,}75 = & 0{,}8893017 \\
\hline
& 1{,}9088939 \\
\log.\ 72 = & 1{,}8573325 \\
\hline
\log.\ R = & 0{,}0515614
\end{array}$$

, mithin

$R = 1{,}12606$ Pfund.

VI. Zuſaz. Auf eben dieſe Weiſe wird bey dieſem Seile für $Q = 200$; $R = 1,89614$
für $Q = 400$; $R = 3,43630$.

VII. Zuſaz. Bey eben demſelben Seile, wenn deſſen beyden Ende mit $Q = 200$ Pfund belaſtet wurden, entſtand durch die Zulage $p = 10,5$ Pfund eine langſame aber etwas irreguläre umdrehende Bewegung.

Im gegenwärtigen Falle iſt nun $R = 1,89614$ (VI. Zuſ.), mithin $p' = p - R = 10,5 - 1,896 = 8,604$, und

$$\sin.\alpha = \frac{2r+d}{2e} \cdot \frac{8,604}{400+8,604+14} \quad \text{(IV. Zuſ.)}$$

$$= \frac{2r+d}{2e} \times \frac{8,604}{422,604}, \text{ ferner}$$

$$\frac{2r+d}{2e} = \frac{144+3,9789}{20,75} = \frac{147,9789}{20,75} \text{ mithin}$$

$$\log.\frac{2r+d}{2e} = 0,8531820$$

$$\log.\ 8,604 = 0,9347004$$

$$1,7878824$$

$$\log.\ 422,604 = 2,6259336$$

$\log.\sin.\alpha = 9,1619488$ (Trig. §. 305. III. Zuſ.); folglich $\sin.\alpha = 0,1452197$; $\tan g.\alpha = \lambda = 0,1467755$.

§. 86.

Aufgabe. (Fig. 41.)

Bey Coulombs Vorrichtung wird durch das auf der einen Seite der Laſt Q beygelegte Gewicht p eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung erzeugt, ſo daß auf dieſer Seite das Gewicht $Q + p$ während t Secunden

den um s Schuhe ſinkt, und auf der andern Seite die Laſt Q um eben ſo viele ſteigt, man ſucht die Größe der Zapfenreibung.

Aufloſung.

1. Wenn π den ſenkrechten Druck der ganzen Vorrichtung gegen den Polzen, alſo $\lambda\pi$ die geſuchte Reibung ausdrückt, ſo iſt $e\lambda\pi$ ihr Moment, folglich am Umfang der Rolle die Kraft $\frac{e}{r}\lambda\pi$ derſelben gleichgeltend (Reine Mechan. §. 82. II. Zuſ.).

2. Bezeichnet ferner R die Seilsſteife, und behält man überhaupt die bisher gebrauchten Bezeichnungen, ſo wirken

3. am Umfange der Rolle bey A die Kraft $Q+p$; nach entgegengeſezter Richtung hingegen wirken bey B die Laſt Q, ferner die Seilsſteife R, und endlich noch die Reibung $\frac{e}{r}\lambda\pi$ (Nr. 1.), folglich iſt

4. die bewegende Kraft $= Q+p-\left[Q+R-\frac{e}{r}\lambda\pi\right]$

5. Die Bewegung beſteht nun erſtlich in der umdrehenden Rolle, deren Gewicht q, zweytens in dem Sinken der Laſt $Q+p$ auf der einen, und dem Steigen der Laſt Q auf der andern Seite.

6. Ganz aus den nemlichen Gründen und eben den Bezeichnungen wie §. 69. Nr. 5-10 wird gegenwärtig die zur Umdrehung der Rolle am Umfange erforderliche Kraft $= \frac{\frac{1}{2}q\,du}{2g\,dt}$,

7. die zum Sinken der Laſt $Q+p$ erforderliche Kraft auf den Umfang der Rolle reducirt $= \frac{(Q+p)\,du}{2g\,dt}$ und endlich

8. Um das Steigen der Laſt Q zu bewirken, iſt die Kraft $\frac{Q\,du}{2g\,dt}$ am Umfange der Rolle nothwendig.

9. Da nun dieſe drey Kräfte der bewegenden Kraft Nr. 4. gleichgeltend ſind, ſo wird

$$10.\quad \frac{\frac{1}{2}q\,du}{2g\,dt}+\frac{(Q+p)\,du}{2g\,dt}+\frac{Q\,du}{2g\,dt}$$

$$=Q+p-(Q+R+\frac{e}{r}\,\lambda\pi)$$

$$=p-(R+\frac{e}{r}\lambda\pi)$$

$$du\,[2Q+p+\tfrac{1}{2}q]=2g\,dt\,[p-R-\frac{e}{r}\,\lambda\pi\,]$$

11. Da die Bewegung gleichförmig beſchleunigt angenommen iſt, ſo ſind alle Größen auſſer u und t beſtändig, mithin

$$12.\quad u\,[2Q+p+\tfrac{1}{2}q]=2gt\,[p-R-\frac{e}{r}\lambda\pi]$$

$$u=2gt\,\frac{p-R\ \frac{e}{r}\,\lambda\pi}{2Q+p+\frac{1}{2}q}\text{, mithin}$$

13. $ds=udt$ (Reine Mechan. §. 38.)

$$=2gtdt\,\frac{p-R-\frac{e}{r}\lambda\pi}{2Q+p+\frac{1}{2}q}\text{, folglich}$$

14. $s=gt^2\,\frac{p-R-\frac{e}{r}\,\lambda\pi}{2Q+p+\frac{1}{2}q}$, wo keine Const. addirt werden darf, ſo wie Nr. 12., indem für $t=0$; u ſowohl als s Null iſt.

15. $s\,(2Q+p+\frac{1}{2}q):gt^2=p-R-\frac{e}{r}\,\lambda\pi$, alſo

$$\frac{e}{r}\,\lambda\pi=p-R-\frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2}\text{, folglich}$$

16. $\lambda\pi = \frac{r}{e}\left[p - R - \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2}\right]$, welches die geſuchte Zapfenreibung iſt.

I. Zuſaz. Da bey der Vorrichtung die Kräfte ſämmtlich lothrecht, alſo parallel wirken, ſo wird die mittlere Kraft $F = 2Q + p + q$, mithin

$\lambda\pi = \sin.\alpha.F$ (§. 82. Nr. 17.) $= \sin.\alpha\,(2Q+p+q)$

II. Zuſaz. Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 16., ſo iſt

$$\sin.\alpha\left[2Q+p+q\right] = \frac{r}{e}\left[p - R - \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2}\right],$$ alſo

$$\sin.\alpha = \frac{r}{e}\left[p - R - \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2}\right] : \left[2Q+p+q\right]$$

III. Zuſaz. Da die Gewichte $Q+p$, und Q in der Mitte eines jeden Seils wirken, ſo muß wieder auf jeder Seite die halbe Seilsdicke, alſo zum Diameter der Rolle der Durchmeſſer des Seils addirt werden, folglich wird

$$\sin.\alpha = \frac{2r+d}{2e}\left[p - R - \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2}\right] : \left[2Q+p+q\right]$$

wo wieder $2e = 20{,}75$ Linien (§. 85. I. Zuſ.), alſo

$\frac{2r+d}{2e} = \frac{147{,}9789}{20{,}75}$ für das Seil Nr. I., und

$\log.\frac{2r+d}{2e} = 0{,}8531820$ iſt.

IV. Zuſaz. Nimmt man ſtatt dem Seil eine Schnur, die ſehr dünn und biegſam iſt, ſo fällt d und R weg, folglich wird für dieſen Fall

$$\sin.\alpha = \frac{2r}{2e}\left[p - \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2}\right] : \left[2Q+p+q\right]$$

V. Zuſaz. Da der Reibungscoefficient $\lambda = \text{tang.}\,\alpha$ iſt (§. 82. Nr. 18.), ſo läßt ſich ſolcher aus $\sin.\alpha$ vermittels trigonometriſcher Tabellen leicht angeben.

§. 87.

Aufgaben aus Coulombs Verſuchen (Fig. 41.)

I. Aufgabe.

Die um die Rolle gelegte Schnur hielt 2 Lin. im Umfange, auf jeder Seite war das Gewicht Q=100 Pfd. angebracht, der Polzen und Bixe mit Unſchlitt beſtrichen, auf der einen Seite wurde das Gewicht p=6 Pfd. zugelegt, wodurch eine umdrehende Bewegung erfolgte, ſo, daß während 3,5 Sec. um 3 Fuß, und in den folgenden 1,5 Sec. wieder um 3 Fuß, alſo während 5 Sec. die Laſt Q+p um 6 Fuß ſank, man ſucht den Reibungscoefficienten λ.

Auflöſungen.

1. Die Bewegung läßt ſich als gleichförmig beſchleunigt annehmen (§. 68. VII. Zuſ.).

2. Ferner kann man die Steife der Schnur, und ihre Dicke als unmerklich weglaſſen, mithin wird

3. $\sin.\alpha = \frac{2r}{2e}\left[p - \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2}\right] : \left[2Q+p+q\right]$ (§. 86. IV. Zuſaz.)

4. Ferner iſt $t^2 = 25$; $s = 6$; $2Q+p+\frac{1}{2}q = 213$; $2Q+p+q = 220$; $\frac{2r}{2e} = \frac{144}{20{,}75}$;

5. $\log. g = 1{,}1788527$ (N. Mech. §. 130. VI. Zuſ.)
$\log. t^2 = 1{,}3979400$
$\log. gt^2 = 2{,}5767927$

6. $\log.\ (2Q+p+\frac{1}{2}q) = 2{,}3283796$
$\log.\ s = 0{,}7781513$
$\text{c.d.}\log.\ gt^2 = 7{,}4232073-10$

$$\log.\ \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2} = 0{,}5297382$$
$$= \log.\ 3{,}3864,\ \text{mithin}$$

7. $$p - \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2} = 6-3{,}3864 = 2{,}6136$$

8. $$\log.\ \left[p-\frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2}\right] = 0{,}4172391$$
$$\log.\ \frac{2r}{2e} = 0{,}8413444$$

$$\log.\ \frac{2r}{2e}\ \log.\ \left[p-\frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2}\right] = 1{,}2585835$$
$$\log.\ \left[2Q+p+q\right] = 2{,}3424227$$
$$\log.\ \sin.\ \alpha = 8{,}9161608$$

(Trig. §. 305. III. Zuſ.).

9. $\sin.\ \alpha = 0{,}0825183$, und
$\lambda = \text{tang.}\ \alpha = 0{,}0828007$;

II. Aufgabe.

Um die Rolle wurde das Seil Nr. I. gelegt, auf jeder Seite die Laſt Q = 200 Pfund angehangen, auf einer Seite wurde noch p = 13,5 Pfund hinzugefügt, wodurch ohne irgend einer gebrauchten Schmier eine umdrehende Bewegung entſtand, ſo daß die Laſt Q+p während 6 Sec. um 3 Fuß, und in den folgenden 3 Sec. wieder um 3 Fuß, alſo während 9 Secunden um 6 Fuß ſank, man ſucht den Reibungscoeſſicienten λ.

Auflöſung.

1. Die Bewegung iſt wieder beynahe gleichförmig beſchleunigt, mithin

2. $\sin. \alpha = \frac{2r+d}{2e} \left[p - R - \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{2gt^2} \right]$

$: \left[2Q+p+q \right]$ (§. 86. III. Zuſ.)

3. Ferner iſt nun $s = 6$; $t^2 = 81$; $2Q+p+\frac{1}{2}q = 420,5$. $2Q+p+q = 427,5$; $\log. \frac{2r+d}{2e} = 0,8531820$.

$R = 1,89614$ (§. 85. VI. Zuſ.).

4. $\log. g = 1,1788527$
$\log t^2 = 1,9084850$

$\log. gt^2 = 3,0873377$

5. $\log. \left[2Q+p+\frac{1}{2}q \right] = 2,6237660$
$\log. s = 0,7781513$
$\text{c. d.} \log. gt^2 = 6,9126623 - 10$

$\log. \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2} = 0,3145796$
$= \log. 2,06338$, mithin

6. $p = 13,5$
$R = 1,89614$ (Nr. 3.)

$p - R = 11,60386$
$\frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2} = 2,06338$

$p - R - \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2} = 9,54048$

7. $\log. \left[p - R - \frac{s(2Q+p+\frac{1}{2}q)}{gt^2} \right] = 0,9795702$
$\log. \frac{2r+d}{2e} = 0,8531820$
$\text{c. d.} \log. \left[2Q+p+q \right] = 7,3690639 - 10$

$\log. \sin. \alpha = 9,2018161$

Verſuche mit Coulombs Vorrichtung über die Zapfenreibung.

Nro.	Beſchaffenheit der Berührung	Q in Pf.	p in Pf.	Umfang des Seils	$R = \frac{d^m}{r}(a+bQ)$ Pf.	Zeit der Bewegung: durch die erſten 3 Fuß	Zeit der Bewegung: durch die lezten 3 Fuß	sin. α	$\lambda =$ tang. α
1	Ohne Schmier	100	6	3 Linien	0	*	*	0,1842373	0,1874460
2		200	10,5	12,5 Linien	1,89614	*	*	0,1452197	0,1467755
3			13,5			6 Sec.	3 Sec.	0,1590197	0,1610692
4		400	21		3,43630	*	*	0,1506857	0,1524261
5			28			5,5 Sec.	2,5 Sec.	0,1641868	0,1664456
6			39			3 Sec.	1,5 Sec.	0,1584453	0,1604724
							Summa	0,9617945	0,9746348
							arithm. Mittelzahl	0,1602991	0,1624391
7	Mit Unſchlittſchmier	100	2,5	2 Linien	0	*	*	0,0801989	0,0804581
8			6			3,5 Sec.	1,5 Sec.	0,0825183	0,0828007
9		200	6,5	12,5 Linien	1,89614	*	*	0,0784591	0,0787017
10			10			3,5 Sec.	1,5 Sec.	0,0248199	0,0248276
11		400	13		3,43630	*	*	0,0828082	0,0830936
12			18			5,5 Sec.	2 Sec.	0,0749787	0,0751904
13			24			3 Sec.	2 Sec.	0,0625486	0,0626713
							Summa	0,4863317	0,4877434
							arithm. Mittelzahl	0,0810553	0,0812906
14	Mit Wagenſchmier	50	2,5	2 Linien	0	*	*	0,1489601	0,1506408
15		100	3,7			*	*	0,1178263	0,1186528
16		150	5,7			*	*	0,1236015	0,1245566
17		100	4,3	12,5 Linien	1,12606	*	*	0,1042392	0,1048101
18			9			3 Sec.	1,5 Sec.	0,1160929	0,1168831
19		200	8,5		1,89614	*	*	0,1042392	0,1048101
20			14			4 Sec.	2 Sec.	0,1371564	0,1384650
21			20			6 Fuß in	3,5 Sec.	0,0697565	0,0699268 *
22		400	17		3,43630	*	*	0,1120471	0,1127571
23			22			6,5 Sec.	2,5 Sec.	0,1236015	0,1245566
24			28			4 Sec.	1,5 Sec.	0,1201368	0,1210132
							Summa	1,2079010	1,2171454
							arithmet. Mittelzahl	0,1207901	0,1217145

folglich,

$8. \sin. \alpha = 0{,}1590197$, und

$\lambda = \text{tang.}\, \alpha = 0{,}1610692$.

Zuſaz. Im gegenwärtigen ſowohl als vorhergehenden §. wurde als Bedingung angenommen, daß durch die Zulage p eine umdrehende gleichförmig beſchleunigte Bewegung erfolge, mithin die aus der Seilsſteife und Zapfenreibung entſtehende Nebenlaſt eine unveränderliche Größe ſey; beſtättigen nun ſorgfältig angeſtellte Verſuche dieſe Vorausſezung, ſo iſt dadurch auch die gezogene Folge beſtättiget.

§. 88.

Verſuche mit Coulombs Vorrichtung über die Zapfenreibung.

(Siehe die am Ende befindliche Tabelle VIII.)

I. Zuſaz. Die erſten 5 Spalten der Tabelle VIII. ſind durch ihre Aufſchriften für ſich deutlich genug.

II. Zuſaz. Die in der ſechsten Spalte beſtimmte Seilsſteife iſt ſchon §. 85. V und VI. Zuſaz berechnet worden.

III. Zuſaz. In der ſiebenten Spalte bezeichnen die Sternchen, daß durch die entſprechende Zulage p jedesmal eine langſame, ununterbrochene, aber etwas irreguläre Bewegung unterhalten wurde. In allen dieſen Fällen wurde nun in der vorlezten Spalte unter der Aufſchrift sin. α die angeſezte Zahl nach §. 85. II oder IV. Zuſ., je nachdem es die Beſchaffenheit des gebrauchten Seils erforderte, berechnet.

IV. Zuſaz. Vergleichet man in den übrigen Fällen die Zeitſecunden, welche verfloſſen, während die Laſt Q+p um die erſten und lezten 3 Fuße ſank, ſo läßt ſich nach §. 68. VII. jedesmal die erfolgte Bewegung als gleichförmig beſchleunigt annehmen, mithin wurden auch die entſprechenden Zahlen für den sin. α jedesmal nach den beyden Aufgaben §. 87. berechnet.

V. Zuſaz. Aus den sin. α ergaben ſich endlich vermittels trigonometriſchen Tabellen die in den lezten Spalten angeführten Werthe der Reibungscoefficienten $\lambda =$ tang. α von ſelbſt.

VI. Zuſaz. Vergleicht man nun die angegebenen Reibungscoefficienten unter ſich, ſo harmoniren ſie gewiß genau genug untereinander mit Ausnahme Nr. 21. Nimmt man jedesmal das arithmetiſche Mittel, ſo iſt für die Reibung eines eiſernen Polzens auf der mit Kupfer gefütterten Oeffnung oder Bixe

a. Ohne gebrauchter Schmier	$\lambda = 0{,}1624$
b. mit Unſchlittſchmier	$= 0{,}0813$
c. mit Wagenſchmier	$= 0{,}1222$

VII. Zuſaz. Coulomb fand ferner bey einem Druck von 200 bis 1200 Pfund

a. wenn die Wagenſchmier abgewiſcht wurde, aber die kupferne Bixe und eiſerne Axe durch die vorhergebrauchte Unſchlittſchmier fettig blieben	$\lambda = 0{,}1250$
b. wenn Oel aufgegoſſen wurde	$= 0{,}1250$
c. wenn alte Wagenſchmier bey mehrern Verſuchen nicht erneuert wurde	$= 0{,}1333$

VIII. Zuſaz. Im vorhergehenden Zuſaz, ſo wie in dem folgenden iſt die Angabe von λ etwas unrichtig, Coulomb verwechſelt den ſenkrechten Druck des Polzens auf die Bixe, das iſt π, mit der mittlern Kraft F, nimmt alſo $\pi = F$; da doch $\pi = F \cos. \alpha$ (§. 82. Nr. 15 und 16.) geſezt werden muß, indeſſen iſt der Fehler, da ohnehin die Beſtimmung nur beyläufig ſeyn kann, von keinem Belange.

IX. Zuſaz. Um die Reibung hölzerner Axen auf hölzernen Bixen zu unterſuchen, nahm Coulomb eine Rolle, deren Durchmeſſer 12 Zoll hielt, und, um die Reibung recht merklich zu machen, Polzen von 3 Zoll im Durchmeſſer, die Reſultate waren:

Material der Axe	Material der Bixe	Bey Unſchlittſchmier λ	Die Schmier abgewiſcht λ
Eichenholz	Gajakholz	0,0384	0,0590
	Ulmholz	0,0333	0,0500
Buxbaumholz	Gajakholz	0,0435	0,0714
	Ulmholz	0,0341	0,0500
Eiſen	Gajakholz	0,0500	

§. 89.

Erklärung der Schoberſchen Verſuche:

1. Die Vorrichtung beſtand (Fig. 43.)

a. Aus einer Rolle AB vom harten Holz, und einer ſtählernen Axe C, D, die auf Zapfenlagern F, F, von Horn, welches vorher etwas geröſtet wurde, ruhete.

b. Um die Rolle wurde eine Schnur gelegt, und auf beyden Seiten die gleichen Gewichte Q Q ſo angehangen, daß die Schnur durch das eine Gewicht durchgeht, und mit dem andern Gewicht wieder verbunden iſt, folglich die beyden Theile ein zuſammenhångendes Ganzes ausmachen.

2. Das gebrauchte Långenmaaß iſt allenthalben Pariſer Duodecimal Fußmaaß, und das Gewicht Cölniſch, ſo daß 1 Pfund = 32 Loth = 128 Quintl. betrågt;

a. Der Durchmeſſer der Rolle iſt = $2\frac{1}{6}$ Zoll, und jener der Axe = $\frac{1}{12}$ Zoll, Rolle ſammt Axe wog 1 Loth $1\frac{1}{2}$ Quintl.

b. Die ganze Schnur, aus weißem Zwirn 4 dråthig geflochten, war 446 Fuß lang, und wog 8 Loth.

c. Das Gewicht Q auf jeder Seite hielt 2 Pfund, und beſtand aus einem 4 Zoll langen ausgehöhlten Cylinder.

3. Die Verſuche wurden im Jahre 1746 auf den polniſchen Salzgruben Wieliczka gemacht.

a. Schober wåhlte dazu keinen Tag, ſondern einen darauf folgenden zweyten Schacht, wo die Luft etwas ruhiger zu ſeyn pflegt; der Schacht heißt Mirow, ſeine Mündung hatte ſchon 240 Schuhe, und er ſelbſt noch eine Teufe von 220 Schuhen, folglich war die ganze Teufe 460 Schuhe.

b. Durch das auf einer Seite in den hohlen Cylinder Q gelegte Gewicht p wurde Ueberwucht hervorgebracht, dann die Bråmſe IHK, wodurch anfånglich die Rolle gehalten wurde, weggenommen, und

c. die Zeit beobachtet, während welcher das Gewicht $Q+p$ um die erſten 54 Fuß, und endlich um das vierfache, nemlich 216 Fuß ſank.

d. Zur Beobachtung der Zeitſecunden bediente ſich Schober eines Pendels (Fig. 44.), welches aus einer bleyernen Kugel G, die $1\frac{1}{2}$ Loth wog, und an zwey Seidenfäden ab, bc, damit die Schwingungen in einer Ebene erfolgten, aufgehangen war.

I. Zuſaz. Behält man die bisher bey gegenwärtigen Unterſuchungen angenommenen Bezeichnungen noch bey, ſo iſt, da auf jeder Seite das halbe Gewicht der Schnur addirt werden muß; $Q = 2$ Pfund $+ 4$ Loth $= 68$ Loth; $q = 1$ Loth $\frac{3}{2}$ Quintl. $= 1\frac{1}{8}$ Loth $= 1{,}375$ Loth; $2r = 1\frac{3}{6}$ Zoll; $2e = \frac{1}{12}$ Zoll, alſo $\frac{2r}{2e} = 26$; $s = 54$, t die beobachteten Secunden; $S = 216$, T die während dieſer Bewegung verfloſſenen Zeitſecunden.

II. Zuſaz. Da die Schnur ſehr dünn und biegſam war, ſo läßt ſich $\sin.\alpha$ nach der Formel §. 86. IV. Zuſaz beſtimmen, wodurch allemal der Reibungscoefficient $\lambda = \text{tang.}\,\alpha$ vermittels trigonometriſcher Tabellen gegeben iſt.

§. 90.

Tabelle der Schoberſchen Verſuche, über die Reibung einer ſtählernen Axe auf einem Zapfenlager vom geröſteten Horn.

Nro.	p. in Loth	s = 54 Pariſer Fuß.			S = 216 Pariſer Fuß.		
		t in Secund.	sin. α	tang. α = λ	T in Secund.	sin. α	tang. α = λ
1	1,5	31	0,1845232	0,1877471	68	0,2007930	0,2049674
2		30	0,1770135	0,1808295	70	0,2070580	0,2116446
3	2	23	0,1973722	0,2013327	48	0,2124619	0,2174259
4		22	0,1819495	0,1850381	49	0,2187110	0,2241374
5	2,5	18	0,1790884	0,1820313	38	0,2081962	0,2128606
6		19	0,2081962	0,2128606	39	0,2212648	0,2268885
7	3	15	0,1443562	0,1458842	34	0,2354248	0,2422334
8		16	0,1942343	0,1980054	34	0,2354248	0,2422334
9	3,5	14	0,1739346	0,1766269	30	0,2335766	0,2413097
10		14	0,1739346	0,1766269	31	0,2607853	0,2701328
11	4	13	0,1879527	0,1913632	27	0,2277844	0,2339342
12		12	0,0929499	0,0933540	28	0,2633118	0,2729438
			Summa	2,1316998		Summa	2,8007117
		Arithmetiſche Mittelzahl		0,1776416	Arithm. Mittelzahl		0,2333926

I. Zuſaz. Aus der dritten und ſechsten Spalte der Tabelle ſieht man, daß jedesmal $T > 2t$, folglich die Bewegung nicht gleichförmig beſchleunigt iſt; denn bey gleichförmiger Beſchleunigung würde $s = gt^2$, und $S = gT^2$ (Reine Mechan. §. 130. VII. Zuſ.), mithin

$gt^2 : gT^2 = s : S = 54 : 216$, das iſt
$t^2 : T^2 = 1 : 4$, alſo
$t : T = 1 : 2$, folglich jedesmal
$T = 2t$ ſeyn.

II. Zuſaz. Die Zahlen der vierten Spalte wurden nach §. 86. IV. Zuſaz berechnet, es iſt nemlich jedesmal

$$\sin.\alpha = \frac{2r}{2e}\left[p - \frac{s(2Q + p + \frac{3}{4}q)}{gt^2}\right] : \left[2Q + p + q\right]$$
$$= 26\left[p - \frac{54(136{,}6875 + p)}{gt^2}\right] : \left[137{,}375 + p\right]$$

Vermittels trigonometriſcher Tabellen endlich ergaben ſich die Werthe für den Reibungscoefficienten $\lambda = \text{tang.}\,\alpha$, in der folgenden Spalte.

III. Zuſaz. Eben ſo iſt jedesmal für die ſiebente Spalte:

$$\sin.\alpha = \frac{2r}{2e}\left[p - \frac{S(2Q + p + \frac{3}{4}q)}{gT^2}\right] : \left[2Q + p + q\right]$$
$$= 26\left[p - \frac{216(136{,}6875 + p)}{gT^2}\right] : \left[137{,}375 + p\right]$$

wodurch wieder der Reibungscoefficient λ in der lezten Spalte durch trigonometriſche Tabellen gegeben iſt.

IV. Zuſaz. Um zu verhindern, daß ſich die Schnur ganz unten (Fig. 43.), bey ihrer Umwendung nicht verwickelte, mußte zwiſchen die beyden Theile

derſelben ein Staab gehalten werden, wodurch vielleicht ein Grund der Verzögerung in der Bewegung, wie Schober bemerkt, liegt, auſſer dieſem laſſen ſich aber noch ganz andere Gründe angeben, nemlich

V. Zuſaz. wenn man die Verſuche ſelbſt nebſt der dazu gewählten Vorrichtung miteinander vergleichet, ſo erhellet

a. daß bey einem ſo unbeträchtlichen Druck, wo nemlich $2Q + q + p$ jedesmal weniger als 5 Pfunde ausmacht, jedes kleine zufällige Hinderniß nothwendig eine Stöhrung der regelmäſſigen Bewegung hervorbringen mußte,

b. das gebrauchte Pendel war doch nur ſehr unvollkommen, und an dieſem die Zeit nur in ganzen Secunden, alſo nicht ſcharf genug beobachtet.

c. Die Annahme, daß die Reibung von der Geſchwindigkeit unabhängig ſey, die bey der Berechnung zum Grund gelegt iſt, wird eben durch gegenwärtige Beobachtungen als ungültig aufgehoben, und dargethan, daß mit der Geſchwindigkeit die Reibung ebenfalls zunimmt, ob ſich gleich dieſes Verhältniß nicht genau beſtimmen läßt.

VI. Zuſaz. Indeſſen läßt ſich immer noch der Reibungscoefficient, ſo lange die Geſchwindigkeit nicht ſehr beträchtlich iſt, als eine unveränderliche Größe annehmen.

IV. Hauptſtück.

Von den mechaniſchen Kräften der Thiere, und vorzüglich des Menſchen.

§. 91.

Erfahrungen.

a. Der Menſch kann ſeine mechaniſchen körperlichen Kräfte auf verſchiedene Art gebrauchen, er kann nemlich

α. eine Laſt unterſtüzen, und ſie weiter tragen,

β. ſolche ziehen und ſchieben,

γ. ohne Veränderung ſeiner Stelle endlich, mittels ſeiner Arme, oder durch das Tretten ſeiner Füße, ſolche in Bewegung ſezen.

b. Auf ähnliche Art kann man von den mechaniſchen Kräften einiger Thiere Gebrauch machen.

c. Da man bey Anwendung der Thiere und Menſchen zur Bewegung einer Laſt durch eine hinlängliche Anzahl derſelben die erforderliche Kraft zweckmäſſig verſtärken, ſie allenthalben an jedem beliebigen Platz anwenden kann, und da man überdieß vorzüglich bey Menſchen, indem jeder Arbeiter nach Erforderniß ſeiner Kraftäuſſerung verſtärken, oder zurückhalten kann, die Gewalt in ſeiner Willkühr behält, ſo iſt der Gebrauch thieriſcher Kräfte ſehr zweckmäſſig, um ſo mehr, als

d. der Menſch auf ſo mannigfaltige und vortheilhafte Art ſeine Kräfte anzuwenden im Stande iſt,

daß er ſelbſt als eine der vorzüglichſten Maſchinen angeſehen werden kann.

e. Die Größe der thieriſchen Kraft hängt von der Conſtitution, dem Alter des Thieres, und überdieß bey Menſchen vorzüglich von der Uebung und Geſchicklichkeit ab.

I. Zuſaz. Bey der gegenwärtigen Unterſuchung wird immer eine mittlere Conſtitution, das männliche Kraftalter, die gehörige Uebung, und dadurch erlangte Geſchicklichkeit vorausgeſezt.

II. Zuſaz. Zu den mechaniſchen Kräften eines arbeitenden Thieres oder Menſchen kann das Gewicht ſeines eigenen Körpers nicht gerechnet werden, indeſſen verſtärket oder vermindert dieſes Gewicht die Aeuſſerung der thieriſchen Kräfte, je nachdem die Richtung der Schwere mit der mittlern Richtung dieſer Kräfte zuſammenfällt, oder ihnen entgegengeſezt iſt.

III. Zuſaz. Will ſich der Menſch, oder überhaupt das Thier ohne alle weitere Laſt in aufrechter Stellung erhalten, ſo muß ſchon ein Theil ſeiner Kräfte, welcher dem ganzen Gewicht ſeines Körpers gleich iſt, dazu verwendet werden.

IV. Zuſaz. Die Kräfte, wodurch der Menſch nicht nur das Gewicht ſeines eigenen Körpers, ſondern auch noch eine Laſt in aufrechter Stellung trägt, kann man ſich als eine einzige Kraft vorſtellen, deren Richtung durch den Schwerpunct des Körpers geht, jener der Schwere entgegengeſezt iſt, und daher der Laſt und dem Gewicht des Körpers zuſammen das

Gleich-

Gleichgewicht hält. Drückt alſo G das Gewicht des Arbeiters, und K die größte Laſt aus, die er zu tragen im Stande iſt, ſo bezeichnet $G+K$ die Größe der Geſammtkraft des Arbeiters.

V. Zuſaz. Eben dieſes läßt ſich auf die Kräfte der Laſtthiere anwenden.

§. 92.

Aufgabe.

Ein Menſch, deſſen Gewicht $=G$, und Geſammtkraft $=G+K$ iſt, wird mit einer Laſt $Q < K$ beladen, man ſucht die Geſchwindigkeit v, mit welcher er ſich aufwärts am Ende der Zeit t ſchwingen kann.

Auflöſung.

1. Die ganze Laſt $G+Q$ wirket durch den Schwerpunct des Menſchen vertical abwärts, nun ſtemmet ſich der Laſtträger mit ſeinen Füſſen gegen den Boden, und giebt ſich durch Anwendung ſeiner Geſammtkraft $G+K$ einen Schwung aufwärts.

2. Bezeichnet alſo v die am Ende der Zeit t erlangte Geſchwindigkeit, ſo iſt den geſammten Kräften die einzelne Kraft $\frac{(G+Q)dv}{2gdt}$ nach der verticalen Richtung aufwärts am Schwerpuncte gleichgeltend, und hält alſo nach der entgegengeſezten Richtung abwärts mit ihnen zuſammen das Gleichgewicht (§. 6.), das iſt

$$3. \quad \frac{(G+Q)dv}{2gdt} = G+K-(G+Q) = K-Q$$

mithin

$$4.\ dv = 2gdt\,\frac{K-Q}{G+Q}.$$

I. Zuſaz. Darf man annehmen, daß während der Zeit t die angewandte Kraft gleichförmig wirkt, ſo daß alſo K als eine unveränderliche Größe betrachtet werden kann, ſo wird

$$v = 2gt\,\frac{K-Q}{G+Q}$$

wo keine Constans addirt werden darf.

II. Zuſaz. $ds = vdt$ (Reine Mech. §. 38.)

$$= 2gtdt\,\frac{K-Q}{G+Q},$$ folglich

$$s = gt^2\,\frac{K-Q}{G+G},$$ wo ebenfalls keine Constans hinzu kömmt.

III. Zuſaz. Nach Coulomb läßt ſich als Mittelzahl das Gewicht eines Menſchen $G = 70$ Kilogrammes, das iſt, $= 125$ ℔. bair. Handelsgewicht ſezen. Zur Beſtimmung der Größe K fehlet es noch an genauen Beobachtungen, vielleicht kann man am zuverläſſigſten $K = G$ ſezen.

IV. Zuſaz. Eben dieſe Säze gelten für Laſtthiere. Für das mittlere Gewicht eines Ochſen oder Pferdes kann man $G = 700$ Pfund und K etwa $= 200$ Pfund ſezen.

I. Abſchnitt.

Kraftäuſſerung eines Menſchen, wenn ſolcher auf wagrechtem Boden, oder auf einer ſchiefen Ebene eine Laſt trägt.

§. 93.

Aufgabe. (Fig. 44.)

Ein Arbeiter trägt auf ebenem Boden die Laſt Q; man ſucht ſeine mittlere Geſchwindigkeit v, wenn G und K ihre bisherigen Bedeutungen behalten, und c die Geſchwindigkeit bezeichnet, mit welcher eben dieſer Arbeiter unbelaſtet gehen könnte.

Auflöſung.

1. Der Menſch ſtehe mit dem einem Fuß in A, mit dem andern in B, und in D ſey deſſen Schwerpunct bey dieſer Stellung.

2. Sezet er nun ſeine Bewegung gegen AA′ fort, ſo bleibt er mit dem einen Fuſſe in B ſtehen, erhebt den andern von A, und bringt ſolchen vorwärts, dadurch wird aber auch

3. die Lage des Schwerpunctes D verrückt, denn ſo wie der eine Fuß von A nach B kömmt, rückt der Schwerpunct von D nach C, dreht ſich alſo um B, und beſchreibt den Bogen DC, deſſen Halbmeſſer BD iſt, wodurch nun dieſer Schwerpunct zur verticalen Höhe CE gehoben, und zugleich um die horizontale Weite $DE = \frac{1}{2} AB$ vorwärts gerückt wird.

4. Sezet man $BD = a$, $AB = 2b$, $CE = h$, ſo iſt $CE = BC - BE = BC - \sqrt{(BD^2 - DE^2)}$, alſo

$$h = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$$

5. Während endlich der Menſch die andere Hälfte des Schrittes vollendet, mithin den einen Fuß noch ganz bis in A′ vorwärts ſezet, indem der andere unverrückt in B bleibt, fährt der Schwerpunct ſich zu drehen fort, kömmt von C nach D′, ſinkt alſo wieder um die verticale Höhe CE, und rückt dabey abermal um $ED' = ED = b$ vorwärts.

6. Nun iſt ein Schritt vollendet, die nach der wagrechten Richtung erlangte Geſchwindigkeit des Schwerpunctes bleibt für den folgenden Schritt, und es darf daher nur mehr der Schwerpunct jedesmal während einem Schritte zur verticalen Höhe $CE = h$ gehoben werden.

7. Zu lezterm Behufe wendet der Menſch ſeine Geſammtkraft an, und dadurch iſt am Ende der Zeit t

$u = 2gt \frac{K-Q}{G+Q}$, und $s = gt^2 \frac{K-Q}{G+Q}$ (§. 92. I u. II. Zuſaz.).

8. Vermög der Trägheit würde nun der Schwerpunct, ſich ſelbſt überlaſſen, noch zur Höhe $\frac{u^2}{4g}$ ſteigen, und dazu die Zeit $t' = \frac{u}{2g}$ erfoderlich ſeyn (Reine Mech. §. 132. Nr. 4 u. 5.), damit alſo der Schwerpunct zur ganzen Höhe $CE = h$ gelangt, ſo muß

$$9.\ h = s + \frac{u^2}{4g} = gt^2 \frac{K-Q}{G+Q} + \frac{4g^2t^2}{4g} \frac{(K-Q)^2}{(G+Q)^2}$$

$$= gt^2 \frac{K-Q}{G+Q} + gt^2 \frac{(K-Q)^2}{(G+Q)^2}$$

$$= gt^2 \frac{K+Q}{G-Q} \left[1 + \frac{K-Q}{G+Q}\right] = gt^2 \frac{K-Q}{G+Q} \cdot \frac{G+K}{G+Q}$$

ſeyn, und daher

10. $t^2 = \frac{h}{g} \cdot \frac{(G+Q)^2}{(K-Q)(G+K)}$

11. Die zum Steigen erfoderliche Zeit iſt

$$t + t' = t + \frac{u}{2g} = t + t\,\frac{K-Q}{G+Q} \text{ (Nr. 7.)}$$

$$= t\left(1 + \frac{K-Q}{G+Q}\right) = t\,\frac{G+K}{G+Q}$$

$$= \frac{G+K}{G+Q} \surd \left[\frac{h\,(G+Q)^2}{g.(K-Q)(G+K)}\right] = \surd\left[\frac{h}{g} \cdot \frac{G+K}{K-Q}\right]$$

12. Während der zweyten Hälfte des Schrittes, bis nemlich der Schwerpunct wieder von C nach D' gelangt, alſo um h ſinket, verfließet ebenfalls die Zeit $t + t'$, denn zur Höhe $\frac{u^2}{4g}$ iſt die Zeit t' (Nr. 8.) erforderlich, und bis die noch vorhandene Geſchwindigkeit u durch die Geſammtkraft aufgehoben wird, mithin der Schritt vollendet iſt, gehört die Zeit t (Nr. 7.), mithin

13. iſt die während einem ganzen Schritt verfloſſene Zeit $T = 2t + 2t' = 2t\,\frac{G+K}{G+Q}$ (Nr. 11.)

$$= 2 \surd\left[\frac{h}{g} \cdot \frac{G+K}{K-Q}\right]$$

14. Bezeichnet endlich v die mittlere Geſchwindigkeit, mit welcher der Arbeiter die Laſt Q forträgt, ſo iſt wegen der gleichförmigen Bewegung $2b = v\,T$ (Reine Mechan. §. 36. III. Zuſ.), mithin

15. $v = \frac{2b}{T} = 2b : 2 \surd\left[\frac{h}{g} \cdot \frac{G+K}{K-G}\right]$

$$= b \surd\left[\frac{g}{h} \cdot \frac{K-Q}{G+K}\right]$$

16. Für Q = c, wird nun v = c (per hyp.) mithin

$$c = b\sqrt{\left[\frac{g}{h} \cdot \frac{K}{G+K}\right]} \text{ folglich}$$

17. $$v : c = b\sqrt{\left[\frac{g}{h} \cdot \frac{K-Q}{G+K}\right]} : b\sqrt{\left[\frac{g}{h} \cdot \frac{K}{G+K}\right]}$$

$$= \sqrt{(K-Q)} : \sqrt{K}, \text{ alſo}$$

18. $$v = c\sqrt{\frac{K-Q}{K}} = c\sqrt{\left[1 - \frac{Q}{K}\right]},$$

wodurch die Aufgabe aufgelöſet iſt.

I. Zuſaz. $c = b\sqrt{\left[\frac{g}{h} \cdot \frac{K}{G+K}\right]}$ (Nr. 16.)

$$c^2 = b^2 \frac{g}{h} \cdot \frac{K}{G+K}, \text{ mithin}$$

$$\frac{c^2 h}{b^2 g} G + \frac{c^2 h}{b^2 g} K = K; \text{ und}$$

$$K\left(1 - \frac{c^2 h}{b^2 g}\right) = K\frac{b^2 g - c^2 h}{b^2 g} = \frac{c^2 h}{b^2 g} G, \text{ alſo}$$

$$K = \frac{c^2 h}{b^2 g - c^2 h} G.$$

II. Zuſaz. Da $v^2 : c^2 = K - Q : K$ (Nr. 17.) alſo $Kv^2 = Kc^2 - Qc^2$, ſo wird

$$Q = K\frac{c^2 - v^2}{c^2} = K\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

III. Zuſaz. Verwendet der Menſch nicht ſeine Geſammtkraft G + K, ſondern nur einen Theil derſelben G + P, ſo daß alſo P < K iſt, ſo muß man in den bisherigen Gleichungen ſtatt K die Gröſe P ſezen, dadurch wird nun Nr. 15.

$$v = b\sqrt{\left[\frac{g}{h} \cdot \frac{P-Q}{G+P}\right]}$$

IV. Zuſaz. Auf mein Anſuchen wurden von der königl. Polizey-Commission zu Landshut einige Bothen und Laſtträger vorgerufen, und mir ihre gemachten Aeuſſerungen gefälligſt mitgetheilet:

a. Kajetan Moſer, k. b. Lottoboth von Landshut, 40 Jahre alt, verſicherte, daß er monatlich dreymal den Weg von Landshut nach München zu machen habe, und daß er denſelben gewöhnlich in 10 Stunden hinterlege, daß er aber eben dieſen Weg, wenn es dringende Umſtände foderten, in 8 Stunden zu machen ſich erböthe. — Dieſer Both iſt 5 Schuh 7 Zoll hoch.

b. Barthlmä Riemer, 27 Jahre alt, mittlerer unterſezter Statur, welcher während den lezten Kriegen von der königl. Local-Kriegs-Commission als gewöhnlicher Both gebraucht wurde, verſicherte, daß er ſeinen Gang nach München immer auf der Landſtraſſe gemacht habe, und dazu, bey gutem Wetter und Weg, gewöhnlich 10 Stunden gebraucht, dabey aber zwey oder auch dreymal eingekehrt habe, bey ſchlechter Witterung waren ihm aber zu dieſer Fußreiſe 12 Stunden nothwendig.

Da nun von Landshut bis München 18 Stundſäulen ſtehen, die Entfernung einer Stundſäule von der andern 12703 bair. Schuh beträgt (Arithm. Anhang) ſo iſt der jedesmal hinterlegte Weg 228654 bair. Schuh lang, mithin die Geſchwindigkeit für die dazu verwendete Zeit

a. von	12 Stunden	=	5,3
b. „	10 Stunden	=	6,35
c. „	8 Stunden	=	7,94 b. Schuh.

Man kann daher die größtmögliche Geſchwindigkeit = 7 bair. Schuhe ſezen.

V. Zuſaz. Bey einem Manne, deſſen Länge 5,85 bair. Schuh iſt, fand ich durch mehrere Beobachtungen, daß er jedesmal die Länge von 100 bair. Schuhen in 40 Schritten hinterlegte, mithin die Weite eines Schrittes = 2,5 beträgt, die Länge ſeines Fußes iſt = 3,125 bair. Schuh.

VI. Zuſaz. Legt man dieſe Beſtimmungen für einen Mann von mittlerer Größe und Conſtitution zum Grunde, ſo werden im bair. Fuß-Maaße die Größen Nr. 5.

1. $a = 3{,}125$; $2b = 2{,}5$ alſo $b = 1{,}25$, und $c = 7$.

2. $h = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$ (Nr. 4.) $= 0{,}261$

3. $c^2 h = 49 \times 0{,}261 = 12{,}789$

4. $b^2 g = 1{,}562 \times 16{,}8015$ (Reine Mech. §. 130. V. Zuſ.)
$= 26{,}2523$

5. $\frac{b^2 g}{h} = 100{,}584$;

6. $K = \frac{c^2 h}{b^2 g - c^2 h} G$ (I. Zuſ.)

$= \frac{12{,}789}{13{,}4633} G = 0{,}95\, G$

etwas kleiner, als §. 92. III. Zuſ. angenommen wurde, für G = 125 ℔., würde alſo K = 118,75 Pfund.

VII. Zuſaz. Sezet man nach Lambert $a = 2{,}5$; $2b = 2$, $c = 6$, alſo $g = 15{,}625$ (Reine Mech. §. 130. V. Zuſ.), alles in rheinl. Fußmaaße, ſo wird

$h = a - \sqrt{(c^2 - b^2)}$ (Nr. 4.) $= 2{,}5 - \sqrt{(6{,}25 - 1)}$
$= 2{,}5 - \sqrt{5{,}25} = 2{,}5 - 2{,}3 = 0{,}2$, folglich

$K = \frac{c^2 h}{b^2 g - c^2 h} G$ (I. Zuſ.) $= \frac{36 \times 0{,}2}{15{,}625 - 36 \times 0{,}2} G$
$= 0{,}8546\, G$.

Sezet man endlich noch $G = 125$ Pfund, ſo iſt $K = 106,825$ ebenfalls kleiner als §. 92. III. Zuſ. angenommen wurde.

§. 94.

Erklärung.

Die Größe der menſchlichen nüzlichen Kraftäuſſerung, des Nuzeffectes §. 20., hängt ab

a. von der Größe der Laſt Q, welche gehoben oder in Bewegung geſezt wird,

b. von der Geſchwindigkeit v, mit welcher dieſes geſchieht, und

c. von der Dauer t, während welcher dieſe Wirkung fortgeſezt wird, es iſt daher durch das Product Qvt der Nuzeffect der körperlichen Kraftäuſſerung beſtimmt.

I. Zuſaz. Da bey der gleichförmigen Bewegung $s = vt$ (Reine Mech. §.36. III Zuſ.) iſt, ſo giebt auch das Product der gehobenen Laſt in den hinterlegten Weg die Größe der nüzlichen Kraftäuſſerung an.

II. Zuſaz. Die Laſt des eigenen Körpers kann in Beziehung auf die nüzliche Kraftäuſſerung nicht in Anſchlag gebracht werden, und iſt nur als eine Nebenlaſt zu betrachten, wird dieſe aber ebenfalls mit zur Laſt gezogen, ſo giebt $(G+Q)vt = (G+Q)s$ die Größe des Totaleffectes an.

III. Zuſaz. Gewöhnlich wird die Schäzung des Effectes der menſchlichen Kräfte auf die Dauer eines Tages eingeſchränkt, ſo daß alſo s den während einem Tage hinterlegten Weg, v die mittlere Geſchwindigkeit, und t die Dauer der täglichen Arbeit in Secunden bezeichnet.

§. 95.

Erfahrungen.

1. Coulomb machte in Frankreich verſchiedenen Laſtträgern den Antrag, Meubles von einem Hauſe in ein anderes um 2 Kilomètres, das iſt, um 6853 bair. Schuhe, entferntes, und zwar auf jedem Gange die Laſt von 58 Kilogrammes oder 103 bair. Pfund zu tragen; einſtimmig äuſſerten ſich dieſe Laſtträger dahin, daß ſie unter dieſen Bedingungen während einem ganzen Tag nur 6 Gänge machen, den folgenden Tag aber dieſe angeſtrengte Arbeit nicht mehr fortſezen könnten.

2. Mehrere Männer, welche Waaren zum Verkauf im Lande herumtragen, verſicherten auf Befragen Coulombs, daß ſie gewöhnlich eine Laſt von 44 Kilogrammes, das iſt von 78,37 bair. Pfunden trügen, und damit des Tages einen Weg von 20 Kilomètres, oder von 68526,2 bair. Schuhen hinterlegten.

3. Von der königl. Polizey-Commission zu Landshut wurden 3 Waarenträger vernommen, die von ihnen gegebenen Nachrichten ſind:

a. Der erſte iſt 42 Jahre alt, und trägt ſchon 20 Jahre bey ſeiner Handelſchaft mit Schmiedwaaren die Krächſe; in einem Alter von 15 Jahren trug er ſchon 50 bis 60 Pfund, in ſeinem männlichen Kraftalter aber gewöhnlich über 100 Pfund, wohl auch 115 bis 120 Pfund, und hinterlegt dabey immer in einem Tage den Weg von 4 bis 5 Stunden.

b. Der zweyte, 33 Jahre alt, handelt mit kurzen Waaren, trägt ſchon 10 Jahre die Krächſe, gewöhnlich trägt er mehr als einen Centner, manchmal 120 bis 130 Pfund Berg auf, Berg ab, und hinterlegt dabey täglich 4 bis 5 Stunden Weges.

c. Der dritte, 18 Jahre alt, handelt mit Schwämmen, Feuerſteinen und Feuereiſen, mit einer Laſt von 55 bis 60 Pfund hinterlegt er täglich gegen 5 Stunden Weges.

Dabey ſtimmten alle 3 überein, daß es ſehr viel darauf ankomme, daß die Krächſe gut gepackt, und die Laſt gleichförmig vertheilt ſey, und daß man bey dieſer Arbeit eine nahrhafte Koſt, und vorzüglich nahrhaften Trunk erhalte.

I. Zuſaz. Bey der erſten Erfahrung beſteht die ganze Tagesarbeit darinn, daß der Laſtträger 103 Pfd. 6853 bair. Schuh weit trägt, dann unbelaſtet dieſen Weg zurückkehrt, um eine neue Laſt zu holen, und endlich ſo einen Hin- und Hergang 6 mal wiederholet; ſezet man wie bisher das Gewicht G des Laſtträgers auf 125 Pfund, ſo wird der tägliche Totaleffect $= [(125+103)+125]\, 6 \times 6853 = 14514654$ Pfund zur Weite eines bair. Schuhes; oder 14515 zur Weite von 1000 bair. Schuhen getragen. Die eigentliche Arbeit, das iſt, der Nuzeffect hingegen iſt $= 103 \times 6853 \times 6 = 4235154$ Pfund zur Weite eines, oder 4235 Pfund zur Weite von 1000 bair. Schuhen getragen.

II. Zuſaz. Bey der zweyten Erfahrung iſt der tägliche Totaleffect $(G+Q)\, s = (125+78{,}37) \times 68526{,}2 = 13936177$ Pfund zur Weite eines b. Schuhes, oder 13936 Pfund zur Weite von 1000 Fuß getragen. Der Nuzeffect hingegen, oder $Q\, s = 78{,}37 \times 68526{,}2 = 5370398$ Pfund zur Weite eines, oder 5370 Pfund zur Weite von 1000 Fuß getragen.

III. Zuſaz. Die unter Nr. 3. angeführten Erfahrungen ſtimmen darinn überein, daß bey paſſender

Nahrung ein Krächſenträger gewöhnlich des Tages einen Weg von 4 bis 5 Stunden hinterlegt, da man nun den Weg von Landshut auf München, alſo 228654 baier. Schuh (§ 93. IV. Zuſ.) im Gehen auf 14 Stunden anſchlägt, ſo trifft auf eine Stunde die Weite von 16332,5 Fuß. Nimmt man alſo dieſen Erfahrungen gemäß an, daß ein Krächſenträger vom gehörigen Alter und guter Constitution 100 ℔. in einem Tage 4 Stunden, das iſt 65330 baier. Schuh weit trägt, ſo iſt der Totaleffect = (125 + 100) 65330 = 14699250 ℔. zur Weite eines, oder 14699 ℔. zur Weite von 1000 Fuß getragen.

Der Nuzeffect iſt 6533000 ℔. zur Weite eines, oder 6533 ℔. zur Weite von 1000 Fuß getragen.

IV. Zuſaz. Vergleichet man dieſe Totaleffecte, ſo iſt ihr Verhältniß in umgekehrter Ordnung

$$14699 : 13936 : 14515 = 1 : 0,9481 : 0,9875$$

Das Verhältniß der Nuzeffecte bey eben dieſer Ordnung iſt

$$6533 : 5370 : 4235 = 1 : 0,822 : 0,6482;$$

ſo daß alſo in Baiern ein Krächſenträger in einem Tage vielmehr leiſtet, als jene in Frankreich.

§. 96.

Erfahrungsſaz.

Je größer die Anſtrengung der Kräfte iſt, welche der Menſch auf die Hebung oder Bewegung einer Laſt, oder auf eine beſtimmte Geſchwindigkeit dieſer Bewegung verwenden muß, das iſt, je größer der Aufwand der Kräfte, deſto kürzer iſt die Dauer, bis der Menſch ermüdet iſt, alſo ſeine Kräfte erſchöpft ſind, mithin Ruhe zur Erholung nothwendig wird.

I. Zuſaz. Verwendet der Menſch, wie bisher §. 91 — 93 faſt immer angenommen wurde, auf die Unterſtüzung oder Bewegung der Totallaſt $G+Q$ ſeine Geſammtkraft $G+K$, ſo iſt die Dauer ſeiner Arbeit ſehr kurz, verwendet er aber nur wie §. 93. III Zuſaz einen Theil $G+P$ derſelben, ſo daß alſo $P<K$ iſt, ſo bleibt ihm der Ueberreſt $K-P$ zur Erſezung des Verluſtes, den er fortwährend leidet.

II. Zuſaz. Man kann mit Grund ſchließen, daß der Verluſt während einer beſtimmten Zeit der Anſtrengung proportionirt ſey, mithin wenn $\frac{1}{n}(G+P)$ der auf eine Secunde treffende Verluſt iſt, für t Secunden ſolcher $= \frac{1}{n}(G+P)t$ wird.

III. Zuſaz. Die Arbeit kann nur ſo lange fortgeſezt werden, bis die Kräften erſchöpft ſind, mithin

$$\frac{1}{n}(G+P)\,t = K-P, \text{ alſo}$$

$$t = n\,\frac{K-P}{G+P}$$ iſt, ſo daß alſo t die Dauer der Arbeit in Secunden ausdrückt.

§. 97.

Aufgabe.

Bey den bisher angenommenen Bezeichnungen ſoll man die Kraft P beſtimmen, wo bey dem Gange eines unbelaſteten Menſchen vt ein maximum wird.

Auflöſung.

1. Gemäß den gegebenen Bedingungen iſt nun $Q=0$; mithin

2. $v = b\sqrt{\frac{g}{h}}\sqrt{\frac{P}{G+P}}$ (§. 93. III. Zuſ.) und

$$t = n\,\frac{K-P}{G+P}$$ (§. 96. III. Zuſ.), mithin

$$3.\quad vt = nb\sqrt{\frac{g}{h}}\ \sqrt{\left(\frac{P}{G+P}\right)\cdot\frac{K-P}{G+P}}$$

$$= nb\sqrt{\frac{g}{h}} \times \frac{KP^{\frac{1}{2}} - P^{\frac{3}{2}}}{(G+P)^{\frac{3}{2}}}$$

4. Da nun $nb\sqrt{\frac{g}{h}}$ als ein unveränderlicher Factor zur Beſtimmung des maximum nichts beyträgt, ſo kann man ſolchen weglaſſen, und den andern veränderlichen Factor $= y$ ſezen, das iſt

$$5.\quad y = \frac{KP^{\frac{1}{2}} - P^{\frac{3}{2}}}{(G+P)^{\frac{3}{2}}}, \text{ mithin}$$

$$dy = \frac{(G+P)^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{2}KP^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}P^{\frac{1}{2}})dP - (KP^{\frac{1}{2}} - P^{\frac{3}{2}})\frac{3}{2}(G+P)^{\frac{1}{2}}dP}{(G+P)^3}$$

$$6.\quad \frac{dy}{dP} = 0 \text{ (Arithm. §. 320.)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(G+P)^{\frac{3}{2}}(KP^{-\frac{1}{2}} - 3P^{\frac{1}{2}}) - \frac{3}{2}(G+P)^{\frac{1}{2}}(KP^{\frac{1}{2}} - P^{\frac{3}{2}})}{(G+P)^3}$$

$$= (G+P)(K-3P) - 3(KP - P^2)$$
$$= GK + KP - 3GP - 3P^2 - 3KP - 3P^2$$
$$= GK - 3GP - 2KP, \text{ folglich}$$

$$7.\quad P = \frac{GK}{2K+3G}$$

8. Ferner $dy = GKdP - 3GPdP - 2KPdP$ (Nr. 6.) mithin

$$9.\quad d^2y = -3GdP^2 - 2KdP^2, \text{ folglich}$$

$$10.\quad \frac{d^2y}{dP^2} = -3G - 2K,$$ ſo daß alſo für den Nr. 7. gefundenen Werth von P die Function y, mithin auch vt ein maximum iſt.

I. Zuſaz. Bezeichnet nun x die Geſchwindigkeit für den eben beſtimmten Werth der Kraft P, ſo wird nach gehöriger Substitution die Gleichung Nr. 2.

$$x = b\sqrt{\frac{g}{h}}\sqrt{\left\{\frac{GK}{2K+3G} : \left(G + \frac{GK}{2K+3G}\right)\right\}}$$

$$= b\sqrt{\frac{g}{h}}\sqrt{\left\{\frac{GK}{2K+3G} : \frac{3GK+3G^2}{2K+3G}\right\}}$$

$$= b\sqrt{\frac{g}{h}}\sqrt{\left\{\frac{GK}{3G^2+3GK}\right\}}$$

$$= b\sqrt{\frac{g}{h}}\sqrt{\frac{K}{3(G+K)}}, \text{ alſo}$$

$$x^2 = \tfrac{1}{3} b^2 \frac{g}{h} \frac{K}{G+K} = \tfrac{1}{3} c^2 \ (\text{§. 93. I. Zuſ.}).$$

II. Zuſaz. Für $c = 7$ baier. Fuß (§. 93. VI. Zuſ.) wird $x = c\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 7\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 4{,}04145$ baier. Fuß. Die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit eines unbelaſteten Fußgängers; da nun eine deutſche Meile 25406 baier. Fuß lang iſt (Arithm. Anhang), ſo würde mit dieſer Geſchwindigkeit eine Meile in 6286 Secunden, das iſt, in Zeit einer Stunde, 44 Minuten und 46 Secunden hinterlegt.

III. Zuſaz. Gemäß der Erfahrung, wenn jemand mehrere Tage hintereinander eine Fußreiſe zu machen hat, ſo kann er täglich leicht 50 Kliomètres, das iſt, 171315 baier. Fuß, alſo beynahe $13\tfrac{1}{2}$ baier. Stundenſäulen hinterlegen, iſt nun deſſen Geſchwindigkeit die eben beſtimmte $x = 4{,}04145$ baier. Fuß in einer Secunde, ſo braucht er zur Hinterlegung des ganzen Weges 42389 Secunden, das iſt, 11 Stunde, 46

Min. und 29 Sec.; welches mit der Erfahrung bey einem mittlern Fußgeher übereinſtimmt. Nach Beobachtungen beträgt meine mittlere Geſchwindigkeit im Gehen 4,5 baier. Fuß; mithin würde ich den Weg von 171315 baier. Fuß in 10 Stunden 34 Min. und 30 Secund. hinterlegen.

IV. Zuſaz. Bey dieſer Geſchwindigkeit x muß nun der Fußgänger nebſt der Kraft G, wodurch das eigene Gewicht gehalten wird, zur Unterhaltung immer die Kraft $P = \frac{GK}{2K+3G}$ zuſezen. Nimmt man $G = K = 125$ ℔. (§. 92. III. Zuſ.), ſo iſt

$$P = \frac{G^2}{5G} = \frac{1}{5} G = 25 \text{ ℔. baier. Gewichtes.}$$

§. 98.

Aufgabe.

Für die gegebene Laſt Q, welche jemand auf ebenem wagrechten Boden zu tragen hat, die Größe der Kraft P zu beſtimmen, damit der Nuzeffect Qvt ein maximum wird.

Auflöſung.

1. Die Laſt Q iſt als eine gegebene Größe unveränderlich, es kömmt alſo nun darauf an, daß vt ein maximum giebt.

2. $v = b \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\left(\frac{P-Q}{G+P}\right)}$ (§. 93. III. Zuſ.)

$t = n \frac{K-P}{G+P}$ (§. 96. III. Zuſ.), alſo

3. vt

3. $vt = nb\sqrt{\frac{g}{h}} \times \frac{(P-Q)^{\frac{1}{2}}(K-P)}{(G+P)^{\frac{3}{2}}}$, und

$$v^2t^2 = n^2b^2 . \frac{g}{h} . \frac{(P-Q)(K-P)^2}{(G+P)^3},$$

wo nur P eine veränderliche Größe iſt, man ſeze daher den veränderlichen Factor = y, oder

4. $y = \frac{(P-Q)(K-P)^2}{(G+P)^3}$, ſo wird

5. $dy =$

$$\frac{(G+P)^3[(K-P)^2dP-2(P-Q)(K-P)dP]-3(P-Q)(K-P)^2(G+P)^2dP}{(G+P)^6}$$

mithin

6. $\frac{dy}{dP} = 0 = \frac{(G+P)[(K-P)^2-2(P-Q)(K-P)]-3(P-Q)(K-P)^2}{(G+P)^4}$

$= (G+P)[K-P-2P+2Q]-3(P-Q)(K-P)$

$= (G+P)[K+2Q-3P]-3(PK-P^2-KQ+QP)$

$= (GK+2GQ-3GP+KP+2QP-3P^2-3KP$
$+3P^2+3KQ-3QP$

$= GK+2GQ+3KQ-QP-2KP-3GP$

$= GK+2GQ+3KQ-(Q+2K+3G)P$, alſo

7. $(Q+2K+3G)P = GK+2GQ+3KQ$, und

8. $P = \frac{GK+2GQ+3KQ}{Q+2K+3G}$

9. Nach der lezten Gleichung Nr. 6. wird

$d^2y = -(Q+2K+3G)\,dP^2$, mithin

10. $\frac{d^2y}{dP^2} = -(Q+2K+3G)$, ſo daß alſo für den Nr. 8. beſtimmten Werth von P die Function ein maximum wird (Arithm. §. 320.).

I. Zuſaz. Für den Nr. 8. beſtimmten Werth von P, iſt

$$P - Q = \frac{GK + 2GQ + 3KQ}{Q + 2K + 3G} - Q$$

$$= \frac{GK + 2GQ + 3KQ - Q^2 - 2KQ - 3GQ}{Q + 2K + 3G}$$

$$= \frac{GK - GQ + KQ - Q^2}{Q + 2K + 3G}$$; eben ſo

$$G + P = G + \frac{GK + 2GQ + 3KQ}{Q + 2K + 3G}$$

$$= \frac{GQ + 2GK + 3G^2 + GK + 2GQ + 3KQ}{Q + 2K + 3G}$$

$$= \frac{3GK + 3GQ + 3KQ + 3G^2}{Q + 2K + 3G}$$, mithin

$$\frac{P - Q}{G + P} = \frac{GK - GQ + KQ - Q^2}{3(GK + GQ + KQ + G^2)}$$

$$= \frac{(G+Q)(K-Q)}{3(G+Q)(G+K)} = \frac{K - Q}{3(G+K)}$$

Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 2., ſo erhält man für die gegebene Laſt Q die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit

$$v = b \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\left(\frac{K - Q}{3(G+K)}\right)}$$

II. Zuſaz. Für den unbelaſteten Menſchen iſt nun $Q = 0$, mithin $v = x$, alſo

$$x = b \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\left\{\frac{K}{3(G+K)}\right\}}$$ wie (§. 97. I. Zuſ.)

$$= c \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

III. Zuſaz. $v^2 = b^2 \frac{g}{h} \quad \frac{K-Q}{3(G+K)}$ (I. Zuſ.)

$$x^2 = b^2 \frac{g}{h} \quad \frac{K}{3(G+K)} \text{ (II. Zuſ.)}$$

mithin

$$\frac{v^2}{x^2} = \frac{K-Q}{K} = 1 - \frac{Q}{K}\text{, folglich}$$

$v = x \sqrt{\left(1 - \frac{Q}{K}\right)}$ ähnlich der Gleichung §. 93. Nr. 18.

IV. Zuſaz. Für die beſtimmte Laſt Q wird, wenn der Nuzeffect ein maximum ſeyn ſoll,

$$K - P = K - \frac{GK + 2GQ + 3KQ}{Q + 2K + 3G} \text{ (Nr. 8.)},$$

$$= \frac{KQ + 2K^2 + 3GK - GK - 2GQ - 3KQ}{Q + 2K + 3G}$$

$$= \frac{2K^2 + 2GK - 2GQ - 2KQ}{Q + 2K + 3G}$$

$$= \frac{2(G+K)(K-Q)}{Q + 2K + 3G}\text{, und eben ſo}$$

$$G + P = \frac{3GK + 3GQ + 3KQ + 3Q^2}{Q + 2K + 3G} \text{ (I. Zuſ.)}$$

$$= \frac{3(G+K)(G+Q)}{Q + 2K + 3G}\text{, folglich die Dauer}$$

$$t = n \frac{K - P}{G + P} \text{ (§. 96. III. Zuſ.)} = n \frac{2(G+K)(K-Q)}{3(G+K)(G+Q)}$$

$$= \tfrac{2}{3} n \quad \frac{K-Q}{G+Q}$$

V. Zuſaz. $v = b \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\left\{\frac{K-Q}{3(G+K)}\right\}}$ (I. Zuſ.)

$$v^2 = \frac{b^2 g}{3h} \cdot \frac{K-Q}{G+K}$$

$$3hv^2G + 3hv^2K = b^2gK - b^2gQ$$

$$3hv^2G + b^2gQ = (b^2g - 3hv^2)K, \text{ mithin}$$

$$K = \frac{3hv^2G + b^2gQ}{b^2g - 3hv^2}$$

VI. Zuſaz. Bey dem königl. baier. Militär trägt ein Fußgänger, wenn er in's Feld marſchirt

1. das Gewehr mit Zugehör an baier. Gewicht		8,5 ℔.
2. die Patrontaſche mit 60 ſcharfen Patronen		6,5
3. den gepackten Torniſter mit aufgerolltem Mantel	ſ ſ ſ	11
4. die Kuppel und den Säbel	ſ ſ	2,25
5. das Casquet	ſ ſ ſ ſ	2,5
6. einen Feldkeſſel	ſ ſ ſ	4
ſohin zuſammen eine Laſt von	ſ ſ	34,75

Mit dieſer Laſt kann er täglich einen Weg von 9 baier. Chaussée-Säulen, und zwar ohne Beſchwerniß innerhalb 10 Stunden hinterlegen. Im Nothfalle kann er auch in einem Tag 13½ Stundenſäulen weit marſchieren, und in lezten Feldzügen wurde einigemal 18 Stundſäulen weit marſchirt; allein dieſe auſſerordentlichen Anſtrengungen dürfen nur ſehr ſelten ſtatt finden.

VII. Zuſaz. Dieſen Erfahrungen gemäß hinterlegt der Fußgänger mit einer Laſt = 34,75 ℔. gewöhnlich in einem Tage, und zwar in 9 Stunden, wenn man auf kleine Zwiſchenerholungen eine Stunde rechnet, den Weg von 9 Stundenſäulen, alſo während einer Stunde oder 3600 Secunden den Weg von einer Stundſäule oder 12703 baier. Schuhen, mithin iſt die Geſchwindigkeit $v = \frac{12703}{3600} = 3{,}53$ baier. Fuß.

VIII. Zuſaz. Nimmt man endlich noch an, daß für die Laſt Q = 34,75 ℔. dieſe Geſchwindigkeit v = 3,53 die vortheilhafteſte ſey, ſezet ferner G = 125 ℔. dann aus §. 93. VI. Zuſ. h = 0,261; $b^2 g$ = 26,2523 ſo wird

$$K = \frac{3hv^2 G + b^2 g Q}{b^2 g - 3hv^2} \text{ (V. Zuſ.)}$$

$$= \frac{1218,65 + 912,27}{26,2523 - 9,7492} = \frac{2130,92}{16,5031}$$

$$= 129,122 \text{ ℔.}$$

IX. Zuſaz. Die Total-Kraftäuſſerung iſt dieſer Erfahrung gemäß (125 + 34,75) 12703 × 9 = 18263737 ℔. zur Weite eines Fußes = 18263 zur Weite von 1000 Fuß getragen.

§. 99.

Aufgabe.

Bey den bisherigen Bezeichnungen auf ebenem wagrechtem Boden für einen Laſtträger die Größen anzugeben, damit der Nuzeffect Qvt ein maximum wird.

Auflöſung.

1. Der Nuzeffect wird ein maximum für jede Laſt Q, wenn

$$2.\ P = \frac{GK + 2GQ + 3KQ}{Q + 2K + 3G} \text{ (§. 98. Nr. 8.) und}$$

dadurch

$$3.\ v = b\sqrt{\frac{g}{h}}\sqrt{\frac{(K - Q)}{(3(G+K))}} \text{ (§. 98. I. Zuſ.)}$$

wird.

4. Bey dieſem Verhältniſſe iſt dann die entſprechende Dauer, oder

$t = \frac{2}{3} n \frac{K - Q}{G + Q}$ (§. 98. IV. Zuſ.), mithin

5. $Q v t = Q b \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\left(\frac{K - Q}{3(G+K)}\right)} \cdot \frac{2}{3} n \; \frac{K - Q}{G + Q}$

$= \frac{2}{3} b n \sqrt{\left(\frac{g}{3\,(Q+K)}\right)} \cdot \frac{Q(K - Q)^{\frac{3}{2}}}{G + Q}$

6. In dieſer Gleichung iſt nur Q noch eine veränderliche Größe, welche daher noch beſtimmt werden muß, damit die ganze Function ein maximum wird, man ſeze alſo den veränderlichen Factor in der lezten Gleichung = y, das iſt

7. $y = \frac{Q\,(K - Q)^{\frac{3}{2}}}{G + Q}$, ſo wird

$$dy = \frac{(G+Q)\left[(K-Q)^{\frac{3}{2}} dQ - \frac{3}{2} Q\,(K-Q)^{\frac{1}{2}} dQ\right] - Q\,(K-Q)^{\frac{3}{2}} dQ}{(G+Q)^2}$$

8. $\frac{dy}{dQ} = 0 = \frac{(G+Q)\left[(K-Q)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} Q\,(K-Q)^{\frac{1}{2}}\right] - Q\,(K-Q)^{\frac{3}{2}}}{(G+Q)^2}$

$= (G+Q)\left[K - Q - \frac{3}{2} Q\right] - Q\,(K - Q)$

$= (G + Q)\,(K - \frac{5}{2} Q) - Q\,(K - Q)$

$= GK - \frac{5}{2}\,GQ + KQ - \frac{5}{2}\,Q^2 - KQ + Q^2$

$= GK - \frac{5}{2}\,GQ - \frac{3}{2}\,Q^2$, folglich

9. $3Q^2 + 5GQ = 2GK$

$Q^2 + \frac{5}{3}\,GQ = \frac{2}{3}\,GK$, mithin

10. $Q = -\frac{5}{6}\,G + \sqrt{\left[\frac{2}{3}\,GK + \frac{25}{36}\,G^2\right]}$

$= \frac{-5G + \sqrt{(24\,GK + 25\,G^2)}}{6}$

11. Aus der lezten Gleichung Nr. 8. wird ferner

$$d^2y = -\tfrac{5}{2}GdQ^2 - \tfrac{6}{2}QdQ^2, \text{ alſo}$$

$$\frac{d^2y}{dQ^2} = -\tfrac{5}{2}G - 3Q,$$ ſo daß alſo für obigen Werth von Q (Nr. 10.) die Größe y (Arithm. §. 320.), folglich auch die Größe Qvt ein maximum iſt.

I. Zuſaz. Sezet man den für Q gefundenen Werth (Nr. 10.) in die für P beſtimmte Gleichung Nr. 2., ſo wird

$$GK+2GQ+3KQ=[6GK-10G^2-15GK+2G\sqrt{(24GK+25G^2)} + 3K\sqrt{(24GK+25G^2)}] : 6$$
$$=[3K\sqrt{(24GK+25G^2)}-9GK-10G^2+2G\sqrt{(24GK+25G^2)}] : 6$$

Ferner

$$3G+2K+Q=[18G+12K-5G+\sqrt{(24GK+25G^2)}] : 6$$
$$=[12K+13G+\sqrt{(24GK+25G^2)}] : 6, \text{ alſo}$$

$$P=\frac{3K\sqrt{(24GK+25G^2)}-9GK-10G^2+2G\sqrt{(24GK+25G^2)}}{12K+13G+\sqrt{(24GK+25G^2)}}$$

und wenn man nun wirklich dividirt, ſo iſt

$$P = \tfrac{1}{4}\sqrt{(24GK+25G^2)} - \tfrac{5}{4}G$$
$$= \frac{-5G+\sqrt{(24GK+25G^2)}}{4}$$

II. Zuſaz. Aus dieſen Werthen für P und Q bey der vortheilhafteſten Vorrichtung ergiebt ſich

$$P : Q = \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{3} = 3 : 2, \text{ mithin}$$
$$P = \tfrac{3}{2}Q, \text{ und } Q = \tfrac{2}{3}P.$$

III. Zuſaz. Sezet man endlich K = G, ſo iſt

$$P = \frac{-5G+\sqrt{(24G^2+25G^2)}}{4} = \frac{-5G+7G}{4}$$

$= \frac{1}{2}$ G, mithin

$Q = \frac{1}{3}$ G, und

$$v = b \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\frac{(G - \frac{1}{3}G)}{(6G)}} \text{ (Nr. 3.)} = b \sqrt{\frac{g}{h}} \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{1}{3} b \sqrt{\frac{g}{h}} .$$

IV. Zuſaz. Nimmt man endlich noch G = 125 ℔. und $b^2 \frac{g}{h}$ = 100,584 (§. 93. VI. Zuſ. Nr. 5.), ſo iſt

$P = \frac{1}{2} . 125$ ℔. $= 62\frac{1}{2}$ ℔.

$Q = \frac{1}{3} . 125$ ℔. $= 41\frac{2}{3}$ ℔.

$v = \frac{1}{3} \sqrt{100,584} = 3,343$ baier. Fuß.

V. Zuſaz. Vergleichet man die ſo eben beſtimmte Laſt Q, und Geſchwindigkeit v mit eben dieſen aus der Erfahrung §. 98 VII und VIII. Zuſ. gefundenen, ſo ſtimmen ſie ſehr wohl überein. Selten kömmt der Fall in der Anwendung vor, wo alle Beſtimmungen der Auswahl des Arbeiters überlaſſen ſind, faſt allemal iſt entweder die Laſt, oder die Geſchwindigkeit aus dem Zweck der Arbeit ſelbſt beſtimmt.

§. 100.

Aufgabe.

Ein Mann trägt die Laſt Q auf der ſchiefen Ebene, deren Neigung α iſt, aufwärts, man ſucht die mittlere Geſchwindigkeit v, wenn 2 c die Weite eines Schrittes bezeichnet, ſonſt aber alle übrigen Bezeichnungen beybehalten werden.

Aufloſung.

1. Bey jedem Schritte wird gegenwärtig der Schwerpunct des Laſtträgers nicht nur zur Höhe h, ſondern noch um 2 e sin. α gehoben, um daher

2. die Zeit zu beſtimmen, die während dem Steigen des Schwerpunctes verfließt, muß gegenwärtig, ſtatt h, die Größe h + 2 e sin. α in die Gleichung §. 93. Nr. 11. geſezet werden, dadurch wird ſolche

$$= \sqrt{\left(\frac{h + 2e\sin.\alpha}{g} \cdot \frac{G+K}{K-Q}\right)}$$

3. Die Zeit hingegen, welche während dem Sinken des Schwerpunctes von der Höhe h verfließt, bleibt unverändert wie §. 93. Nr. 11 u. 12 $= \sqrt{\left(\frac{g}{h} \cdot \frac{G+K}{K-Q}\right)}$ mithin

4. iſt die während einem Schritt auf der ſchiefen Ebene verfloſſene Zeit, oder

$$5.\ T = \sqrt{\left(\frac{h + 2e\sin.\alpha}{g} \cdot \frac{G+K}{K-Q}\right)} + \sqrt{\left(\frac{g}{h} \cdot \frac{G+K}{K-Q}\right)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{G+K}{g(K-Q)}\right)} \cdot [\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2e\sin.\alpha)}]$$

6. Ferner iſt wieder $2e = vT$ (Reine Mech. §. 36. III. Zuſ.), mithin

$$7.\ v = \frac{2e}{T} = \sqrt{\left(\frac{g(K-Q)}{G+K}\right)} \cdot \frac{2e}{\sqrt{h} + \sqrt{(h+2e\sin.\alpha)}}$$

I. Zuſaz. Da auf wagrechtem Boden, das iſt, für $\alpha = 0$, die Schrittweite $2e = 2b$ (§. 93. Nr. 4.) iſt, und überhaupt $2e$ deſto kleiner, je ſteiler der Weg, mithin je größer α iſt, ſo kann man $2e = 2b \cos.\alpha^n$ ſezen.

II. Zuſaz. Nimmt man noch an, daß für $\alpha = 45^\circ$, $2e = b$ iſt, ſo würde

$b = 2b\,(\cos. 45^\circ)^n$; mithin $(\cos. 45^\circ)^n = \frac{1}{2}$ und $n = \log. \frac{1}{2} : \log. \cos. 45^\circ$.

Nun iſt $\log. \frac{1}{2} = -0{,}3010300$
$\log. \cos. 45^\circ = -0{,}1505150$, folglich

$$n = \frac{-0{,}3010300}{-0{,}1505150} = 2.$$

III. Zuſaz. Sezet man dieſen Werth von n in die Gleichung des I. Zuſazes, ſo iſt

$$2e = 2b. \cos. \alpha^2.$$

IV. Zuſaz. Substituirt man endlich ſtatt 2e dieſen Werth in die Gleichung Nr. 7., ſo wird

$$v = \sqrt{\left(\frac{g(K-Q)}{G+K}\right)} \cdot \frac{2b \cos. \alpha^2}{\sqrt{h + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)}}}$$

§. 101.

Aufgabe.

Wenn man im baieriſchen Maaße
$G = K$, $2b = 2{,}5$; $h = 0{,}261$ (§. 93. VI. Zuſ.) annimmt, die mittlere Geſchwindigkeit v eines unbelaſteten Menſchen auf einer ſchiefen Ebene bey der Neigung $\alpha = 37^\circ 30'$ zu beſtimmen.

Auflöſung.

1. Da gegenwärtig $Q = 0$, und $G = K$, mithin $\frac{K-Q}{G+K} = \frac{1}{2}$ iſt, ſo wird nach §. 100. IV. Zuſ.

$$2.\ v = \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot \frac{2b \cos. \alpha^2}{\sqrt{h + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)}}}$$

3. $\log. g = 1{,}2253480$
$\log. 2 = 0{,}3010300$

$\log. \frac{g}{2} = 0{,}9243180$
$2 = 2$

, mithin

4. $\log. \sqrt{\frac{g}{2}} = 0{,}4621590$

5. $\log. \cos. \alpha = 0{,}8994667 - 1$
$2 = \quad 2$

$\log. \cos. \alpha^2 = 1{,}7989334 - 2$
$\log. 2b = 0{,}3979400$

alſo

6. $\log. 2b \cos. \alpha^2 = 0{,}1968734$
$\log. \sin. \alpha = 0{,}7844471 - 1$

$\log. 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2 = 0{,}9813205 - 1$, und daher

7. $2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2 = 0{,}9579$
$h = 0{,}261$

$h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2 = 1{,}2189$,

8. $\sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)} = 1{,}104$
$\sqrt{h} = 0{,}511$

$\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2} = 1{,}615$

9. $\log. 2b \cos. \alpha^2 = 0{,}1968734$ (N. 6.)
$\log. [\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)} = 0{,}2081725$ (N. 8.)

$\log. \frac{2b \cos. \alpha^2}{\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)}} = 0{,}9887009 - 1$

$\log. \sqrt{\frac{g}{2}} = 0{,}4621590$ (N. 4.)

folglich

10. $\log. v = 0{,}4508599$, alſo

11. $v = 2{,}2431$ baier. Fuß $= 2{,}086$ rheinl. Fuß.

Zuſaz. Lambert erſtieg ohne beſondere Anſtrengung jedesmal eine Treppe von 24 Stuffen in 13 Sec. Die Neigung dieſer Treppe war $\alpha = 37^\circ 30'$, ihre ſenkrechte Höhe $H = 13{,}5$ rheinl. Fuß, mithin die Länge $= \frac{13{,}5}{\sin. 37^\circ 30'} = 22{,}1762$,

folglich die mittlere Geſchwindigkeit, oder

$v = \frac{22{,}1762}{13} = 1{,}7059$ rheinl. Fuß, etwas kleiner als Nr. 11.

§. 102.

Aufgabe.

Jemand ſteigt auf einer ſchiefen Ebene, deren Neigung α iſt, mit der Geſchwindigkeit v aufwärts, man ſucht die Zeit t, welche verfließt, bis er die ſenkrechte Höhe H erreicht.

Aufloſung.

1. Wenn L die zur verticalen Höhe H gehörige Länge der ſchiefen Ebene bezeichnet, ſo iſt

2. $L : H = 1 : \sin. \alpha$, mithin

$$L = \frac{H}{\sin. \alpha}$$

3. Ferner iſt $L = vt$ (Reine Mech. §. 36. III. Zuſ.) mithin

4. $vt = \frac{H}{\sin. \alpha}$, und

5. $t = \frac{H}{v \sin. \alpha}$

Zuſaz. Für die gegebene, alſo unveränderliche Höhe H ſteht die Zeit im umgekehrten Verhältniſſe mit

dem Nenner $v \sin. \alpha$, ſie wird die kürzeſte ſeyn, wenn $v \sin. \alpha$ ein maximum iſt.

§. 103. a.

Aufgabe.

Die Neigung α der ſchiefen Ebene zu beſtimmen, wo $v \sin \alpha$ ein maximum iſt.

Auflöſung.

1. Man ſeze für v deſſen Werth aus §. 100. IV. Zuſ., ſo iſt

$$2.\ v \sin. \alpha = \sqrt{\left[\frac{g(K-Q)}{G+K}\right]} \frac{2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2}{\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)}}$$

3. Wenn nun die Laſt beſtimmt iſt, ſo iſt der erſte Factor eine beſtändige Größe, und hat daher auf die Beſtimmung des größten oder kleinſten Werthes keinen Einfluß, man ſeze nun den andern veränderlichen Factor $= y$, mithin

$$4.\ y = \frac{2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2}{\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)}},\ \text{ſo iſt}$$

$$dy = \frac{[\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)}] d(2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2) -}{[\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)}]^2}$$

$$- \frac{2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2 d [\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)}]}{[\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. 2^2)}]^2}$$

$$= \frac{[\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)}](2b \cos. \alpha^3 - 4b \sin. \alpha^2 \cos. \alpha) d\alpha}{[\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin \alpha \cos. \alpha^2)}]^2}$$

$$- \frac{2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2 (h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} (2b \cos. \alpha^3 - 4b \sin. \alpha^2 \cos. \alpha) d\alpha}{[\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)}]^2}$$

$$5.\ \frac{dy}{d\alpha} = \frac{\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)} - 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2 (h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}}{[\sqrt{h} + \sqrt{(h + 2b \sin. \alpha \cos. \alpha^4)}]^2} \times$$

$$\times\ 2b \cos. \alpha^3 - 4b \sin \alpha^2 \cos. \alpha = 0$$

6. Dieſes Product iſt nun = 0, es mag der erſte oder der zweyte Factor = 0 ſeyn, man nehme alſo das leztere, ſo wird

7. $\frac{dy}{d\alpha} = 0 = 2b\cos.\alpha^3 - 4b\sin.\alpha^2\cos.\alpha$

$\cos.\alpha^2 = 2\sin.\alpha^2$

$1 - \sin.\alpha^2 = 2\sin.\alpha^2$

$1 = 3\sin.\alpha^2$, mithin

8. $\sin.\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sin.35^\circ 15' 49''$

9. Ferner wird

$d^2y = -6b\sin.\alpha\cos.\alpha^2 d\alpha^2 - 8b\sin.\alpha\cos\alpha^2 d\alpha^2 + 4b\sin\alpha^3 d\alpha^2$

$\frac{d^2y}{d\alpha^2} = -14\,b\sin.\alpha\cos.\alpha^2 + 4\,b\sin.\alpha^3$

$= 2\,b\sin.\alpha(2\sin.\alpha^2 - 7\cos\alpha^2)$

$= 2b\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,(2\cdot\tfrac{1}{3} - 7\cdot\tfrac{2}{3}) = 2b\sqrt{\tfrac{1}{3}} \times \frac{2-14}{3}$

$= -8b\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, folglich

10 für $\sin.\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, das iſt, für $\alpha = 35^\circ 15' 49''$ wird die Größe y (Arithmetik §. 320.), mithin auch $v\sin.\alpha$ ein maximum.

I. Zuſaz. Die Größe der Kraftäuſſerung bey der ſchiefen Ebene (§. 94.) beſteht aus dem Product der Laſt in die Höhe, zu welcher ſolche in einem Tage von dem Arbeiter gebracht wird.

II. Zuſaz. Bey einer vortheilhaften Kraftäuſſerung iſt's alſo nicht hinreichend, daß $v\sin.\alpha$ ein maximum, mithin t (§. 102.) ein minimum ſey, das iſt, daß eine Laſt ſchnell auf eine gewiſſe Höhe gebracht werde, ſondern es kömmt noch auf die Dauer an, wie lange man in einem Tage eine ſolche Bewegung fortſezen kann, in dieſer Beziehung nimmt man gewöhnlich $\alpha = 30^\circ$, ſtatt $35^\circ 15' 49''$.

III. Zuſaz. Bezeichnet G das Gewicht des Laſtträgers, Q die von ihm gehobene Laſt, und H die Höhe, zu welcher ſie von ihm in einem Tage gebracht wird, ſo bezeichnet (G + Q) H den Totaleffect, und QH den eigentlichen Nüzeffect.

§. 103. b.

Erfahrungen nach Coulombs Beobachtungen.

a. Auf eine Treppe, welche 20 bis 30 Métres, oder 69 bis 103 baier. Schuhe hoch iſt, läßt ſich in jeder Minute eine Höhe von 14 métres, das iſt, von 48 baier. Schuhen erreichen, und dieſe Bewegung kann jemand des Tages 4 Stunden, oder 240 Minuten lang fortſezen.

b. Als Borda mit einer Geſellſchaft den Berg Pico auf der Inſel Teneriffa beſtieg, ſo wurden in einem Tage von mehrern unbelaſteten Fußgängern die ſenkrechte Höhe von 2923 métres = 10015 baier. Schuhen erſtiegen, die Länge des Weges betrug mehr als 20000 Métres, alſo mehr als 68526,2 baier. Schuh; — die Zeit, welche eigentlich zum Anſteigen ſelbſt verwendet wurde, war $7\frac{3}{4}$ Stunde, alſo 27900 Secunden.

c. Ein Holzträger von mehr als mittlerer Stärke trug öfters in einem Tage 6 Fuder Holz über eine Treppe, die 12 Métres, das iſt, 41 baier. Schuh ſenkrechte Höhe hatte. Das mittlere Gewicht eines Fuders ſchlägt Coulomb auf 734 Kilogrammes = 1308 ℔. baier. Handelsgewicht an; ferner waren zu jedem Fuder gewöhnlich 11 Gänge nothwendig.

d. Nach öftern Nachfragen traf Coulomb einen Holzträger an, von vorzüglicher Stärke, welcher in

einem Tage 17 Fuder auf die ſenkrechte Höhe von 5 Métres = 17 baier. Schuhen getragen hat, aber den folgenden Tag war derſelbe durch dieſe Anſtrengung ganz an Kräften erſchöpft.

I. Zuſaz. Sezet man bey dieſen gemachten Beobachtungen ſtets das Gewicht des Fußgängers, oder Laſtträgers G = 70 Kilogrammes = 125 ℔. baier. Handelsgewicht, ſo iſt bey der erſten Beobachtung a, die Laſt Q = 0, mithin die während einem Tage bey dem Aufwärtsſteigen einer Treppe von der angeführten Höhe mögliche Kraftäuſſerung

GH = 70 × 14 × 240 = 235200 Kilogrammes zur Höhe eines Métre = 235 Kilogrammes zur Höhe eines Kilométre erhoben;

= 125 × 48 × 240 = 1440000 ℔. zur Höhe eines baier. Schuh = 1440 ℔. zur Höhe von 1000 baier. Schuhen erhoben.

Würde die Treppe beträchtlich höher als 20 bis 30 Métres ſeyn, ſo erfolgt eher eine Ermüdung, und die Kraftäuſſerung wird geringer.

II. Zuſaz. Gemäß der zweyten Erfahrung b wurden bey Beſteigung des Berges in 27900 Secunden mehr als 68526 Fuß hinterlegt, mithin iſt die mittlere Geſchwindigkeit $v = \frac{68526}{27900} = 2{,}46$ baier. Fuß.

III. Zuſaz. Die beym Aufſteigen des Berges beobachtete Kraftäuſſerung, weil wieder Q = 0, iſt,

GH =

GH $= 70 \times 2923 = 204610$ Kilogrammes zur Höhe eines Métre $= 205$ Kilogrammes zur Höhe eines Kilométre erhoben.

$= 125 \times 10015 = 1251875$ ℔. zur Höhe eines baier. Schuhes $= 1252$ ℔. zur Höhe von 1000 baier. Schuh erhoben.

IV. Zuſaz. Gemäß der Erfahrung c trifft für den Holzträger auf jeden Gang die Laſt von 66,7 Kilogrammes, oder das Gewicht des Strickes und des daran befindlichen eiſernen Hackens, womit dieſe Laſt getragen wurde, eingerechnet, die Laſt von 68 Kilogrammes $= 121$ ℔. Nun mußte er den ganzen Tag für die 6 Fuhren 66 dergl. Gänge machen, und jedesmal die Laſt zur Höhe von 12 Métres bringen, folglich iſt hier der Totaleffect $(G+Q)H = (70+68) \times 66 \times 12 = 109296$ Kilogrammes zur Höhe eines Métre $= 109$ Kilogr. zur Höhe eines Kilométre erhoben,

$= (125 + 121) + 66 \times 41 = 665676$ ℔. zur Höhe eines Fußes,

$= 666$ ℔. zur Höhe von 1000 baier. Schuh erhoben.

Dabey ſind die Gänge, welche der Holzträger leer zurücklegt, um wieder Holz zu holen, nicht in Anſchlag gebracht, weil ſie mehr zur Erholung dienen.

V. Zuſaz. Nimmt man nur auf die beabſichtete Beförderung des Holzes Rückſicht, ſo iſt der wahre Nuzeffect

Q.H = 68 × 66 × 12 = 53856 Kilogrammes zur Höhe eines Métre = 54 Kilogrammes zur Höhe eines Kilométre erhoben,

= 121 × 66 × 12 = 327426 ℔. zur Höhe eines baier. Schuh = 327 ℔. zur Höhe von 1000 baier. Schuhen getragen.

VI. Zuſaz. Bey der Erfahrung d iſt endlich der tägliche Totaleffect, da zuſammen 187 Gänge erforderlich waren, aber die Höhe nur 5 metré iſt,

(G + Q) H = (70 + 68) × 5 = 129030 Kilogrammes zur Höhe eines Métre = 129 Kilogrammes zur Höhe eines Kilométre erhoben,

= (125 + 121) × 187 × 17 = 782034 Pfund zur Höhe eines Schuh = 782 zur Höhe von 1000 baier. Schuh. erhoben.

VII. Zuſaz. Der Nuzeffect bei dieſer lezten Erfahrung iſt:

Q.H = 68 × 187 × 5 = 63580 Kilogrammes zur Höhe eines Métre = 64 Kilogrammes zur Höhe eines Kilométre erhoben.

= 121 × 187 × 17 = 384659 Pfund zur Höhe eines baier. Schuh = 385 Pfund zur Höhe von 1000 baier. Schuhen erhoben.

II. Abſchnitt.

Kraftäuſſerung eines Menſchen, welcher eine Laſt zieht, oder vor ſich her ſchiebt.

§. 104.

Aufgabe. (Fig. 45.)

Die Kraftäuſſerung eines Mannes zu beſtimmen, wenn er auf ebenem wagrechtem Boden eine Laſt zieht, oder vor ſich her ſchiebt, und dabey ſeine Hand wagrecht ausſtreckt.

Auflöſung.

1. Wenn jemand eine Laſt auf ebenem wagrechtem Boden ziehen, oder vor ſich her ſchieben will, ſo giebt er ſich eine geneigte Stellung HAB, und

2. ſtemmet ſich mit der Hand in I gegen die Laſt Q, oder wenn er zieht, ſo ſpannet er das Seil auf ähnliche Art (gegenwärtig iſt die Richtung zur Erleichterung wagrecht angenommen, um ſo mehr, da ſie nie davon beträchtlich abweicht).

3. Ferner ſtemmet er ſich wechſelweiſe mit den Füßen gegen den Boden, während er nemlich mit dem einen Fuße CA dieſes thut, ſezet er den andern CDB vorwärts, fängt nun, indem er immer in der geneigten Stellung der Laſt folgt, leztern zu ſtrecken an, und ſezt dafür CA vorwärts, und ſo fort.

4. Bezeichnet wieder G das Gewicht des Arbeiters, ferner C die Stelle ſeines Schwerpunctes, und ſezet man den Winkel, welchen die Richtung der Schwe-

re C c mit CA einſchließt, nemlich ECo = φ, ſo läßt ſich

5. die Kraft G in zwey Seitenkräfte zerlegen, nemlich

6. in die horizontale Kraft nach C c $= \frac{G \sin. \varphi}{\sin.(90^\circ + \varphi)}$ (Reine Mech. §.53. VII. Zuſ.) $= \frac{G \sin. \varphi}{\cos. \varphi} = G \operatorname{tang}. \varphi$.

7. in die ſchiefe Kraft nach CE $= \frac{G}{\sin. (90^\circ + \varphi)} = \frac{G}{\cos. \varphi} = G \sec. \varphi$.

8. Die Kraft G tang. φ (Nr. 6.), wird nun auf die Bewegung der Laſt verwendet, dieſe Kraft aber wirket nicht unmittelbar in C, ſondern in H nach der zu C c parallelen Richtung H h.

9. Man kann ſich nun ACH als einen geradlinigten Hebel vorſtellen, welcher in A ſeine Unterlage hat, will man alſo die Kraft G tang. φ von C nach H verlegen, und ſezet die in H gleichgeltende Kraft = f, ſo muß

10. f : G tang. φ = AC : AH (R. Mech. §. 24.) alſo

11. $f = \frac{AC}{AH} G \operatorname{tang}. \varphi$ ſeyn; welches alſo eigentlich die auf die Bewegung der Laſt wirkende Kraft iſt.

12. Die Kraft G sec. φ hingegen (Nr. 7.) iſt die Gewalt, mit welcher der Schwerpunct C gegen den Boden in A gedrückt wird.

I. Zuſaz. Die Kraft $f = \frac{AC}{AH} G \operatorname{tang}. \varphi$ iſt zugleich die Gewalt, mit welcher der Arm wagrecht ausgeſtreckt werden muß, bezeichnet nun F die größte Anſtrengung, mit welcher der Arbeiter ſolchen auszuſtre-

cken vermag, ſo iſt F - f der Reſt dieſer Kraft, die er allmählig zuſezet, bis er ermüdet wird.

II. Zuſaz. Man kann annehmen, daß bey einem Menſchen AC : AH = 3 : 5 iſt, dadurch wird

$f = \frac{3}{5}$ G tang. φ.

III. Zuſaz. Die Neigung des Arbeiters gegen den wagrechten Boden iſt CAB = 180° - ACc

$= 180^\circ - (\varphi + 90^\circ) = 90^\circ - \varphi$, mithin wird

sin. CAB = cos. φ.

§. 105.

Aufgabe. (Fig. 45.)

Die Geſchwindigkeit v anzugeben, mit welcher jemand auf wagrechtem ebenem Boden eine Laſt ſchieben, oder ziehen kann, wenn die bisher angenommenen Bezeichnungen alle beybehalten werden.

Aufloſung.

1. Da der Arbeiter bey dem Ziehen, oder Vorſichherſchieben einer Laſt ſtets die nemliche geneigte Stellung beybehält, ſo leidet ſein Schwerpunct C nach der Richtung CA den Druck $= \frac{G}{\cos.\varphi} = G \sec.\varphi$ (§. 104. Nr. 12.).

2. Nun iſt sec. $\varphi > 1$; (Trigon. §. 300.) mithin G sec. $\varphi >$ G, man kann daher

3. G sec. φ = G + q, alſo

$q = G \sec.\varphi - G = G(\sec.\varphi - 1)$ ſezen,

4. es iſt nemlich eben ſo viel, als drückte den Arbeiter nebſt ſeinem Gewichte G noch die Laſt $q = G(\sec.\varphi - 1)$ nach der Richtung CA.

5. Man verlängere CA nach Aa, errichte auf ſie durch A die ſenkrechte Aβ, und ziehe noch die lothrechte Aγ, ſo iſt

6. Aγ parallel zu Ce, mithin $aA\gamma = ECe = \varphi$ (§. 104. Nr. 4.).

7. $aA\gamma + \gamma A\beta = 90^\circ = \gamma A\beta + \beta AB$, mithin

$$aA\gamma = \beta AB = \varphi.$$

8. Es iſt daher für den Arbeiter einerlei, ob er auf dem wagrechten Boden in der geneigten Stellung geht, und dabey den Druck $G+q$ (Nr. 3 und 4.) leidet, oder

9. ob er auf einer ſchiefen Ebene AB, die gegen den wagrechten Boden Aβ die Neigung φ hat, gerade geht, und dabey die Laſt q trägt, mithin

10. gelten alle Säze von §. 100., nur iſt gegenwärtig $h=0$, weil der Arbeiter ſeine geneigte Stellung immer beybehält, und ſtatt Q muß nun $q=G(\sec.\varphi-1)$, ſtatt α die Größe φ geſezt werden, durch dieſe Substitution wird nun aus §. 100. IV. Zuſ. die geſuchte Geſchwindigkeit, oder

$$11.\ v=\sqrt{\left[\frac{g(K-G(\sec.\varphi-1))}{G+K}\right]}.\ \frac{2b\cos.\varphi^2}{\sqrt{(2b\sin.\varphi\cos.\varphi^2)}}$$

$$=\sqrt{\frac{2bg\cos.\varphi^2}{\sin.\varphi}}\ .\ \sqrt{\left\{\frac{K+G-G\sec.\varphi}{G+K}\right\}}$$

I. Zuſaz. Verwendet der Arbeiter nicht ſeine größtmögliche Kraft K, wodurch er zu ſchnell ermüden würde, ſondern die Kraft P, ſo wird

$$v=\sqrt{\frac{2bg\cos.\varphi^2}{\sin.\varphi}}\ \sqrt{\left[\frac{P+G-G\sec.\varphi}{G+P}\right]}$$

II. Zuſaz. Je gröſser der Winkel φ iſt, deſto kleiner wird jeder Factor im voranſtehenden Producte, je mehr ſich alſo der Arbeiter bückt, deſto kleiner iſt die Geſchwindigkeit, mit welcher er die Laſt ziehen, oder vor ſich her ſchieben kann.

§. 106.

Aufgabe.

Den Winkel φ zu beſtimmen, wo v f ein maximum wird.

Auflöſung.

1. $f = \frac{AC}{AH} \cdot G \tan\varphi$ (§. 104. I. Zuſ.) $= \frac{AC}{AH} \cdot G \frac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$

2. $v = \sqrt{\frac{2bg \cos.\varphi^2}{\sin.\varphi}} \sqrt{\left[\frac{P+G-G\sec.\varphi}{G+P}\right]}$

(§. 105. I. Zuſ.)

3. $fv = \frac{AC.G\sqrt{2bg}}{AH\sqrt{(G+P)}} \cdot \sqrt{\sin.\varphi}\sqrt{(P+G-G\sec.\varphi)}$

4. $f^2 v^2 = \frac{AC^2.G^2.2bg}{AH^2(G+P)} \cdot \sin.\varphi\,(P+G-G\sec.\varphi)$

5. Man ſeze den veränderlichen Factor $= y$, alſo

6. $y = (P+G)\sin.\varphi - G\tan.\varphi$

$dy = \cos.\varphi(P+G)d\varphi - \frac{G d\varphi}{\cos.\varphi^2}$, und

7. $\frac{dy}{d\varphi} = 0 = \frac{(P+G)\cos.\varphi^3 - G}{\cos.\varphi^2}$

$= (P+G)\cos.\varphi^3 - G$, mithin

8. $\cos.\varphi^3 = \frac{G}{P+G}$, und

$\cos.\varphi = \sqrt[3]{\frac{G}{P+G}}$

9. $d^2y = -3\sin.\phi\cos.\phi^2(P+G)\,d\phi^2$.

$\frac{d^2y}{d\phi^2} = -3\sin.\phi\cos.\phi^2(P+G)$, mithin iſt (Arithm. §. 320.) für den Werth $\cos.\phi = \sqrt[3]{\frac{G}{P+G}}$ die Größe y (Nr. 6.), folglich auch die Größe fv (Nr. 3.) ein maximum.

I. Zuſaz. Auf ähnliche Art wie §. 96. ergiebt ſich, daß bey dieſer Arbeit die Dauer $t = n\frac{K-P}{G+P}$ geſezt werden könne, in wieferne nemlich dabey auf die Kraft P Rückſicht genommen wird, die er anwendet die Laſt $q = G(\sec.\phi - 1)$ zu tragen.

II. Zuſaz. Die Ermüdung erfolgt aber auch, wenn die Kraft F - f (§. 104 I. Zuſ.) erſchöpft iſt; die Zeit zu beſtimmen, wenn dieſe erfolgt, fehlet es noch an hinlänglichen Beobachtungen, man kann mit Grund vorausſezen, daß durch leztere Auſtrengung die menſchlichen Kräfte bey dieſer Arbeit nicht ſobald ermüdet werden, als durch erſtere, ſezet man alſo leztere Dauer $= t'$, ſo iſt $t < t'$; mithin hat man bey der Unterſuchung nur auf t Rückſicht zu nehmen.

III. Zuſaz. Wenn daher jemand auf wagrechtem ebenem Boden eine Laſt zieht, oder vor ſich her ſchiebet, ſo iſt die Kraftäuſſerung am vortheilhafteſten, wenn fvt ein maximum iſt.

§. 107.

Aufgabe.

Die Größe der Kraft P zu beſtimmen, wodurch für die beſtimmte Größe des Winkels φ, das Product vt ein maximum wird.

Aufloͤſung.

1. $v = \sqrt{\frac{2b\cos.\phi^2}{\sin.\phi}} \sqrt{\left\{\frac{P+G-G\sec.\phi}{G+P}\right\}}$

(§. 105. I. Zuſ.)

2. $t = n\,\frac{K-P}{G+P}$, mithin

3. $vt = n\sqrt{\left[\frac{2bg\cos.\phi^2}{\sin.\phi}\right]} \times \frac{K-P}{G+P}\sqrt{\left[\frac{P+G-G\sec.\phi}{G+P}\right]}$

$v^2t^2 = \frac{2nbg\cos\phi^2}{\sin.\phi} \times \frac{(K-P)^2(P+G-G\sec.\phi)}{(G+P)^3}$

4. Man ſeze den veraͤnderlichen Factor $= y$, alſo

5. $y = \frac{(K-P)^2(P+G-\sec.\phi)}{(G+P)^3}$

6. $dy = [-(G+P)^3(P+G-G\sec.\phi)\,2(K-P)\,dP$
$+ (G+P)^3(K-P)^2dP - 3(G+P)^2(K-P)^2$
$(P+G-\sec.\phi)\,dP] : (G+P)^6$, mithin

7. $\frac{dy}{dP} = 0 = [-(G+P)(P+G-G\sec.\phi).\,2(K-P)$
$+(G+P)(K-P)^2 - 3(K-P)^2(P+G-G\sec.\phi)]$
$: (G+P)^4$

$= -2(G+P)(P+G-G\sec.\phi) + (G+P)(K-P)$
$-3(K-P)(P+G-G\sec.\phi)$

$= -(P+G-G\sec.\phi)(2G+2P+3K-3P)$
$+ (G+P)(K-P)$

$= -(P+G-G\sec.\phi)(2G+3K-P)$
$+ (G+P)(K-P).$

8. Multiplicirt man dieſe Groͤßen, und ordnet ſie, ſo wird

$$\frac{dy}{dP} = 0 = -(2G + 2K + G\,sec.\,\varphi)\,P + 2G^2(sec.\,\varphi - 1) + GK(3\,sec.\,\varphi - 2)$$

mithin

$$9.\quad P = \frac{2G^2(sec.\,\varphi - 1) + GK(3\,sec.\,\varphi - 2)}{2G + 2K + G\,sec.\,\varphi}$$

10. Ferner iſt aus Nr. 8.

$d^2y = -(2G + 2K + G\,sec.\,\varphi)\,dP^2$, folglich

$\frac{d^2y}{dP^2} = -(2G + 2K + G\,sec.\,\varphi)$, alſo (Arithm. §. 320.)

11. wird für den Werth P (Nr. 9.) die Größe y (Nr. 5) folglich auch $v^2 t^2$, alſo auch vt ein maximum.

I. Zuſaz. Für $cos.\,\varphi^3 = \frac{G}{P + G}$ wird fv ein maximum (§. 106. Nr. 8.), mithin iſt für dieſen Fall

$$P + G = \frac{G}{cos.\,\varphi^3},\ \text{folglich}$$

$$P = \frac{1 - cos.\,\varphi^3}{cos.\,\varphi^3}\,G$$

II. Zuſaz. Soll hingegen das Product vt ein maximum werden, ſo muß nach Nr. 9.

$$P = \frac{2G^2(sec.\,\varphi - 1) + GK(3\,sec.\,\varphi - 2)}{2G + 2K + G\,sec.\,\varphi}\ \text{ſeyn.}$$

III. Zuſaz. Sezet man dieſe beyden Werthe von P einander gleich, ſo läßt ſich aus dieſer neuen Gleichung für einen Arbeiter, deſſen Gewicht G ſowohl, als größte Stärke K gegeben iſt, der Winkel φ, mithin auch die Stellung angeben, wo ſowohl fv als vt ein maximum iſt, mithin der Nuzeffect ein größtes wird.

§. 108.

Aufgabe.

Den Winkel φ zu beſtimmen, wo fv ſowohl als tv ein maximum iſt, wenn K = G angenommen wird.

Auflöſung.

1. $\frac{1-\cos.\varphi^3}{\cos.\varphi^3}G = \frac{2G^2(\sec.\varphi-1)+GK(3\sec.\varphi-2)}{2G+2K+G\sec.\varphi}$

(§. 107. I und II. Zuſ.).

2. Iſt nun K = G, ſo wird

3. $\frac{1-\cos.\varphi^3}{\cos.\varphi^3}G = \frac{2G^2(\sec.\varphi-1)+G^2(3\sec.\varphi-2)}{4G+G\sec.\varphi}$

$$\frac{1-\cos.\varphi^3}{\cos.\varphi^3} = \frac{2(\sec.\varphi-1)+(3\sec\varphi-2)}{4+\sec.\varphi} = \frac{5\sec.\varphi-4}{\sec.\varphi+4}$$

$$= \frac{\frac{5}{\cos.\varphi}-4}{\frac{1}{\cos.\varphi}+4} = \frac{5-4\cos.\varphi}{1+4\cos.\varphi}\text{, mithin}$$

4. $1-\cos.\varphi^3+4\cos.\varphi-4\cos.\varphi^4 = 4\cos.\varphi^3-4\cos.\varphi^4$

$0 = 6\cos.\varphi^3-4\cos.\varphi-1$, folglich

5. $\cos.\varphi^3-\frac{2}{3}\cos.\varphi-\frac{1}{6} = 0$

6. Dieſe Gleichung ſteht nun offenbar unter nachſtehender Form: $y^3-fy-g=0$ (Arithm. §. 177.), mithin wird

7. $\cos.\varphi = \sqrt[3]{\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{36}-\frac{4}{27}\cdot\frac{8}{27}\right)}\right]}$
$+\sqrt[3]{\left[\frac{1}{12}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{36}-\frac{4}{27}\cdot\frac{8}{27}\right)}\right]}$

$$=\sqrt[3]{\left[\frac{1}{12}+\sqrt{-\frac{47}{11664}}\right]}+\sqrt[3]{\left[\frac{1}{12}-\sqrt{-\frac{47}{11664}}\right]}$$

8. Löſet man beyde Glieder dieſer Gleichung in Reihen auf, (Arithm. §. 141.), ſo heben ſich durch die

Addition immer die unmöglichen Größen in den Gliedern dieſer Reihen einander auf, dadurch erhält man nachſtehenden Werth: cos. $\phi = 0,920699$.

9. Suchet man endlich noch (Arithm. §. 177. Nr. 13. durch die Diviſion der Gleichung Nr. 5. mit der Wurzelgleichung cos. $\phi - 0,920699$ die beyden andern Werthe der cubiſchen Gleichung, ſo iſt

10. der zweyte Werth von cos. $\phi = - 0,2845596$
der dritte Werth von cos. $\phi = - 0,6361394$

11. Beyde leztere Werthe geben für ϕ einen ſtumpfen Winkel (Trig. §. 296. IV. Zuſ.), mithin würde für den Arbeiter eine Stellung gefordert, die er nicht annehmen kann, ſo daß alſo nur der Werth Nr. 8. gilt, und daher

12. cos. $\phi = 0,920699 =$ cos. $22^\circ 58'$ iſt.

I. Zuſaz. Bey der Annahme $K = G$, iſt die vortheilhafteſte Stellung, wo $\phi = 22^\circ 58'$

1. $f = \frac{3}{5}$ G tang ϕ (§. 104. II Zuſ.) $= \frac{3}{5} \times 0,4237884$ G
$= 0,254273$ G

2. $P = \frac{1 - \cos.\phi^3}{\cos.\phi^3} G$ (§. 107. I. Zuſ.) $= \frac{1 - 0,780465}{0,780465}$ G
$= 0,281288$ G

3. $v = \sqrt{\left[\frac{2 b g \cos.\phi^2}{\sin.\phi}\right]} \sqrt{\left[\frac{P + G - G \sec.\phi}{G + P}\right]}$
(§. 105. I. Zuſ.)

$= \sqrt{\left[\frac{2,5 \times 16,8015 \times 0,920699^2}{0,3901955}\right]} \times$
$\sqrt{\left[\frac{G(1 + 0,281288 - 1,0860924)}{G(1 + 0,281288)}\right]}$
$= 3,6858$ baier. Schuhe, mithin

4. $f v = 3,6858 \times 0,254273\ G = 0,937188\ G$

5. $q = (\sec.\phi - 1)\ G$ (§. 105. Nr. 9 und 10.)

$= 0,0860924\ G$

II. Zuſaz. Sezet man ferner G = 125 ℔. bair. Gewichtes, ſo wird

1. f = 32,78 ℔. = 33 ℔. beynahe

2. P = 35,16 ℔.

3. f v = 33 ℔. zur Weite von 3,6858 baier. Schuh.
= 117,15 ℔. zur Weite eines baier. Schuhes in einer Secunde gezogen.

4. q = 10,76 ℔. = 11 ℔.

III. Zuſaz. Will man nur beſtimmen, was ein Arbeiter auf eine kurze Zeit mit Aufwand ſeiner ganzen Kraft K vermag, ſo iſt, wenn f v ein maximum wird

$$\cos.\phi = \sqrt[3]{\frac{G}{K+G}}\ (\text{§. 106. Nr. 9.});$$

ſezet man ferner K = G, ſo wird

$$\cos.\phi = \sqrt[3]{\frac{G}{2\,G}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} = 0,79370 = \cos.37^{\circ}\,28'$$

Sezet man endlich noch G = 125 ℔., ſo wird

1. f = 57,48 ℔.

2. v = 4,012 baier. Schuh, mithin

3. f v = $57\frac{1}{2}$ ℔. während einer Secunde 4 baier. Schuh weit, oder 230,6 ℔. auf die Weite eines baier. Schuhes gezogen, oder geſchoben.

4. q = 32,5 ℔.

§. 109.

Aufgabe (Fig. 46.)

Ein Arbeiter zieht, oder ſchiebt eine Laſt längſt der ſchiefen Ebene AB, welche gegen den wagrechten Boden AM die Neigung BAM $= \eta$ hat, aufwärts, man ſucht deſſen Kraftäuſſerung, wenn er ſeine Hand nach der Richtung HI, welche mit der verticalen Richtung Hi einen beliebigen Winkel iHI $= \psi$ macht.

Auflöſung.

1. Gegenwärtig verhält ſich alles wie §. 104. Nr. 1 — 5.

2. Zerlegt man nun die Kraft G in zwey Seitenkräfte nach den Richtungen Cc, parallel zu HI, und CA, ſezet ferner wieder, cCE $= \phi$, ſo iſt cCc $=$ iHI $= \psi$, mithin ECc $= \phi + \psi$, folglich

3. die Kraft nach der Richtung Cc $= \frac{G \sin. \phi}{\sin.(\phi + \psi)}$ und

4. die Seitenkraft nach CA $= \frac{G \sin. \psi}{\sin.(\phi + \psi)}$

5. reducirt man erſtere auf den Punct H, ſo iſt die in H nach HI gleichgeltende Kraft

$f = \frac{AC}{AH} \cdot \frac{\sin. \phi}{\sin.(\phi + \psi)} G$, welche nun auf die Bewegung der Laſt verwendet wird.

6. Dabey drückt noch der Arbeiter bey A nach der Richtung CA mit einer Gewalt $\frac{G \sin. \psi}{\sin.(\phi + \psi)}$ gegen den ſchiefen Boden AB.

I. Zuſaz. Sezet man wieder $G + q = \frac{G \sin. \psi}{\sin.(\phi + \psi)}$ ſo wird $q = \frac{G \sin. \psi}{\sin. \phi + \psi)} - G.$

II. Zuſaz. Man verlängere CA nach Aa, errichte durch A auf IIa den Perpendickel $A\beta$, und die verticale $A\gamma$, ſo iſt: $aA\gamma = ECe = \phi$, und

$$aA\gamma + \gamma A\beta = 90^\circ = \gamma A\beta + \beta AM, \text{ alſo}$$

$$aA\gamma = \phi = \beta AM, \text{ folglich}$$

$$\beta AM + MAB = \phi + \eta.$$

III. Zuſaz. Da durch die geneigte Stellung der Schwerpunct C des Arbeiters gegen die ſchiefe Ebene AB nach der ſchiefen Richtung CA mit der Gewalt

$G + q = \frac{G \sin. \psi}{\sin. (\phi + \psi)}$ alſo gerade ſo gedrückt wird, als wenn die Linie $A\beta$ wagrecht, alſo CA ſenkrecht, hingegen die Ebene AB um den Winkel ($BAM + MA\beta$) $= \phi + \eta$ (II. Zuſ.) geneigt wäre, ſo iſt's für den Arbeiter in Beziehung auf dieſen Druck gerade ſo viel, als trüge er auf der ſchiefen Ebene AB, deren Neigung $= \phi + \eta$, die Laſt $q = \frac{G \sin. \psi}{\sin. (\phi + \psi)} - G$ aufwärts, mithin

IV. Zuſaz. Kann man wieder die mittlere Geſchwindigkeit v aus §. 100. IV. Zuſ. beſtimmen, wenn man in obiger Gleichung $h = o$, und $Q = q$ $= \frac{G \sin. \psi}{\sin. (\phi + \psi)} - G$; $\alpha = \phi + \eta$ ſezet, es wird nemlich

$$v = \sqrt{\left[\frac{g\left[K + G - \frac{G \sin. \psi}{\sin. (\phi + \psi)}\right]}{G + K}\right] \frac{2 b \cos. (\phi + \eta)^2}{\sqrt{(2 b \sin (\phi + \eta) \cos (\phi + \eta)^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 b g \cos. (\phi + \eta)^2}{\sin. (\phi + \eta)}} \sqrt{\left\{\frac{K + G - \frac{G \sin. \psi}{\sin. (\phi + \psi)}}{G + K}\right\}}$$

V. Zuſaz. Da ſowohl die Neigung η der ſchie- ſen Ebene, als die Richtung ψ der geſtreckten Hand beliebig, ſo iſt gegenwärtige Formel ganz allgemein, ſezet man $\eta = 0$, ſo wird auf wagrechtem Boden bey beliebiger Richtung der geſtreckten Hand

$$v = \sqrt{\frac{2bg\cos.\phi^2}{\sin.\phi}} \sqrt{\left\{\frac{K + G - \frac{G\sin.\psi}{\sin.(\phi+\psi)}}{G+K}\right\}}$$

VI. Zuſaz. Man könnte nun wieder unterſu- chen, bey welcher Richtung des Arms, das iſt, für welchen Werth von ψ die Kraft f, und das Product fv, ſowohl als tv, ein maximum wird.

VII. Zuſaz. Wenn jemand auf der Straße eine Laſt zieht, oder vor ſich her ſchiebet, ſo hat er es mei- ſtens nur mit Ueberwindung der Reibung, welche dieſe Laſt verurſacht, zu thun, ferner wird dabey immer ir- gend eine Maſchine gebraucht, ſo daß es ſehr ſchwer ſeyn dürfte, durch Erfahrungen die bisher angeführten Lehren zu prüfen und zu berichtigen.

VIII. Zuſaz. Von 3 Arbeitern, welche Kies auf die Straßen in Schubkarren führen, erhielt ich nach- ſtehende Angaben:

a. Jeder Arbeiter muß jedesmal den Kies ſelbſt ausgraben, ſolchen auf den Schubkarren laden, auf die Straße führen, und allda in Haufen von vorge- ſchriebener Form ordnen.

b. Die gewöhnliche Ladung auf einen Schubkar- ren beſtehet in 2 baier. Cubikſchuh Kies.

c. Durch mehrere gemachte Verſuche fand ſich das Gewicht eines Cubikfuß Kies $77\frac{1}{2}$ bis 84 ℔., ſo

ſo daß man als mittleres Gewicht eines baier. Cubikfußes vom gewöhnlich trockenen Kieſe 80 baier. ℔. ſezen kann.

d. Der erſte Arbeiter macht täglich gewöhnlich 21 Fuhren, die Strecke beträgt jedesmal 164 baier. Schuh, und geht etwas aufwärts.

e. Der zweyte Arbeiter macht auf ganz ebenem Boden täglich 14 Fuhren, und der Weg iſt jedesmal 670 baier. Schuh lang.

f. Der dritte Arbeiter verrichtet täglich 21 Fuhren, auf ebenem Boden, die Weite iſt jedesmal 280 baier. Schuh.

g. Sieht man nur auf den Nuzeffect, ſo iſt ſolcher bey dem erſten: $160 \times 21 \times 164 = 551040$ ℔. zur Weite eines Fußes.

„ „ zweyten: $160 \times 14 \times 670 = 1500800$ ℔. „ „ „

„ „ dritten: $160 \times 21 \times 280 = 940800$ ℔. „ „ „

dabey darf man nicht vergeſſen, daß er nicht nur jedesmal den nemlichen Weg mit dem leeren Schubkarren zurück machen, ſondern auch die bey a angeführten Arbeiten verrichten muß.

IX. Zuſaz. Vauban beſtimmt aus vielen Beobachtungen, daß ein Mann in einem Tage auf einem Schubkarren 14,79 Cubik-mètres (Coulomb reducirte nemlich Vaubans Angaben auf das neue franzöſiſche Maaß), alſo 594,906 baier. Cubikfuß Erde auf eine Strecke von 29,226 mètres, alſo 100 baier. Fuß führen kann, dieſe Maſſe wird nun auf 500 Fuhren geladen, ſo daß alſo der Arbeiter jedesmal $\frac{594906}{500} = 1,18981$ baier. Cubikfuß Erde führet. Wird nun gegenwärtig

der Cubikfuß ebenfalls zu 80 ℔. angeſchlagen, ſo beträgt die Laſt bey jeder Fuhr 95,2 ℔., mithin der ganze Nuzeffect 95,2 × 500 × 100 = 4760000 ℔. zur Weite eines baier. Fußes getragen.

X. Zuſaz. Nach Coulombs Angabe kann ein Mann auf ebenem trockenem Boden während einem Tage mit einem Schubkarren die Laſt 70 Kilogrammes = 125 Pfund, 14,613 Kilométres = 50069 baier. Fuß weit fahren, und eben dieſen Weg noch mit dem leeren Schubkarren zurücklegen; der Nuzeffect iſt daher = 70 × 14,613 = 1022,9 Kilogrammes zur Weite eines Kilométre = 6258625 Pfund zur Weite eines baier. Fußes = 6258 Pfund zur Weite von 1000 baier. Schuhen getragen.

XI. Zuſaz. Daß in den beyden lezten Zuſäzen der Nuzeffect ſo beträchtlich größer iſt, als im VIII. Zuſ. giebt lezterer Zuſaz ſelbſt am Ende die Gründe an.

III. Abſchnitt.

Kraftäuſſerung des Menſchen bey unveränderter Stelle mittels ſeiner Arme.

§. 110.

Aufgabe.

Am Umfange einer wagrechten Welle, deren Halbmeſſer a, hängt die Laſt Q, am Umfange des damit verbundenen Rades, oder Kurbel, deren Halbmeſſer A, zieht ein Arbeiter mit ſeiner ganzen Kraft K, man ſucht die mittlere Geſchwindigkeit v, mit welcher die Laſt gehoben wird, wenn man dabey ſowohl von dem Umdrehungsmoment, als der Reibung abſtrahirt.

Aufloͤſung.

1. Durch die Kraft K, mit welcher der Arbeiter am Umfange des Rades, oder Kurbel, nach der Richtung des Tangens zieht, und dadurch die Welle drehet, bekoͤmmt anfaͤnglich die Laſt Q eine beſchleunigte Bewegung; druͤckt nun

2. nach Verlauf der Zeit t, die Groͤße u die Geſchwindigkeit aus, womit die Laſt Q ſteigt, ſo wuͤrde

3. im Schwerpuncte dieſer Laſt, mithin auch am Umfange der Welle die Kraft $\frac{Q\,du}{2g\,dt}$ (§. 6.) der traͤgen Maſſe eben dieſe Geſchwindigkeit ertheilen.

4. Auſſer dieſer Kraft iſt ferner noch das Gewicht Q der Laſt vorhanden, mithin iſt

5. Das Moment dieſer beyden Kraͤfte $= aQ + \frac{aQdu}{2gdt}$.

6. Soll nun die Kraft K am Umfange des Rades oder Kurbel denſelben zuſammen gleichgeltend ſeyn, ſo muß

7. $AK = aQ + \frac{aQdu}{2gdt}$ ſeyn, mithin

$$\frac{2g(AK-aQ)}{aQ}\,dt = du, \text{ und}$$

8. $u = 2gt\,\frac{AK-aQ}{aQ}$, wo keine Const. addirt werden darf, indem fuͤr $t=0$, auch $u=0$ iſt.

9. Bezeichnet s den waͤhrend der Zeit t hinterlegten Raum, ſo iſt

$ds = u\,dt$ (Reine Mech. §. 38.)

$= 2gt\,dt\,\frac{AK-aQ}{aQ}$, alſo

10. $s = gt^2\,\frac{AK-aQ}{aQ}$, wo wieder keine Const. dazu kömmt.

11. Gegen das Ende des Zuges hört die Beſchleunigung auf, die Bewegung dauert durch die erlangte Geſchwindigkeit u noch während der Zeit $t' = \frac{u}{2g}$ $= t\,\frac{AK-aQ}{aQ}$ (Nr. 8.) fort, und erreicht damit noch die Höhe $s' = \frac{u^2}{4g} = gt^2\,\frac{(AK-aQ)^2}{a^2Q^2}$ (Reine Mechan. §. 131 und 132.), mithin iſt

12. die ganze Höhe, welche die Laſt durch einen Zug erreicht,

$$s + s' = gt^2\,\frac{AK-aQ}{aQ} + gt^2\,\frac{(AK-aQ)^2}{a^2Q^2}$$

$$= gt^2\,\frac{AK-aQ}{aQ}\left(1 + \frac{AK-aQ}{aQ}\right)$$

$$= gt^2\,\frac{AK-aQ}{aQ}\cdot\frac{AK}{aQ}$$

13. Die während einen ganzen Zug verfloſſene Zeit $T = t + t' = t + \frac{AK-aQ}{aQ}\,t = \frac{AK}{aQ}\,t$

14. Bezeichnet alſo v die mittlere Geſchwindigkeit eines jeden ſolchen Zuges, ſo iſt

$$v = \frac{S}{T} = gt^2\,\frac{AK-aQ}{aQ}\cdot\frac{AK}{aQ} : \frac{AK}{aQ}\,t \text{ (Nr. 12 und 13.)}$$

$$= gt\,\frac{AK-aQ}{aQ}.$$

15. Sezet man endlich die Peripherie des Kreiſes, welche die Hand des Arbeiters bey jeder Umdrehung der Kurbel durchläuft, der Länge b dieſer Hand gleich, ſo iſt

$b : S = A : a$, alſo

$$S = \frac{a}{A}\, b = g\, t^2\, \frac{AK - aQ}{aQ} \cdot \frac{AK}{aQ}$$ (Nr. 12.), mithin

$$t = \sqrt{\frac{a^3 b Q^2}{g A^2 K (AK - aQ)}}$$

16. Subſtituirt man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 14., ſo wird

$$17.\quad v = g\, \frac{AK - aQ}{aQ} \cdot \sqrt{\frac{a^3 b Q^2}{g A^2 K (AK - aQ)}}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{a b g (AK - aQ)}{A^2 K}\right]},$$ und

$$18.\quad v^2 = \frac{abg}{A} \cdot \frac{AK - aQ}{AK} = \frac{abg}{A}\left[1 - \frac{aQ}{AK}\right]$$

I. Zuſaz. Wenn die ſtatiſchen Momente der Laſt und Kraft einander gleich ſind, mithin $aQ = AK$, ſo iſt $v = o$, die Kraft iſt in dieſem Falle gerade nur ſo groß, daß ſie der Laſt das Gleichgewicht hält, ohne daß ſie im Stande iſt, ſolche zu heben.

II. Zuſaz. Bezeichnet c die größte Geſchwindigkeit, mit welcher der Arbeiter die unbelaſtete Maſchine umzudrehen im Stande iſt, ſo iſt für $Q = o$, $v = c$, mithin Nr. 18. $c^2 = \frac{abg}{A}$.

II. Zuſaz. Sezet man dieſen ſo eben beſtimmten Werth in die Gleichung Nr. 18., ſo wird

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{aQ}{AK}\right) = c^2 - \frac{ac^2 Q}{AK}, \text{ folglich}$$

$$Q = \frac{(c^2 - v^2) AK}{a c^2} = \frac{AK}{a} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \text{ wie §. 93. II. Zuſ.)}$$

IV. Zuſaz. Verwendet der Arbeiter nur einen Theil P ſeiner Kraft, ſo wird

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{aQ}{AP}\right)$$

V. Zuſaz. In Beziehung auf die mögliche Dauer, bis nemlich die Kräfte erſchöpft ſind, läßt ſich auf eine ähnliche Art wie §. 96. annehmen, daß

$$t = n \frac{K - P}{P} \text{ geſezt werden könne.}$$

§. 111.

Aufgabe.

Für die gegebene Laſt Q an der Welle, nebſt den gegebenen Radien a, A der Welle und Kurbel, die Kraft P zu beſtimmen, welche der Arbeiter bey dem Umdrehen der Kurbel ſtets anwenden muß, damit tv ein maximum wird.

Auflöſung.

$$1. \quad v = c \left(1 - \frac{aQ}{AP}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$t = n \frac{K - P}{P} \text{ (§. 110. IV und V. Zuſ.), mithin}$$

$$2. \quad vt = n c. \frac{K - P}{P} \cdot \left(\frac{AP - aQ}{AP}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ und}$$

$$v^2 t^2 = \frac{n^2 c^2}{A} \cdot \frac{(K - P)^2 (AP - aQ)}{P^3}$$

3. Man ſeze den veränderlichen Factor $= y$; mithin

4. $y = \frac{(K-P)^2 (AP-aQ)}{P^3}$

$dy = \frac{-2P^3(K-P)(AP-aQ)+P^3(K-P)^2A-3P^2(K-P)^2(AP-aQ)}{P^6} dP$

5. $\frac{dy}{dP} = 0 = \frac{-2P(K-P)(AP-aQ)+AP(K-P)^2-3(K-P)^2(AP-aQ)}{P^4}$

$= -2P(AP-aQ) + AP(K-P) - 3(K-P)(AP-aQ)$

$= -2AP^2 + 2aQP + AKP - AP^2 - 3AKP + 3aKQ$
$+ 2AP^2 - 3aQP$

$= -aQP - 2AKP + 3aKQ$, mithin

6. $(2AK + aQ) P = 3aKQ$, und

$P = \frac{3aKQ}{aQ+2AK}$

7. Vermög der lezten Gleichung Nr. 5. wird $d^2y = -aQdP^2 - 2AKdP^2$, alſo

$\frac{d^2y}{dP^2} = -aQ - 2AK.$

8. Für den Werth $P = \frac{3aKQ}{aQ+2AK}$ wird alſo y (Nr. 4) (Arithm. §. 320.), mithin auch vt (Nr. 2.) ein maximum.

I. Zuſaz. Subſtituirt man den Werth P (Nr. 8.) in die Gleichung §. 110. IV. Zuſ., ſo wird

$$y^2 = c^2 \left(1 - \frac{aQ}{A} \cdot \frac{aQ+2AK}{3aKQ}\right) = c^2 \left(1 - \frac{aQ+2AK}{3AK}\right)$$

$$= c^2 \left(\frac{3AK-aQ-2AK}{3AK}\right) = \tfrac{1}{3} c^2 \left(\frac{AK-aQ}{AK}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3} c^2 \left(1 - \frac{aQ}{AK}\right)$$

II. Zuſaz. Bezeichnet $\varkappa$ die Geſchwindigkeit, mit welcher der Mann die Kurbel drehen muß, wenn für die unbelaſtete Maſchine, das iſt, für $Q = 0$, vt ein maximum iſt, ſo wird im vorhergehenden Zuſaz durch Substitution die lezte Gleichung

$$\varkappa^2 = \tfrac{1}{3} c^2, \text{ mithin } v^2 = \varkappa^2 \left(1 - \frac{aQ}{AK}\right) \text{ und}$$

$$v = \varkappa \sqrt{\left(1 - \frac{aQ}{AK}\right)}.$$ Man vergleiche §. 98. III. Zuſ.)

§. 112.

Aufgabe.

Die Größe der Laſt Q anzugeben, damit Qv ein maximum giebt.

Auflöſung.

1. Wenn man zugleich auf die Dauer Rückſicht nimmt, ſo muß allemal

$$v = \varkappa \sqrt{\left(1 - \frac{aQ}{AK}\right)}$$ ſeyn (§. 111. II. Zuſ.), mithin

2. $$Qv = \varkappa \left(Q^2 - \frac{aQ^3}{AK}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{AK}} (AKQ^2 - aQ^3)^{\frac{1}{2}}$$

alſo $$Q^2 v^2 = \frac{\varkappa^2}{AK} (AKQ^2 - aQ^3)$$

3. Man ſeze den veränderlichen Factor $= y$, d. i. $y = (AKQ^2 - aQ^3)$, ſo wird
$dy = 2AKQdQ - 3aQ^2dQ$, und

4. $$\frac{dy}{dQ} = 0 = 2AKQ - 3aQ^2$$
$$= 2AK - 3aQ, \text{ alſo}$$

5. $$Q = \frac{2AK}{3a}$$

6. $d^2y = -3a\,dQ^2$, und

$$\frac{d^2y}{dQ^2} = -3a, \text{ folglich}$$

7. wird für $Q = \frac{2AK}{3a}$ die Größe y (Arithm. §. 320.) mithin auch Qv ein maximum.

I. Zuſaz. Sezet man ſtatt Q dieſen Werth in die Gleichung §. 111. II. Zuſaz, ſo wird

$$v = \varkappa \sqrt{\left[1 - \frac{a}{AK} \cdot \frac{2AK}{3a}\right]} = \varkappa \sqrt{(1 - \tfrac{2}{3})}$$
$$= \varkappa \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\,c \text{ (§. 111. II. Zuſ.), mithin}$$

II. Zuſaz. $Qv = \frac{1}{3}cQ = \frac{1}{3}Q \cdot \sqrt{\frac{abg}{A}}$ (§. 110. II. Zuſ.)

$$= \frac{2}{9}\,\frac{AK}{a}\sqrt{\frac{abg}{A}} \text{ (Nr. 7.)}$$
$$= \frac{2}{9}\,K\sqrt{\frac{Abg}{a}}$$

Die Größe Qv hängt alſo noch von der größtmöglichen Kraftäuſſerung K, und dem Verhältniſſe der beyden Halbmeſſer a, A ab.

III. Zuſaz. Die Gewalt P, mit welcher gewöhnlich der Arbeiter auf die Kurbel wirkt, zu beſtimmen, iſt ſehr ſchwer, Coulomb ſchließt aus mehrern Beobachtungen, daß man, bey anhaltender Arbeit, P nicht größer als 7 Kilogrammes = 12,47 Pfund baier. Gewichtes ſezen dürfe, ferner beträgt ſehr oft der Umfang b des Kreiſes, welchen die Handhab der Kurbel beſchreibt, 23 Decimétres = 7,87 baier. Schuhe, während 1 Minute darf man nur etwa 20 Umdrehungen annehmen, und die Dauer der ganzen täglichen Arbeit

8 Stunde, oder wenn man noch die kleinern nothwendigen Erhohlungen abzieht, 6 Stunden = 360 Minuten ſezen.

IV. Zuſaz. Die ganze tägliche Kraftäuſſerung beſtünde nach dieſen Annahmen in dem Producte $Ps = 7 \times 23 \times 20 \times 360 = 1159200$ Kilogrammes zur Höhe eines Décimétr. = 116 Kilogrammes zur Höhe eines Kilométr. erhoben. Im baier. Maaße

$$= 12{,}47 \times 7{,}87 \times 20 \times 360 = 706600 \text{ Pfund}$$

zur Höhe eines Fußes = 706 Pfund zur Höhe von 1000 Schuh. erhoben.

§. 113.

Aufgabe.

Ueber eine verticale unbewegliche Rolle iſt ein Seil gelegt, an dem einen Ende des Seils hängt die Laſt Q; an dem andern Ende zieht ein Arbeiter abwärts, man ſucht die mittlere Geſchwindigkeit v, mit welcher bey jedem Zuge die Laſt ſteiget.

Auflöſung.

1. Bey jedem Zuge ergreifet der Arbeiter mit ausgeſtreckten Armen das Seil, überläßt ſich ſeiner Schwere, und zieht alſo durch ſein eigenes Gewicht G abwärts;

2. dadurch entſtehet eine beſchleunigte Bewegung, bezeichnet nun u die Geſchwindigkeit, nach Verlauf der Zeit t, womit auf der einen Seite G ſinket, und auf der andern die Laſt Q ſteiget, ſo würde

3. auf lezterer Seite eine Kraft $= Q + \frac{Q\,du}{2g\,dt}$ nicht nur das Gewicht der Laſt tragen, ſondern auch derſelben die Geſchwindigkeit u ertheilen (§. 6.).

4. Eben ſo wird zur Ertheilung dieſer Geſchwindigkeit, womit der Arbeiter ſinkt, die Kraft $\frac{Gdu}{2gdt}$ erfodert.

5. Da nun gegenwärtig die Kraft G allein dieſes leiſtet, ſo wird

6. $G = \frac{Gdu}{2gdt} + Q + \frac{Qdu}{2gdt}$,

$$G - = Q(G+Q)\frac{du}{2gdt}$$

$du = 2gdt\,\frac{G-Q}{G+Q}$, mithin

7. $u = 2gt\,\frac{G-Q}{G+Q}$, wo keine Const. ſtatt findet.

8. Bezeichnet s den entſprechenden Raum, ſo iſt $ds = udt$ (Reine Mech. §. 38.)

$= 2gtdt\,\frac{G-Q}{G+Q}$, alſo

9. $s = gt^2\,\frac{G-Q}{G+Q}$, wo ebenfalls keine Const. dazu kömmt.

10. Vermög der erlangten Geſchwindigkeit ſezet Q die Bewegung noch fort während

der Zeit $t' = \frac{u}{2g} = t\,\frac{G-Q}{G+Q}$ (Nr. 7.), und

11. erreichet dadurch noch eine Höhe

$s' = \frac{u^2}{4g}$ (Reine Mech. §. 131 und 132.)

$= gt^2 . \frac{(G-Q)^2}{(G+Q)^2}$ (Nr. 7.), folglich

12. Sezet man die ganze Höhe, zu welcher die Laſt Q während einem Zuge ſteiget, $= h$, ſo iſt

$$h = s + s' = gt^2 \frac{G-Q}{G+Q}\left[1+\frac{G-Q}{G+Q}\right] \text{(Nr. 9 u. 11.)}$$

$$= gt^2 \frac{G-Q}{G+Q} \cdot \frac{2G}{G+Q}, \text{ und}$$

13. $t^2 = \frac{h(G+Q)^2}{2gG(G-Q)}$.

14. Die während einem Zuge verfloſſene Zeit

$$T = t + t' = t + t\,\frac{G-Q}{G+Q} \text{ (Nr. 10.)}$$

$$= t\left(1+\frac{G-Q}{G+Q}\right) = t.\,\frac{2G}{G+Q}$$

15. Bezeichnet endlich v die geſuchte mittlere Geſchwindigkeit, ſo iſt

$$v = \frac{h}{T} = gt^2\frac{G-Q}{G+Q} \cdot \frac{2G}{G+Q} \times \frac{G+Q}{2G.t} \text{(N. 12. u. 14.)}$$

$$= gt\,\frac{G-Q}{G+Q}, \text{ und}$$

16. $v^2 = g^2t^2\,\frac{(G-Q)^2}{(G+Q)^2} = \frac{g^2(G-Q)^2}{(G+Q)^2} \cdot \frac{h\,(G+Q)^2}{2gG\,(G-Q)}$

(Nr. 13.)

$$= \frac{gh\,(G-Q)}{2G} = \tfrac{1}{2}\,gh\left(1-\frac{Q}{G}\right)$$

17. $v = \sqrt{\frac{gh\,(G-Q)}{2G}}$

I. Zuſaz. Da bey der Auflöſung der Aufgabe ohnehin nie ganz genaue Reſultate zu erwarten ſind, ſo wurde das Gewicht des Seils und der Rolle, die Reibung, und das Umdrehungsmoment der Rolle nicht in Anſchlag gebracht.

II. Zuſatz. Bezeichnet c die Geſchwindigkeit, mit welcher der Arbeiter durch Anwendung ſeiner ganzen Schwere das bloße Seil herabzuziehen vermag, ſo iſt Nr. 15. für $Q = 0$,

$c^2 = \frac{h}{2gG}$, und dieſer Werth, in eben dieſer obigen Gleichung ſubſtituirt, giebt

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{Q}{G}\right)$$ wie §. 93. und §. 110. IV. Zuſ.

III. Zuſatz. Aus dieſer lezten Gleichung wird

$$v^2 = c^2 - \frac{c^2 Q}{G}$$

$$\frac{c^2 Q}{G} = c^2 - v^2,$$ mithin

$$Q = G\,\frac{c^2 - v^2}{c^2} = G\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$ (wie §. 93. II. Zuſ.)

IV. Zuſatz.

Da $v = c\sqrt{\left(1 - \frac{Q}{G}\right)}$ (III. Zuſ.), mithin

$$Qv = c\left(\frac{GQ^2 - Q^3}{G}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{G^{\frac{1}{2}}}\left(GQ^2 - Q^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

alſo dieſe Gleichung mit jener §. 112. Nr. 2. ganz ähnlich iſt, ſo iſt auch gegenwärtig für $Q = \frac{2}{3}G$ die Function Qv ein maximum.

V. Zuſatz. Selten wird wohl der Arbeiter ſeine ganze Schwere G (Nr. 1.) anwenden, gewöhnlich ergreiffet er nur mit geſtreckten Armen das Seil, bleibt dabey aber noch auf ſeinen Füſſen ſtehen, und ſenkt nur ſeinen obern Theil des Körper abwärts, mithin verwendet er nur einen Theil P ſeines Gewichtes, dadurch wird aber auch u Nr. 7., mithin auch h Nr. 12. kleiner, ſonſt bleibt alles, ſo daß nun wie Nr. 17.

$v = \sqrt{\frac{gh(P-Q)}{2P}}$ iſt; wo aber h durch mehrere Beobachtungen erſt beſtimmt werden muß.

VI. Zuſaz. Vermög lezterer Gleichung iſt:

$$v^2.2P = ghP - ghQ;$$

$$P(gh - 2v^2) = ghQ, \text{ und}$$

$$P = \frac{ghQ}{gh - 2v^2}$$

§. 114.

Erfahrungen.

a. Nach Coulombs Beobachtungen wiegen die Rammklöze, die bey Schlagwerken gebraucht werden, 350 bis 450 Kilogrammes, mithin 624 bis 802 baier. ℔. Dieſe Klöze werden nun gewöhnlich bey jedem Schlage auf die Höhe von 11 Decimétres, alſo beynahe 3,77 baier. Schuhe erhoben, und während einer Minute gegen 20 Schläge gemacht. Die Anzahl der Arbeiter richtet ſich nach der Größe des Rammklozes, bey ſehr ſtarken und geübten Männern trifft auf 19 Kilogrammes, mithin auf 34 ℔. des Rammklozes jedesmal ein Arbeiter. In einer Hize, das iſt, ununterbrochen, werden gewöhnlich 60-80 Schläge gemacht, und dann jedesmal ſo lange ausgeruhet, als die Hize dauerte, wenn man nun dieſe nothwendigen Erholungen, ferner die Zeit, die zur Aufſtellung und Ordnung der Maſchine von Zeit zu Zeit erfordert wird, abrechnet, ſo darf man auf einen Tag höchſtens 3 Stunde rechnen, während welchen eigentlich geſchlagen wird.

b. Bey dem Schleuſſenbau zu Landshut im Jahre 1810. wurden gleichzeitig mehrere Ramm-Maſchinen in Thätigkeit geſezt, und dabey in einer Hize gewöhn-

lich 30–34 Schläge gemacht, die dabey gemachten zahlreichen Beobachtungen ſind in den Beyträgen zur Waſſer-Brücken- und Straſſenbaukunde vierten Lieferung von C. Fr. Wiebeking in einer Tabelle mitgetheilet worden, aus dieſen erhellet:

Ramm-Maſchine	Gewicht des Rammklozes. baier. ℔.	Anzahl der Arbeiter	Anzahl der Schläge	Rammzeit		mittlere Höhe	
				Min.	Sec.	Fuß	Zoll
I.	1320	54	6436	270	41	4	10
II.	1226	50	45559	1799	23	4	11
			48153	1973	24	4	7
III.	1170	50	37916	1594	24	4	3,4
			33790	1425	22	4	11

I. Zuſaz. Gemäß Coulombs Beobachtungen a, iſt gegenwärtig die Höhe $h = 3{,}77$, mithin während 20 Schlägen hinterlegte der Rammkloz zuſammen die Höhe von $3{,}77 \times 20 = 75{,}4$ baier. Schuhen; da aber bey jedem Schlage der Rammkloz nicht nur zur Höhe h ſteigt, ſondern auch jedesmal von derſelben wieder herabfällt, ſo kömmt nur die halbe Zeit auf das Steigen, ſo daß bey 20 Schlägen die Hälfte der verfloſſenen Zeit auf das Steigen, die andere Hälfte auf das Herabfallen deſſelben gerechnet werden muß, mithin wurde während 20 Schlägen obige Höhe in einer halben Minute oder 30 Secunden hinterlegt, ſo daß alſo $v = \frac{75{,}4}{30} = 2{,}52$ baier. Schuhe beträgt.

II. Zuſaz. Da ferner bey Coulombs Beobachtungen Q = 34 ℔., ſo erhält man die Kraftanwendung eines Arbeiters

$$p = \frac{ghQ}{gh - 2v^2} \text{ (§. 113. VI. Zuſ.) } = 42{,}528 \text{ ℔.}$$

III. Zuſaz. Da man bey einem Schlagwerke nur die Hälfte der Zeit auf das Steigen des Rammklozes rechnen darf (I. Zuſ.), ſo iſt nach Coulombs Angabe während einem Tage die Zeit t = $\frac{3}{2}$ Stunde = 5400 Secunden, mithin der tägliche Nuzeffect bey deſſen Beobachtungen:

$$Qs = Qvt = 19 \times \frac{11 . 20}{30} \times 5400 = 752400 \text{ Kilogr.}$$

zur Höhe eines Decimétre = 75 Kilogrammes zur Höhe eines Kilométre erhoben; im baier. Maaße und Gewichte erhält man

$$Qvt = 34 \times \frac{75{,}4}{30} \times 5400 = 461448 \text{ ℔. zur Höhe}$$

eines = 461 ℔. zur Höhe von 1000 Fuß erhoben.

IV. Zuſaz. Auf die nemliche Art geben die Beobachtungen b nachſtehende Reſultate

Ramm-Maſchine	Q ℔.	h $\frac{1}{12}$ Fuß	v Fuß	P ℔.	Qvt ℔. zu 1 Fuß Höhe.
I.	24,44	58	3,83	38,28	505468
II.	24,5	59	4,15	42,049	549054
		55	3,73	38,47	493479
III.	23,4	51,4	3,4	34,43	429624
		59	3,89	36,88	491540

V. Zuſaz.

V. Zuſaz. Je ſchwerer der Rammkloz iſt, mithin je mehr Leute zu einem Schlagwerke geſtellt werden müſſen, deſto größern Raum erfodern die Arbeiter, deſto ſchiefer wird daher die Richtung der einzelnen Seile, deſto geringer alſo der ſenkrechte, oder wirkſame Theil eines ſolchen ſchiefen Zuges; Coulomb theilet einem Arbeiter 34 Pfund von der Laſt des Rammklozes zu, da bey dem Schleiſſenbau ſolche nur 24 Pfund beträgt, hingegen waren aber bey leztern Bau die Rammklöze um den 3ten Theil größer, ferner wurde auch noch bey jedem Zug der Rammkloz höher und ſchneller gehoben, und endlich ſteht bey einem ſehr großen Bau die Auswahl der Arbeiter nicht nach Belieben zu Gebothe.

VI. Zuſaz. Wenn um eine verticale Rolle ein Seil gelegt wird, deren beyde Ende aber mit einander verbunden ſind, und auf jeder Seite ein Kübel oder Waſſereimer daran befeſtiget iſt, ſo kann man auf der einen Seite den unten gefüllten Eimer von einer Tiefe dadurch heraufziehen, indem man auf der anderen Seite das Seil mit dem leeren Kübel abwärts zieht, ſo daß bey dieſer Arbeit wie bey einem Schlagwerk ein Theil des Gewichtes des Arbeiters dabey wirkſam iſt. Coulomb ließ auf dieſe Art 2 Tage hintereinander Waſſer aus einem 37 métres, alſo 127 baier. Fuß tiefen Brunnen von einem Manne heraufziehen, den erſten Tag wurden 125, den folgenden Tag hingegen 119 ſolche mit Waſſer gefüllte Kübel heraufgebracht, die zum Ziehen erfoderliche mittlere Gewalt fand Herr Coulomb mittels einer Schnellwage 16 Kilogrammes = 29 b. Pfund, nimmt man alſo an, daß ein Mann,

wenn die Arbeit mehrere Tage hintereinander ſoll fortgeſezt werden, täglich 120 ſolche Kübel Waſſer heraufziehen könne, ſo iſt der tägliche Nuzeffect, oder

$Qs = 16 \times 120 \times 37 = 71040$ Kilogrammes zur Höhe eines Métre erhoben, $= 71$ Kilogrammes zur Höhe eines Kilométre erhoben.

Im baier. Maaße und Gewichte wird

$Qs = 29 \times 120 \times 127 = 441960$ Pfund eines baier. Fußes $= 442$ Pfund zur Höhe von 1000 Fuß erhoben.

Daß dieſe Wirkung kleiner als bey einem Schlagwerk ſeyn muß, leuchtet für ſich ein, weil bey dieſer Arbeit gewiß allemal die angewandte Kraft P kleiner, und die Stellung unbequemer iſt.

IV. Abſchnitt.

Kraftäuſſerung der Laſtthiere.

---

§. 115.

Aufgabe.

Ein Laſtthier, deſſen eigenes körperliches Gewicht G, und die gröſte Laſt, welche es tragen kann, K iſt, wird mit einer Laſt $Q < K$ beladen, man ſuchet die mittlere Geſchwindigkeit v ſeines Ganges auf ebenem wagrechtem Boden.

Auflöſung.

1. Auf die nemliche Art wie §. 93., wenn die Buchſtaben b, h ähnliche Bedeutungen behalten, wird

2. $v = b \sqrt{\left[\frac{g}{h} \cdot \frac{K - Q}{G + K}\right]}$

I. Zuſaz. Bezeichnet c die größte Geſchwindigkeit, mit welcher das Laſtthier auf ebenem wagrechtem Boden unbelaſtet gehen kann, ſo wird in der voranſtehenden Formel $Q = o$, und $v = c$, mithin

$$c = b \sqrt{\left\{\frac{g}{h} \cdot \frac{K}{G+K}\right\}}$$

II. Zuſaz. $v^2 : c^2 = \frac{b^2 g}{h} \cdot \frac{K-Q}{G+K} : \frac{b^2 g}{h} \cdot \frac{K}{G+K}$

$= K-Q : K$, alſo

$$v^2 = c^2 \frac{K-Q}{K} = c^2 \left(1 - \frac{Q}{K}\right)$$

III. Zuſaz. $v^2 K = c^2 K - c^2 Q$

$c^2 Q = K (c^2 - v)$, folglich

$$Q = K \frac{c^2 - v^2}{c^2} = K \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \text{ und}$$

$$K = Q \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

IV. Zuſaz. Verwendet das Laſtthier nur einen Theil P ſeiner Kraft, ſo wird Nr. 2.

$$v = b \sqrt{\left\{\frac{g}{h} \cdot \frac{P-Q}{G+P}\right\}}$$

V. Zuſaz. Da dieſe Grundformeln eben dieſelben wie §. 93. bey einem Menſchen, ſo laſſen ſich alle Schlüſſe anwenden, welche im I. Abſchnitte §. 94 – §. 98. daraus abgeleitet wurden.

§. 116.

Aufgabe.

Ein Laſtthier ſoll auf ebenem wagrechtem Boden eine Laſt ziehen, man ſuchet die mittlere Geſchwindigkeit u.

Aufloͤſung.

1. Wenn die Bewegung eingeleitet, und der Gang des Laſtthieres gleichfoͤrmig geworden iſt, ſo muß ſolches

2. noch immer den Widerſtand R heben, welchen die Laſt durch Reibung u. ſ. w. entgegenſezet, dadurch wird nun offenbar die Kraft K des Thieres vermindert.

3. Bezeichnet nun P dieſen immerwaͤhrenden Kraftverluſt, ſo iſt K - P der Ueberreſt der Kraft, welcher nebſt G auf die Fortſezung der Bewegung, das iſt, auf den Gang des Laſtthieres mit der Geſchwindigkeit u verwendet wird.

4. Es iſt daher eben ſo, als bewegte ſich das Laſtthier ganz frey auf ebenem wagrechtem Boden mit Anwendung der Kraft G + K - P.

5. Man findet alſo die mittlere Geſchwindigkeit u, wenn man in die Gleichung §. 115. I. Zuſ. ſtatt c die Groͤße u, und ſtatt K, die Groͤße K - P ſezet, ſo daß alſo

6. $u = b \sqrt{\left\{\frac{g}{h} \cdot \frac{K - P}{G + K - P}\right\}}$ wird.

Zuſaz. Fuͤr die groͤßte Geſchwindigkeit c, womit das Laſtthier ganz frey gehen wuͤrde, iſt nun

$c = b \sqrt{\left[\frac{g}{h} \cdot \frac{K}{G + K}\right]}$ (§. 115. I. Zuſ.), mithin

$$u^2 : c^2 = \frac{K - P}{G + K - P} : \frac{K}{G + K}$$

$$= (G + K)(K - P) : K (G + K - P)$$

$$= \frac{K - P}{K} : \frac{G + K - P}{G + K}$$

$$= \left(1 - \frac{P}{K}\right) : \left(1 - \frac{P}{G + K}\right)$$

§. 117.

Aufgabe.

Den Kraftverluſt P zu beſtimmen, welchen das Laſtthier an ſeiner Kraft K durch das ſtets entgegenwirkende Hinderniß R bey dem Fortziehen der Laſt Q leidet.

Auflöſung.

1. Da es in Beziehung auf den Gang des ziehenden Thieres gerade ſo iſt, als bewegte ſich ſolches frey durch Anwendung der geſammten Kraft G+K-P (§. 116. Nr. 4.), ſo verhält ſich alles wie §. 93., wenn allda Q = 0, und ſtatt K die Kraft K-P geſezt wird.

2. Behalten alſo t, t′, T eben dieſelben Bedeutungen wie im angezogenen §., ſo erhält man daſelbſt durch die gehörige Substitution aus Nr. 10 und 13.

$$2t = 2 \sqrt{\left[\frac{h}{g} \cdot \frac{G^2}{(K-P)(G+K-P)}\right]}$$

$$T = 2 \sqrt{\left[\frac{h}{h} \cdot \frac{G+K-P}{K-P}\right]}, \text{ mithin}$$

3. $$T : 2t = \sqrt{\left[\frac{G+K-P}{K-P}\right]} : \sqrt{\left[\frac{G^2}{(K-P)(G+K-P)}\right]}$$

$$= \sqrt{(G+K-P)} : \sqrt{\left[\frac{G^2}{G+K-P}\right]}$$

$$= (G+K-P) : G, \text{ alſo}$$

4. $$T = 2t\,\frac{G+K-P}{G}$$

5. Das Hinderniß R, welches die bewegte Laſt Q entgegenſezt, iſt bey jedem Schritte während der ganzen Zeit T wirkſam, mithin iſt die Größe des Widerſtandes jedesmal = RT.

6. Da ſich hingegen die auf die Bewegung verwendete Kraft $G+K-P$ bey jedem Schritte nur während der Zeit $2t$ äuſſert, indem während der Zeit $2t'$ die Bewegung durch die bereits erlangte Geſchwindigkeit für ſich beſtehet (§. 93. Nr. 8. und 12.), ſo kann auch nur während der Zeit $2t$ ein Verluſt an der Kraft K ſtatt finden, ſo daß alſo die Größe dieſes Verluſtes bey jedem Schritte $= 2Pt$ iſt.

7. $$RT : 2Pt = 2t \frac{G+K-P}{G} R : 2tP \text{ (Nr.4.)}$$
$$= (G+K-P)R : GP$$

8. Lezteres Verhältniß drückt alſo das Verhältniß des Widerſtandes zum Verluſt der Kraft während eines Schrittes alſo für einerley Zeit aus.

9. Wenn F der größte Widerſtand iſt, welchen das Laſtthier beym Ziehen überwältigen kann, ſo würde F demſelben ſeine ganze Kraft entziehen, alſo $P=K$, mithin in dieſem Falle das Verhältniß des Widerſtandes zur Kraftverminderung (Nr. 7.) $= F : K$ ſeyn.

10. Nimmt man alſo an, daß ſich die Kraftverminderungen wie die Größen der Hinderniſſe verhalten, ſo wird

11. $$F : (G+K-P) R = K : GP$$
$$FGP = (G+K)KR - KRP, \text{ folglich}$$

12. $$P(FG+KR) = (G+K)KR, \text{ und}$$
$$P = \frac{(G+K)KR}{FG+KR}$$

1. Zuſatz. Aus lezterer Gleichung wird

$$\frac{P}{K} = \frac{(G+K)R}{FG+KR}$$

$$1 - \frac{P}{K} = 1 - \frac{(G+K)R}{FG+KR} = \frac{FG-GR}{FG+KR}$$

$$= \frac{G(F-R)}{FG+KR}$$

II. Zuſaz. Eben ſo iſt nach Nr. 12:

$$\frac{P}{G+K} = \frac{KR}{FG+KR}$$

$$1 - \frac{P}{G+P} = 1 - \frac{KR}{FG+KR} = \frac{FG}{FG+KR}$$

III. Zuſaz. Sezet man dieſe Werthe ſtatt dem lezten Verhältniſſe §. 116. Zuſ., ſo iſt

$$u^2 : c^2 = \frac{G(F-R)}{FG+KR} : \frac{GF}{FG : KR}$$

$$= F-R : F, \text{ mithin}$$

$$u^2 = c^2 \frac{F-R}{F} = c^2 \left(1 - \frac{R}{F}\right)$$

IV. Zuſaz. Eben ſo wird aus dieſer Proportion:

$$u^2 F = c^2 F - c^2 R, \text{ mithin}$$

$$R = F \frac{c^2 - u^2}{c^2} = F \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

V. Zuſaz. Soll nun das Product des Widerſtandes R in die Geſchwindigkeit u, mit welcher das Thier bey dem Ziehen der Laſt fortgeht, alſo Ru ein maximum ſeyn, ſo wird wie §. 113. IV. Zuſ.

$$R = \tfrac{2}{3} F, \text{ und daher}$$

$$u^2 = c^2 \left(1 - \frac{\tfrac{2}{3} F}{F}\right) \text{ (III. Zuſ.)} = c^2 . \tfrac{1}{3}, \text{ alſo}$$

$$u = c \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

VI. Zuſaz. Sezet man für ein Pferd $F = 400$ ℔. und $c = 12$ Fuß, ſo wird

$R = \tfrac{2}{3}\, 400 = 266\tfrac{2}{3}$ ℔., $u = 6{,}9282$ Fuß.

II. Theil.

Specielle Maſchinenlehre.

I. Hauptſtück.

Von der Anwendung des Hebels.

§. 118.

Erklärung.

Wenn die drey Puncte eines mathematiſchen Hebels (Reine Mech. §. 10.), nemlich die beyden Aufhängpuncte, und der Ruhepunct durch den Zuſammenhang der Materie, woraus der Hebel beſteht, verbunden, alſo die Hebelsarme phyſiſche Körper ſind, ſo heißt der Hebel ein phyſiſcher.

I. Zuſaz. Der phyſiſche Hebel muß jedesmal aus einem ſolchen Material, und deſſen Arme ſolch eine Dicke haben, daß er durch ſeine Feſtigkeit der Biegung hinlänglich widerſteht.

II. Zuſaz. Der phyſiſche Hebel läßt ſich allemal als ein mathematiſcher Hebel betrachten, wo auſſer der Kraft und Laſt im Schwerpuncte deſſelben nach verticaler Richtung eine Kraft angebracht iſt, welche dem Gewichte des Hebels gleich iſt (Reine Mech. §. 93. III. Zuſaz.).

III. Zuſaz. Auf die Theorie des Hebels ſtüzet ſich
a. die Anwendung deſſelben als Hebwerkzeug,
b. als Wage,
c. die Anwendung der Walze auf vortheilhafte Bewegung.

I. Abſchnitt.

Vom phyſiſchen Hebel als Hebewerkzeug.

§. 119.

Aufgabe. (Fig. 47.)

Für einen doppelarmigen Hebel, deſſen Gewicht G gegeben iſt, das Verhältniß zwiſchen den Kräften P an A, und Q an B und ihren Entfernungen vom Ruhepuncte im Zuſtande des Gleichgewichtes anzugeben, wenn die Lage des Hebels wagrecht, und die Richtungen der Kräfte auf ihn ſenkrecht ſind.

Auflöſung.

1. Man ſuche die Stelle H des Schwerpunctes des Hebels (Reine Mech. IV. Hauptſtück, II. Abſchn.).

2. Nun iſt's gerade ſo viel, als wirkten auf den mathematiſchen Hebel an A, B, H die 3 Kräfte P, Q, G nach ſenkrechten Richtungen, mithin

3. Wenn C die Stelle ihres gemeinſchaftlichen Mittelpunctes iſt, ſo iſt ſie auch die Stelle der Unterlage für den Zuſtand des Gleichgewichtes. (Reine Mech. §. 20 und 24. IV. Zuſ.)

4. Nun iſt:

$$CA = \frac{AH.G + AB.Q}{G + P + Q}$$ (Reine Mech. §. 22.).

5. Sezet man der Kürze wegen $AC = p$; $BC = q$, $CH = g$, mithin $AH = p - g$, und $AB = p + q$, in die vorhergehende Gleichung, ſo wird

6. $p = \frac{(p-g)G+(p+q)Q}{G+P+Q}$

$p.G+p.P+p.Q = p.G-g.G+p.Q+q.Q$

$p.P = -gG+qQ$, mithin

7. $p.P+g.G = q.Q$ das iſt:

Im Zuſtande des Gleichgewichtes ſind die ſtatiſchen Momente auf beyden Seiten der Unterlage einander gleich.

I. Zuſaz. Da die Stelle der Unterlage mit dem Mittelpuncte der Kräfte zuſammenfällt, ſo leidet ſie den Druck ſämmtlicher Kräfte.

II. Zuſaz. Fällt die Unterlage in einen Punct der Directionslinie des Schwerpunctes (Reine Mech. §. 93.), ſo iſt in dieſem Falle $g=0$, mithin $p.P=q.Q$ wie bey dem mathematiſchen Hebel.

III. Zuſaz. Wirken die Kräfte auf den Hebel nach ſchiefen, aber unter ſich parallelen Richtungen, wenn z. B. die Lage des Hebels ſchief iſt, und die Richtungen vertical ſind, ſo gelten alle bisher angeführten Schlüſſe, und die Unterlage leidet nach der nemlichen Richtung den Druck ſämmtlicher Kräfte (Reine Mech. §. 24.).

IV. Zuſaz. Bey ſchiefen Richtungen, welche nicht parallel ſind, gelten eben dieſe Säze, nur dürfen dann die Entfernungen der Kräfte nicht mit den Hebelsarmen verwechſelt werden (Reine Mech. §. 29. und §. 30. I. Zuſ.), ſo wie die Richtung und Größe des Druckes auf die Unterlage aus der Zuſammenſezung der Kräfte hergeleitet werden muß.

V. Zuſaz. Befände ſich am wagrechten Hebel (Fig. 47.) die Unterlage in B, und zöge an C die Kraft

Q vertical aufwärts, ſo würde für den Zuſtand des Gleichgewichtes ebenfalls P. AB + G. BH = Q. BC, oder kürzer P.p + G.g = Q.q ſeyn, wo wieder p, g, q die Entfernungen der Kräfte von der Unterlage bezeichnen.

VI. Zuſaz. Zöge hingegen Q an C abwärts, und P an A vertical aufwärts, ſo müßten im Zuſtande des Gleichgewichtes P. p = Q. q + G. q; mithin ſind auch am einarmigen Hebel die ſtatiſchen Momente der Kräfte wie Nr. 7. einander gleich.

VII. Zuſaz. Eben dieſes läßt ſich leicht darthun, wenn die beyden Kräfte P, Q auf einen Winkelhebel, deſſen Gewicht P iſt, wirken (Reine Mech. §. 29 u. 30.).

VIII. Zuſaz. Fällt bey dem doppelarmigen, oder dem Winkelhebel die Unterlage in die Richtung der Directionslinie des Schwerpunctes, ſo muß, wenn die Hebelsarme gleich, und die Richtungen auf ſie ſenkrecht ſind, da P.p = Q.q iſt, die Kraft P der Laſt Q gleich ſeyn.

§. 120.

Aufgabe. (Fig. 47.)

Die Beſchaffenheit eines doppelarmigen Hebels anzugeben, um eine gegebene Laſt Q mit einer geringern Kraft P zu heben.

Aufloͤſung.

1. Man nehme einen doppelarmigen Hebel AB von hinlänglicher Stärke (§. 118. I. Zuſ.).

2. Beſtimme nebſt dem Gewichte des Hebels G die Lage des Schwerpunctes H.

3. In wagrechter Lage des Hebels befeſtige man an dem einen Ende B die Laſt Q.

4. Nun beſtimme man die Stelle der Unterlage C ſo, daß der Schwerpunct zwiſchen C und A fällt, ferner $AC > BC$ iſt.

5. Wird nun an A eine Kraft P nach ſenkrechter Richtung angebracht, ſo iſt die Vorrichtung die verlangte.

Beweis.

6. Für den Zuſtand des Gleichgewichtes wird

$$P.AC + G.HC = Q.BC,$$ oder kürzer

$$P.p + G.g = Q.q$$

7. Da nun $p > q$, und überdieß das Gewicht G durch ſein Moment zum Vortheil der Kraft P wirket, ſo darf leztere Kraft um ſo viel kleiner ſeyn, als die Laſt Q iſt.

I. Zuſaz. Vermittels eines doppelarmigen Hebels läßt ſich alſo mit einer gegebenen Kraft P, wenn p im Verhältniß zu q ſehr groß, und überdieß das Moment $G.g$ noch beträchtlich iſt, eine ſehr große Laſt Q überwältigen; auf dieſe Art wurden zu Landshut bey Anlegung des neuen Schleiſſenbaues die alten Pfähle aus dem Waſſergrund gezogen, man legte nemlich über ein Gerüſt einen ſtarken Baum, an dem dickern und der Unterſtüzung ſehr nahe liegenden Ende wurde der Pfahl befeſtiget, und an dem andern mehr entfernten Ende zogen die Arbeiter.

II. Zuſaz. Eine ähnliche Vorrichtung iſt die ſogenannte Gliedwage, mit welcher in Baiern die Landleute die alten Stöcke ausreiſſen; ſie beſteht nem-

lich (Fig. 48. a.) aus zwey eiſernen Ketten, von welchen jede an dem einem Ende mit einem Hacken verſehen iſt, dann aus einem eiſernen Hebel AE, an welchem zur Verlängerung eine hölzerne Stange EF befeſtiget iſt; auf der einen Seite des Hebels iſt in C als Ruhepunct ein Hacken, und auf der andern Seite in gleichen Entfernungen CA, CB ſind zwey Hacken A, B angebracht. Alles muß von gutem Eiſen ſeyn, damit es der großen Gewalt ohne zu zerbrechen widerſtehen kann. Sollen nun mittels dieſer Gliedwage Stöcke, z. B. M, N ausgeriſſen werden, ſo werden zuerſt ein und der andere Hauptaſt der Wurzel, welche das Ausreiſſen vorzüglich erſchweren, abgehauen; dann legt man um den einen Stock, z. B. M die eine Kette, und hängt ſolche mit dem andern Ende an den Hacken C des Hebels, ferner umſchlingt man mit der zweyten Kette den Stock N, und befeſtiget ſie zugleich an dem Hacken A des Hebels ſo, daß alles ſcharf geſpannt iſt, wodurch nothwendig die ganze Hebelsſtange AF in die Lage CM kömmt. Nun ergreifen ein oder mehrere Arbeiter das äuſſere Ende D des Hebels, und drehen ſolchen um C gegen die andere Seite nach N zu, bis der Hebel AF in die Richtung CN fällt; in dieſer Lage nun läßt man den Hacken B in die Kette AN eingreifen, ſo daß ſie die erhaltene Spannung noch fortbehält, löſet aber nun dagegen den Hacken A aus. Jezt machen die Arbeiter den vorigen Weg zurück von N nemlich nach M, wo wieder der Hacken A ein-, und der Hacken B ausgehängt wird, u. ſ. w. Durch öftere Wiederholung werden nun die Stöcke nicht nur lockerer gemacht, ſondern einer, wo nicht beyde, ſammt den Wurzeln herausgeriſſen.

III. Zuſaz. Das Ruder, die Zange, die Scheere ſind ebenfalls Anwendungen des doppelarmigen Hebels.

IV. Zuſaz. Auf ähnliche Art läßt ſich der einarmigte Hebel anwenden, wenn die Laſt am kürzern, und die Kraft am längern Arm wirket, Beyſpiele ſind, die Hebſtangen, das Druckmeſſer u. ſ. w.

V. Zuſaz. Eben ſo kann der Winkelhebel gebraucht werden, wovon der Ziehhammer, und das Brecheiſen, oder Geisfuß Beyſpiele ſind.

VI. Zuſaz. Je kleiner der Abſtand q der Laſt von der Unterlage, mithin je vortheilhafter die Vorrichtung des Hebels in Beziehung auf Erſparniß der Kraft P iſt, deſto geringer iſt die Höhe, zu welcher die Laſt dadurch gehoben werden kann (Reine Mech. §. 25.); ſoll alſo obiges für Erſparung der Kraft vortheilhafte Verhältniß zwiſchen q und p bleiben, und doch die Laſt Q eine beträchtliche Höhe erreichen, ſo iſt noch eine andere Vorrichtung nothwendig.

§. 121.

Aufgabe. (Fig. 48. b.)

Eine Heblade, das iſt, eine Vorrichtung anzugeben, wodurch man vermittels eines Hebels eine Laſt mit Erſparniß der Kraft zu einer beträchtlichen Höhe erheben kann.

Aufloͤſung.

1. Die Beſtandtheile ſind:

ein vierkantig zugehauener Balken EHFG, aus gutem, z. B. Birkenholz,

ein Hebel AB, wovon der eine Theil CB von Eiſen, der andere AC, der Griff nemlich, von Holz ſeyn kann,

zwey eiſerne Cylinder oder Polzen, wie I, die ſo lang als der Baum dick, und ſo ſtark ſind, daß ſie als Unterlagen eine große Laſt tragen können.

2. In dem Balken, wenn er ſenkrecht ſteht, ſind nun in zwey parallelen verticalen Reihen kreisrunde Oeffnungen, durch welche dieſe Polzen geſteckt werden können, gebohret, ſo, daß immer eine Oeffnung höher als die andere in gleicher Entfernung ſteht, mithin ab = bc = cd u. ſ. w. iſt.

3. Auf der andern Seite des Balkens wird der Länge nach, ſo weit nemlich die gebohrten Oeffnungen von a - z gehen, ein Schliz nr herausgeſtemmet, wodurch die durchbohrten Seitenflächen getrennt werden, und nur noch oben und unten zuſammenhangen; dieſer Schliz muß ſo breit ſeyn, daß der Hebel im ſelbigen ohne Reibung ſich beliebig bewegen läßt.

4. Der Hebel bekömmt für die Unterlage zwey Stellen, die eine in B am Ende, die andere C in der Entfernung zweyer aufeinander folgenden Oeffnungen (Nr. 2.) des Hebebalkens, ſo daß alſo Bc = ab = bc u. ſ. w. iſt. Dieſe Stellen beſtehen in kreisrunden Ausſchnitten zur Aufnahme der Polzen.

5. In der Mitte dieſer Stellen bey D wird durch die kreisrunde Oeffnung ein Haken befeſtiget, womit die Laſt ergriffen werden kann; der Haken muß einwärts gekehrt ſeyn. Durch dieſe Vorrichtung nun läßt ſich

6. eine große Laſt mit Erſparniß der Kraft zur Höhe HE erheben.

Beweis.

8. Stellet man nemlich dieſen Hebbaum aufrecht an die Laſt, daß derſelben die Seite EH zugekehret iſt, bringt den Hebel in den Schliz, ſtecket durch a den einen Polzen, und läßt den Hebel in C darauf ruhen, befeſtiget noch an den Haken D die Laſt, ſo läßt ſich,

8. indem der Arbeiter bey A den längern Hebelsarm AC abwärts zieht, die am kürzern Arm BD befeſtigte Laſt erheben;

9. ſobald der kürzere Arm dadurch in die Stellung kömmt, daß B die Höhe von b erreicht hat, ſo wird durch die Oeffnung b der andere Polzen geſteckt, ſo daß jezt der Hebel in B ſeine Unterlage hat.

10. Nun drückt der Arbeiter in A den Hebel aufwärts, bis er in die Lage bA′ kömmt, mithin wirkt in dieſem Falle am einarmigen Hebel die Kraft am längern Arm BA aufwärts, und erhebt dadurch die am kürzern Arm BD befindliche Laſt ebenfalls.

11. So wie die Stelle C mit c zuſammentrifft, wird durch die Oeffnung c der aus a gezogene Polzen eingeſteckt.

12. Jezt, wenn man den Polzen in b auszieht, iſt alles wie Nr. 8., folglich läßt ſich wieder die Laſt zur weitern Höhe, und durch öftere Wiederholungen des Verfahrens Nr. 8—11. endlich bis zur Höhe EH erheben, und zwar mit Erſparniß der Kraft, da jedesmal die Kraft in größerer Entfernung als die Laſt angebracht iſt.

Zuſaz. Der Landmann bedient ſich dieſer Vorrichtung, wenn er einen gefällten Baum auf ſeinen Wagen zu laden hat; die Höhe der Heblade beträgt gewöhnlich 7—8 baier. Fuß.

§. 122.

§ 122.

Aufgabe (Fig. 49.)

An einer wagrechten Stange, deren Länge = l, und Gewicht = G gegeben iſt, hängt an der Stelle C die gegebene Laſt R, man ſucht die beyden Kräfte P, Q, welche an den Endespuncten A und B mit ihr im Gleichgewichte ſind.

Auflöſung.

1. Man beſtimme den Schwerpunct H der Stange (Reine Mech. IV. Hauptſt. II. Abſch.), ſo iſt dadurch auch BH bekannt.

2. Man ſeze der Kürze wegen BH = g, ſo iſt AH = l - g.

3. Eben ſo iſt für BC = q, AC = l - q.

4. Nun wirket auf die Stange an C die Laſt R, und an H das Gewicht G nach lothrechter Richtung, von jeder vertheilet ſich der Druck auf die beyden Ende der Stange;

5. bezeichnet nemlich in Beziehung auf das Gewicht G, die Größe a′ den auf A, und b′ jenen auf B treffenden Antheil des Druckes, ſo iſt

6. $a' + b' = G$, und
$a' : b' = g : l-g$ (Reine Mech. §. 16. IV. Zuſ),
mithin

7. $b' = G - a'$, und daher
$a' : (G - a') = g : l-g$,
$a'l - a'g = G.g - a'.g$, alſo

8. $a' = \frac{G.g}{l}$.

9. Eben ſo in Beziehung der Laſt R, wenn a den auf A, und b jenen auf B treffenden Antheil des Druckes bezeichnen, iſt

10. $a + b = R$, und $b = R - a$

$a : b = q : l - q$, mithin

$a : (R - a) = q : (l - q)$

$al - aq = Rq - aq$, alſo

11. $a = \frac{Rq}{l}$, folglich

12. $P = a + a' = \frac{R.q + G.g}{l}$ (Nr. 8 und 11.)

13. $Q = b + b' = R + G - (a + a')$ (Nr. 6 u. 10.)

$$= R + G - \frac{Rq + G.g}{l}$$

$$= \frac{Rl + Gl - Rq - G.g}{l}$$

$$= \frac{R(l-q) + G(l-g)}{l}.$$

I. Zuſaz. Die Kraft P an A darf alſo, für eine gegebene Laſt R und beſtimmtes Gewicht G der Stange, um ſo kleiner ſeyn, je länger die Stange iſt, und je näher die Laſt R und der Schwerpunct H der andern Stelle B iſt (Nr. 12.).

II. Zuſaz. Gewöhnlich iſt das Gewicht G der Stange in Beziehung auf die Laſt R ſo unbedeutend, daß man ſolches auſſer Acht laſſen, und daher

$P = \frac{R.q}{l}$, und $Q = \frac{R(l-q)}{l}$ ſezen kann.

II. Abſchnitt.

Von der Wage.

§. 123.

Erklärungen.

a. Ein Werkzeug, welches dienet, das Gewicht eines Körpers anzugeben, heißt eine Wage;

b. beſteht ſie nun aus einem Hebel, wo das unbekannte Gewicht des Körpers vermittels eines Gegengewichtes, welches demſelben das Gleichgewicht hält, beſtimmt wird, so heißt ſie

α. die gemeine Wage (Bilanx), wenn das unbekannte Gewicht im Zuſtande des Gleichgewichtes dem gebrauchten Gegengewichte gleich ſeyn ſoll;

β. die Schnellwage (Statera romana), wenn das Gegengewicht mit dem geſuchten Gewichte des Körpers nicht einerlei Größe haben ſoll.

Zuſaz. Bey der gemeinen Wage muß daher der Hebel gleicharmig ſeyn, und die Unterlage in die Directionslinie des Schwerpunctes fallen (§. 119. VIII. Zuſ.); zur Schnellwage gehört ein ungleicharmiger Hebel.

§. 124.

Beſchreibung der gemeinen Wage. (Fig. 50.)

Die Beſtandtheile einer gemeinen Wage ſind:

a. ein phyſiſcher Hebel AB, der Wagbalken (Scapus jugum), deſſen Schwerpunct genau in die Mitte fällt,

b. eine auf dem Wagbalken in der Mitte ſenk⸗recht ſtehende Spize oder Nadel CF, die Zunge (index, lingula),

c. zwey in der Mitte des Wagbalkens hervorra⸗gende Zapfen oder Polzen, die ſich auf der untern Seite in abgeſchärfte Kanten, wie Keile, enden, ſie heiſſen zuſammen die Axe,

d. zwey Blätter, zwiſchen welchen die Zunge ſpielt, und in deren unten angebrachten runden Oeff⸗nungen der Wagbalken mit der Axe ruhet, ſo wie oben durch einen angebrachten Haken die ganze Wag getragen wird, dieſer Theil heißt die Gabel oder Scheere (trutina),

e. endlich die beyden Wagſchalen (lances) ſammt den Schnüren, oder Ketten, womit ſie am Wagbalken befeſtiget ſind.

§. 125.

Erklärungen.

a. Die gemeine Wage iſt ächt, wenn der Wag⸗balken bey eingelegten gleichen Gewichten in beyde Wagſchalen genau wagrecht, alſo die Zunge lothrecht ſteht, und bey ungleichen Gewichten ſeine wagrechte Stellung verläßt; im Gegentheile iſt ſie falſch.

b. Sie iſt empfindlich und gut, wenn ſie bey geringer Ungleichheit der Gewichte ſich neigt, oder, wie man ſagt, einen Ausſchlag giebt; und wenn dieſer Ausſchlag der Größe der Ueberwucht proportio⸗nirt iſt, im Gegentheile iſt ſie träg und ſchlecht.

I. Zuſaz. Bey einer ächten gemeinen Wage muß der Schwerpunct G (Fig. 51.) des Wagbalkens genau in die Mitte der geraden Linie AB fallen, welche die

beyden Aufhängpuncte verbindet, denn der Ruhepunck muß in der Directionslinie des Schwerpunctes fallen, und die Arme gleich lang ſeyn (§. 123. Zuſ.).

II. Zuſaz. Fällt daher der Schwerpunct nicht in die Mitte, und halten die leeren Schalen doch einander das Gleichgewicht, ſo müſſen ſie ungleich ſchwer ſeyn, dieſer Fehler läßt ſich daher durch Verwechslung der Schalen leicht entdecken.

§. 126.

Aufgabe. (Fig. 50.)

Vermittels einer falſchen Wage, deren Arme ungleich ſind, das wahre Gewicht eines Körpers zu ſuchen.

I. Auflöſung.

1. Man ſeze das geſuchte Gewicht des Körpers $= x$.

2. Nun lege man den Körper in die Schale E; und bringe durch ein Gegengewicht P in der Schale D, den Hebel in's Gleichgewicht;

3. da die leeren Schalen anfänglich im Gleichgewichte ſtanden, ſo fällt die Unterlage in die Directionslinie der Schwere des Wagbalkens ſammt den Schalen, mithin wird

4. $P : x = BC : AC$ (§. 119. II. Zuſ.)

5. Jezt nehme man das Gewicht P aus der Schale D, bringe dafür den Körper in dieſe Schale, und lege in die andere Schale E das Gegengewicht Q, welches mit dem Körper im Gleichgewicht ſteht, ſo iſt dann

6. $x : Q = BC : AC$, alſo nach Nr. 4.

7. $P : x = x : Q$

$x^2 = PQ$, und

8. $x = \sqrt{PQ}$ das geſuchte Gewicht.

II. Aufløſung.

9. Man lege den Körper in die Schale E, und ſeze ſolchen durch ein Gegengewicht P in der anderen Schale D in's Gleichgewicht;

10. Nun laſſe man das Gewicht P in der Schale D unverändert, nehme aber den Körper aus der Schale E, und lege dafür ſo lange Gewichte zu, bis das Gleichgewicht hergeſtellet iſt, ſo iſt

11. dieſe zugelegte Summe, z. B. Q das geſuchte Gewicht x des Körpers.

12. Denn $P : x = BC : AC$ (Nr. 9.)
$P : Q = BC : AC$ (Nr. 10.), mithin
$P : x = P : Q$, alſo

13. $x = Q$.

§. 127.

Lehrſaz. (Fig. 51.)

Bey einer gemeinen guten Wage muß die Unterlage ſo angebracht ſeyn, daß der Ruhepunct C oberhalb dem Schwerpuncte G des Wagbalkens in die Directionslinie fällt.

Beweis.

1. Da bey der gemeinen ächten Wage der Schwerpunct des Wagbalkens G genau in der Mitte der zwiſchen den Aufhängpuncten gezogenen geraden Linie AB, und der Ruhepunct in der Directionslinie dieſes Schwerpunctes liegt (§. 125. I. Zuſ.), ſo fällt

2. bey gleichen Schalen, und in dieſelben gleich eingelegten Gewichten, der Schwerpunct derſelben immer mit G zuſammen (Reine Mech. §. 20. II. Zuſ.), ſind hingegen

3. die eingelegten Gewichte ungleich, ſo fällt der gemeinſame Schwerpunct auf die Seite des größern eingelegten Gewichtes, z. B. in g.

4. Würde nun die Unterlage ſo angebracht, daß der Ruhepunct C mit dem Schwerpuncte G zuſammenfällt, ſo iſt bey eingelegten gleichen Gewichten in die Schalen der gemeinſchaftliche Schwerpunct jedesmal unterſtüzet (Nr. 2), mithin würde der Wagbalken nicht nur in wagrechter, ſondern jeder andern geneigten Lage ruhen;

5. Bey ungleichen Gewichten würde der Hebel nicht ruhen, bis der in g fallende Schwerpunct (Nr. 3.) ſenkrecht unter G zu liegen käme, mithin die Linie G g, alſo auch AB vertical würde, ſo daß nun die Wage gänzlich umſchlagen mußte, beydes aber iſt gegen die Foderung §. 125.

6. Würde hingegen die Unterlage ſo angebracht, daß der Ruhepunct vertical unter dem Schwerpuncte G zu liegen käme, ſo würde die Wage ebenfalls bey der mindeſten Ungleichheit der Gewichte, ja ſelbſt bey gleichen Gewichten, ſobald G aus der verticalen Lage über C durch eine Erſchütterung gebracht würde, gänzlich umſchlagen (Reine Mech. §. 123. II. Zuſ.).

7. Wird nun aber die Unterlage ſo angebracht, daß der Ruhepunct ſenkrecht über dem Schwerpuncte G zu liegen kömmt, ſo ruhet die Wage nur bey der horizontalen Lage des Wagbalkens, denn nur bey dieſer Lage fällt G ſenkrecht unter C und iſt unterſtüzet.

8. Bey ungleichen Gewichten wird endlich der Schwerpunct g ebenfalls ſinken, bis er lothrecht unter C zu ſtehen kömmt, dadurch ſchlägt aber der Wagbal-

ken nicht gänzlich um, ſondern neigt ſich nur um den Winkel gCG, wodurch alſo den Foderungen §. 125. ein Genüge geſchieht.

I. Zuſaz. Da man ſich an der Wage drey Gewichte vorſtellen kann, nemlich das Gewicht des Wagbalkens und der Schalen zuſammen = W im Schwerpuncte G, ferner das Gewicht P in A, und Q an B; ſo iſt bey Ungleichheit der Gewichte oder für $P > Q$ die Entfernung $Gg = \frac{P.AG - Q.BG}{P+Q+W}$ (Reine Mech. §. 22. I. Zuſ.), und da $AG = BG$ (§. 125. I. Zuſ.), ſo iſt

$$Gg = \frac{AG\,(P-Q)}{P+Q+W}$$

II. Zuſaz. Nimmt in dieſer lezten Gleichung P zu, während Q und W ſowohl als AG unverändert bleiben, ſo nimmt der Zähler in einem weit merklichern Verhältniſſe als der Nenner zu, mithin je gröſſer die Ungleichheit der Gewichte iſt, deſto gröſſer wird Gg.

III. Zuſaz. Im rechtwinklichten Dreyecke CGg iſt nun $CG : gG = 1 : \text{tang. } gCG$, mithin $\text{tang. } gCG = \frac{gG}{CG}$, das iſt, die Tangens des Ausſchlagwinkels, alſo auch der Ausſchlag, iſt um ſo gröſſer, je gröſſer gG, mithin je gröſſer die Ungleichheit der Gewichte (II. Zuſ.), und je kleiner CG, alſo je kleiner die Entfernung des Ruhepunctes C vom Schwerpuncte iſt.

IV. Zuſaz. Soll alſo eine Wage, wie z. B. die Probierwage ſehr empfindlich ſeyn, ſo muß der Ruhepunct C dem Schwerpuncte G ſo nahe als möglich gebracht werden.

§. 128.

Lehrſatz. (Fig. 50.)

Soll die Wage empfindlich und gut ſeyn, ſo muß der Polzen prismatiſch ſeyn, und mit einer Seite oder Kante in der Scheere ruhen.

Beweis.

1. Wenn $P = Q$ die beyden eingelegten Gewichte, W hingegen das Gewicht des Wagbalkens ſammt den Schalen und Schnüren bezeichnen, ſo wird

2. die Axe auf die Pfannen mit einer Gewalt $P + Q + W = 2P + W$ gedrückt, und dadurch eine Reibung verurſacht.

3. Bezeichnet nun λ den Reibungscoefficienten bey umdrehender Bewegung (III. Hauptſt. III. Abſchn.), ferner x das Gewicht, welches zur Ueberwindung der Reibung in eine der beyden Schalen zugelegt werden muß, ſo iſt die dadurch verurſachte Reibung

4. $F = \lambda\,(2P + W + x)$.

5. Bezeichnet r den Halbmeſſer des Polzens, und R die Länge des halben Wagbalkens, ſo iſt

6. Das Moment der Reibung am Umfange des Polzens $= \lambda\,(2P + W + x)\,r$, und

7. Das Moment des in die Schale zugelegten Gewichtes $x.\,R$.

8. Soll nun lezteres der Reibung das Gleichgewicht halten, ſo wird

$$x.\,R = \lambda\,(2P + W)\,r + x.\,\lambda\,r$$

$$x\,(R - \lambda\,r) = \lambda\,(2P + W)\,r\text{, und}$$

9. $x = \dfrac{\lambda\,(2P + W)}{R - \lambda\,r}\,.\,r.$

10. Das zur Hebung der Reibung erfoderliche Gewicht x darf alſo um ſo kleiner ſeyn, je kleiner der Halbmeſſer r des Polzens, in Beziehung auf die Länge R eines Arms der Wage iſt.

10. Soll daher die Wage ſehr empfindlich ſeyn, ſo muß r in Beziehung auf R verſchwinden, mithin der Polzen die Form eines Keils oder Prisma haben, welches in C auf einer Kante oder Schneide ruhet.

Zuſaz. Daß alſo der Polzen ſowohl, als die Pfannen von einem äuſſerſt harten Metall, z. B. von Stahl ſeyn müſſen, leichtet für ſich ein.

Anmerk. In Lichtenbergs Magazin für das Neueſte aus der Phyſik und Naturgeſchichte, IX. Bands drittem Stücke, iſt die Beſchreibung einer ſehr vollkommenen Schalenwage, nebſt einigen damit angeſtellten Verſuchen von Prof. Schmidt enthalten, nach welcher Hr. Liebherr zu Landshut für's phyſikaliſche und chemiſche Kabinet Exemplare verfertiget hat, die dem Künſtler Ehre machen.

§. 129.

Beſchreibung. (Fig. 52.)

Die Beſtandtheile einer Schnellwage (§. 123. β.) ſind:

a. Der Wagbalken AB, mit den ungleichen Armen CA, CB, manchmal befindet ſich auf demſelben zur Beurtheilung der horizontalen Lage eine Zunge, manchmal wird aber dieſe Lage nach dem Augenmaaße beſtimmet, oder dazu eine Sezwage gebraucht.

b. Eine Waagſchale E am kürzern Arm, oder eine andere Vorrichtung zur Aufnahme der Laſt.

c. Ein Gewicht P, welches ſich am längern Arm nach Belieben verſchieben läßt, und daher der Läufer heißt.

d. Auf beyden Seiten des Wagbalkens in C hervorſtehende Polzen, womit die Wage in die Pfannen einer Scheere oder Gabel eingreiffet, ſo daß nun an einem Haken in K die ganze Wage beſeſtiget werden kann.

I. Zuſaz. Da dieſe Wage bey den Arabern, welche ſie vielfältig gebrauchen, wegen dem Läufer, der bey ihnen die Form eines Granatapfels hat, und Romann heißt, die Benennung Romana hat, ſo bekam ſie auch vermuthlich den Namen Statera Romana. (§. 123. *β*.)

II. Zuſaz. Gewöhnlich wird die Schnellwage ſo gebauet, daß der längere Arm CA für ſich ſchon, alſo ohne Läufer, den kürzern Arm BC nebſt der daran beſindlichen Schale E, oder übrigen zur Feſthaltung der Laſt nothwendigen Vorrichtungen das Gleichgewicht hält, oder, wie man ſich ausdrückt, der lange Arm iſt auf den kürzern äquirt; in dieſem Falle liegt der Ruhepunct C ebenfalls wie §. 127. ſenkrecht über dem Schwerpunct der unbelaſteten Waage.

III. Zuſaz. Es mag die Schnellwage äquirt ſeyn oder nicht, ſo muß, der Reibung wegen, die Axe des Wagbalkens eine prismatiſche Form haben, und mit einer Kante aufliegen.

IV. Zuſaz. Bey der aequirten Schnellwage iſt für den Zuſtand des Gleichgewichtes, wenn P das Gewicht des Läufers, Q jenes der Laſt, und p, q ihre Entfernungen vom Ruhepuncte C bezeichnen $p.P = q.Q$ (§. 119. II. Zuſ.), mithin $p = \frac{q.Q}{P}$; ſo daß ſich bey der einmal bekannten Länge q des kürzern Arms, dem bekannten Gewichte P des Läufers, für jede gegebene

Laſt Q der Abſtand p des Läufers auf den längern Arm für den Zuſtand des Gleichgewichtes berechnen, mithin eine Scale verfertigen, und zum Gebrauche auf den längern Arm auftragen läßt.

§. 130.

Aufgabe. (Fig. 52.)

Bey einer Schnellwage, deren Arme nicht aufeinander aequirt ſind, die Abtheilung für den Läufer, deſſen Gewicht P gegeben iſt, auf den größern Arm anzugeben.

Auflöſung.

1. Da bey einer nicht aequirten Schnellwaage der kürzere Arm ſammt der Schale und den übrigen zur Feſthaltung der Laſt nothwendigen Vorrichtungen, z. B. Haken, Ketten, dem längern Arm, ohne den Läufer P, das Gleichgewicht nicht hält, ſondern der Schwerpunct auf die Seite des längern Arms fällt, ſo lege man

2. in die Schale E ſo lange Gewichte ein, bis ihre Summe R das Gleichgewicht herſtellet.

3. Bezeichnet nun G das Gewicht des Waagbalkens ſammt der Schale E, ferner bezeichnet g den Abſtand des Schwerpunctes, q die Länge des Arms BC, ſo iſt

4. $Rq = G.g$

5. Jezt trage man auf einer geraden Linie MN von M aus die Länge $q = BC$ ſo oft auf, als es angeht, ſo daß $M1 = q$; $M2 = 2q$, $M3 = 3q$, und überhaupt $Mn = nq$ iſt.

6. Ferner berechne man zu P, R, q die vierte geometriſche Proportionalzahl, oder $\frac{Rq}{P}$.

7. Dieſe Länge verzeichne man ebenfalls von M aus, ſo daß $Mc = \frac{R.q}{P}$ iſt.

8. Nun trage man endlich auf dem längern Arm CA des Waagbalkens von C aus die Längen: c2, c3, c4, c5 u. ſ. f. auf, ſo iſt dadurch die geſuchte Abtheilung fertig, das iſt, der Läufer P wird an der Stelle 2 einer Laſt $Q = 2P$, an der Stelle 5 einer Laſt $Q = 5P$, und überhaupt an der Stelle n einer Laſt $Q = nP$ das Gleichgewicht halten.

Beweis.

9. Gemäß der Construction Nr. 5-8 iſt

$$C2 = M2 - Mc = 2q - \frac{Rq}{P}$$

$$C3 = M3 - Mc = 3q - \frac{Rq}{P}$$

$$C4 = M4 - Mc = 4q - \frac{Rq}{P}$$

$$C5 = M5 - Mc = 5q - \frac{Rq}{P}$$

$$Cn = Mn - MC = nq - \frac{Rq}{P}$$

10. Hält nun der Läufer P in der Entfernung p einer Laſt Q das Gleichgewicht, ſo iſt:

$$Pp + Gg = Q.q \text{ (§. 119.), oder}$$

$$Pp + Rq = Q.q \text{ (Nr. 4.)}$$

11. Iſt alſo z. B. $Q = 5P$, ſo wird

$$Pp + Rq = 5P.q$$

$$p = \frac{5P.q}{P} - \frac{Rq}{P}$$

$$= 5q - \frac{Rq}{P} = C5:$$

das iſt, an der Stelle 5 hält P mit einer fünfmal größern Laſt Q das Gleichgewicht.

12. Eben ſo iſt für $Q = nP$

$$p = \frac{nP.q}{P} - \frac{Rq}{P} = nq - \frac{Rq}{P} = Cn$$

folglich hält an der Stelle n der Läufer P einer Laſt $Q = nP$ das Gleichgewicht.

I. Zuſaz. Wenn alſo bey einer gehörig eingetheilten Schnellwage das Gewicht P des Läufers bekannt iſt, ſo kann man dadurch das Gewicht Q einer Laſt beſtimmen, indem man den Läufer bis an jene Stelle ſchiebt, wo er mit der Laſt im Gewichte iſt, alſo der Hebel ſeine wagrechte Lage behält. In dieſer Lage giebt nun die treffende Zahl, wo der Läufer ſteht, an, um wie viel Q größer als P iſt, z. B. wenn $P = 1$ ℔., und P bey der Abtheilung 5 mit Q das Gleichgewicht hält, ſo iſt $Q = 5P = 5$ ℔.

II. Zuſaz. Theilet man einen jeden Zwiſchenraum abermal in gleiche Theile, ſo läßt ſich das Gewicht einer Laſt Q um ſo genauer mittels der Wage beſtimmen, z. B., wenn man den Raum von einer Abtheilung bis zur nächſtfolgenden in vier gleiche Theile theilet, ſo giebt die Waage das Gewicht der Laſt Q bis auf den 4ten Theil des Gewichtes des Läufers P, hält nemlich der Läufer an der Stelle zwiſchen 5 und 6 bey der 3ten Abtheilung mit einer Laſt Q das Gleichgewicht, ſo iſt

$$p = (5 + \tfrac{3}{4})\, q - \frac{Rq}{P} \text{ (ex construct.)}$$

$$= \frac{Qq}{P} - \frac{Rq}{P} \text{ (Nr. 10.), mithin}$$

$$\frac{Qq}{P} - \frac{Rq}{P} = (5 + \tfrac{3}{4})\, q - \frac{Rq}{P}$$

$$\frac{Q}{P} = 5 + \tfrac{3}{4}, \text{ folglich}$$

$$Q = (5 + \tfrac{3}{4})\, P.$$

III. Zuſaz. Bey der Schnellwage braucht man für jede Laſt Q zu ihrem Gleichgewicht nur immer eben daſſelbe Gewicht P des Läufers, während man bey der gemeinen Waage für jede Laſt, ein eben ſo ſchweres Gegengewicht bey der Hand haben muß, ſo daß in dieſer Beziehung die Schnellwage bequemer als die gemeine Wage iſt.

IV. Zuſaz. So wie bey der bisher beſchriebenen Schnellwage durch Verſchiebung des Läufers P auf dem längern Hebelsarm verſchiedener Laſten ihr Gewicht ſich beſtimmen läßt, ſo könnte eben dieſes dadurch geſchehen, wenn das Gewicht P ſeine beſtimmte Stelle jedesmal behalten, dagegen die Stelle der Unterlage verſchoben würde.

Anmerk. Andere Arten von Waagen, z. B. mittels elaſtiſcher Federn, gehören nicht hieher.

III. Abſchnitt.

Von der Walze.

§. 131.

Aufgabe. (Fig. 53.)

Eine ſenkrechte Walze liegt auf einer ſchiefen Ebene ſo, daß ihre geometriſche Axe auf der Neigungsebene BAC ſenkrecht ſteht, man ſucht ihr Verhalten, wenn ſie ſich ſelbſt überlaſſen wird, ferner das Gewicht der Walze P, die Länge der Walze a, der Halbmeſſer ihrer Grundflächen b, und die Neigung der ſchiefen Ebene α gegeben ſind.

Auflöſung.

1. Die Figur ſtellet einen durch den Schwerpunct G auf der Axe ſenkrechten Querſchnitt der Walze und ſchiefen Ebene vor.

2. Ferner bezeichnet BD den Weg, welchen die Walze während der Zeit t hinterlegt hat, und D die Stelle, wo ſie nun die ſchiefe Ebene berührt.

3. Zieht man ferner durch G die verticale GL, zu BA die parallele Ga, und auf BA die ſenkrechte Linie GD, ſo ſteht aG auf GD durch G ſenkrecht, nd alle dieſe Linien liegen in der Neigungsebene, auf

welcher die geometriſche Axe der Walze ſenkrecht ſteht, (per hyp.) ſo daß alſo aG, GD zwey freye, oder Hauptaxen der Walze ſind (Reine Mech. §. 214. IV. Zuſ.).

4. Nimmt man nun BA zur Abſciſſenlinie, ſo iſt für den Schwerpunct G, BD = x die Abſciſſe, DG = y die Ordinate am Ende der Zeit t.

5. Am Schwerpunct G wirkt die Kraft P sin. α nach der Richtung Ga zu BA parallel, und

6. die Kraft P cos. α nach der Richtung GD (Reine Mech. §. 154.)

7. Durch leztere Kraft wird die Walze gegen die ſchiefe Ebene gedrückt, wogegen die Ebene durch ihre Feſtigkeit einen eben ſo großen Gegendruck nach der Richtung DG entgegenſezet, man bezeichne ſolchen mit Q.

8. Eben durch dieſen Druck gegen die ſchiefe Ebene entſteht bey D eine Reibung R, welche ſich gegen die Bewegung ſtemmt, mithin die Richtung DB hat, und vom Mittelpuncte, alſo von der geometriſchen Axe der Walze um den Halbmeſſer b entfernt iſt.

9. Dieſe Reibung wirket nun in Beziehung auf die fortſchreitende Bewegung der Walze eben ſo, als wenn ſie unmittelbar am Schwerpuncte G nach der Richtung Ga′ angebracht wäre, nur erzeugt ſie über- dieſes eine drehende Bewegung um die geometriſche Axe. (Reine Mechan. §. 226. III. Zuſ.)

10. Da nun die ſämmtlichen Richtungen dieſer Kräfte in der Axenebene aGD liegen, ſo wirket am Schwerpuncte G

nach der zur Abſciſſenlinie BA parallelen Richtung Ga
die Kraft: P sin. α − R (Nr. 5, 8 und 9.)

nach der Richtung der Ordinate DG die Kraft:
Q − P cos. α (Nr. 6 und 7.).

11. End-

11. Endlich bey D in der Entfernung b von der geometriſchen alſo Hauptaxe der Walze, die Kraft R (Nr. 9.), es verhält ſich daher alles wie in der reinen Mechan. §. 227. Zuſ., mithin wird

12. $$d^2 x = \frac{2gdt^2}{p}(P\sin.\alpha - R)$$

$$d^2 y = \frac{2gdt^2}{p}(Q - P\cos.\alpha)$$

$$d\gamma = \frac{2gbRdt}{k^2 p}$$

wo in dieſer lezten Gleichung $k^2 p$ das Moment der Trägheit der Walze für die geometriſche Axe, und γ die am Ende der Zeit t erlangte Winkelgeſchwindigkeit bezeichnen (Reine Mech. §. 169 und §. 177.).

13. Da die Ordinate y ſtets dem Halbmeſſer b gleich, alſo eine beſtändige Größe iſt, ſo iſt auch dy, und dadurch $d^2y = 0$, mithin

$$d^2 y = \frac{2gdt^2}{P}(Q - P\cos.\alpha) = 0, \text{ folglich}$$

$Q = P\cos.\alpha$, das iſt: der Druck der Walze Q (N. 7.) gegen die ſchiefe Ebene bleibt immer der Kraft $P\cos\alpha$ gleich, und iſt von der Geſchwindigkeit unabhängig.

14. Bezeichnet v die Geſchwindigkeit, welche der Schwerpunct der Walze am Ende der Zeit t nach der Richtung Ga erhält, ſo iſt $dx = vdt$ (Reine Mech. §. 38.), mithin $d^2x = dvdt$, folglich

15. $$dvdt = \frac{2gdt^2}{P}(P\sin.\alpha - R) \text{ (Nr. 12.) und}$$

$$dv = \frac{2gdt}{P}(P\sin.\alpha - R)$$

16. Der Punct D hat nun nach der Richtung BA die dem Schwerpuncte, alſo der ganzen Kugel gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit v, und durch die umdrehende Bewegung (Nr. 9.) nach der entgegengeſezten Richtung AB die Geſchwindigkeit $b\gamma$, mithin iſt die wahre Geſchwindigkeit dieſes Punctes $= v - b\gamma$.

17. Die Reibung R wirkt nur als Hinderniß der Bewegung §. 56. I Zuſ., bringt nie ſelbſt Bewegung hervor, ſie verhindert nur das Herabgleiten des Punctes D, und bewirkt nur dadurch eine Umdrehung der Walze um ihre geometriſche Axe, mithin kann auch nie $b\gamma$ größer als v, alſo $v - b\gamma$ nie negativ ſeyn, folglich muß ſtets entweder

18. $v > b\gamma$, oder

19. $v = b\gamma$ ſeyn.

20. Im erſtern Falle iſt nun auch

$$dv > b\,d\gamma, \text{ mithin}$$

$$\frac{2g\,dt}{P}(P\sin.\alpha - R) > \frac{2g\,dt}{k^2P}.\,b^2R \;(\text{N. 12 u. 15.})$$

$$P\sin.\alpha - R > \frac{b^2}{k^2}R$$

$$P\sin.\alpha > R\left(1+\frac{b^2}{k^2}\right)$$

21. Sobald die Kraft $P\sin.\alpha$ (Nr. 5.) der Reibung das Gleichgewicht hält, oder ſie überwältiget, mithin eine Bewegung entſteht, ſo wird für die wälzende Bewegung $R = \frac{\varrho}{b} P\cos.\alpha$ (§. 78. V. Zuſ.), ſezet man nun dieſen Werth in den lezten Ausdruck Nr. 20., ſo wird

22. $P \sin. \alpha > \frac{\varrho}{b} P \cos. \alpha \left\{1 + \frac{b^2}{k^2}\right\}$

$$\sin. \alpha > \frac{\varrho}{b} \cos. \alpha \left\{1 + \frac{b^2}{k^2}\right\}$$ mithin

23. $\frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha} = \text{tang.}\, \alpha > \frac{\varrho}{b} \left\{1 + \frac{b^2}{k^2}\right\}$

24. $dv = \frac{2gdt}{P} \left[P \sin. \alpha - \frac{\varrho}{b} P \cos. \alpha\right]$ (Nr. 15.)

$$= 2gdt \left(\sin. \alpha - \frac{\varrho}{b} \cos. \alpha\right)$$

25. $d\gamma = \frac{2gbdt}{k^2 P} \cdot \frac{\varrho}{b} P \cos. \alpha$ (Nr. 12.)

$$= \frac{2g\varrho \cos. \alpha\, dt}{k^2}$$

26. Iſt nun die Reibung von der Geſchwindigkeit unabhängig, alſo der Reibungscoefficient $\frac{\varrho}{b}$ bey einer gegebenen Walze eine beſtändige Größe, ſo wird für den Fall, wo $\text{tang.}\, \alpha > \frac{\varrho}{b} \left(1 + \frac{b^2}{k^2}\right)$ (Nr. 23.)

27. $v = 2gt \left(\sin. \alpha - \frac{\varrho}{b} \cos. \alpha\right)$

$$dx = vdt = 2gtdt \left(\sin. \alpha - \frac{\varrho}{b} \cos. \alpha\right);$$ mithin

$$x = gt^2 \left(\sin. \alpha - \frac{\varrho}{b} \cos. \alpha\right)$$

$$\gamma = \frac{2g\varrho \cos. \alpha\, t}{k^2}$$

28. In dieſem Falle erhält alſo die Walze eine rollende beſchleunigte Bewegung, wo aber die Geſchwindigkeit v, mithin auch der längſt der ſchiefen Ebene abwärts hinterlegte Weg durch die Reibung vermindert wird.

29. Wenn hingegen $\tang.\alpha = \frac{\varrho}{b}\left(1 + \frac{b^2}{k^2}\right)$ ſo kann v nicht größer als $b\gamma$ (Nr. 20-23.) ſeyn, da ferner v nie kleiner als $b\gamma$ werden kann (Nr. 17.), ſo muß $v = b\gamma$, mithin $dv = bd\gamma$ ſeyn; in dieſem Falle iſt nun

30. $$P\sin.\alpha = R\left(1 + \frac{b^2}{k^2}\right) \text{(Nr. 20.)} = R\left(\frac{k^2+b^2}{k^2}\right)$$

alſo $R = \frac{k^2 P\sin.\alpha}{k^2+b^2}$

Sezet man dieſen Werth in die Gleichungen Nr. 12 und 15., ſo wird

31. $$d\gamma = \frac{2gbdt}{k^2 P} \cdot \frac{k^2 P\sin.\alpha}{k^2+b^2} = \frac{2gbdt\sin.\alpha}{k^2+b^2}, \text{ alſo}$$

$$\gamma = \frac{2gbt\sin.\alpha}{k^2+b^2}$$

$$dv = \frac{2gdt}{P}\left(P\sin.\alpha - \frac{k^2 P\sin.\alpha}{k^2+b^2}\right)$$

$$= 2gdt\sin.\alpha\left(1 - \frac{k^2}{k^2+b^2}\right) = 2gdt\sin.\alpha\frac{b^2}{k^2+b^2}$$

$$v = \frac{2gb^2 t\sin.\alpha}{k^2+b^2}$$

$$dx = v\,dt = \frac{2gb^2 t\,dt\sin.\alpha}{k^2+b^2}, \text{ alſo}$$

$$x = \frac{gb^2 t^2\sin.\alpha}{k^2+b^2}, \text{ folglich}$$

32. wenn $\tang.\alpha = \frac{\varrho}{b}\left(1 + \frac{b^2}{k^2}\right)$ ſo bekömmt die Walze wieder eine beſchleunigte rollende Bewegung, wo die Geſchwindigkeit von der Reibung unabhängig iſt.

33. Durch Nr. 13, 27 und 31 iſt endlich die ganze Aufgabe aufgelöſet.

I. Zuſaz. Dieſe Auflöſung gilt ebenfalls für eine Kugel, ſo wie für jedes Sphäroid, welches durch die Ebene GLD in zwey congruente Hälften getheilet wird, nur muß allemal das entſprechende Moment der Trägheit geſezt werden, für eine Kugel iſt nun, wenn b ihren Halbmeſſer bezeichnet

$k^2 P = \frac{2}{5} b^2 P$ (Reine Mech. §. 187. V. Zuſ.), mithin $k^2 = \frac{2}{5} b^2$.

Bey der Kugel iſt daher für $\text{tang.}\ \alpha > \frac{\varrho}{b}(1 + \frac{b^2}{k^2})$ (Nr. 23.), das iſt, für $\text{tang.}\ \alpha > \frac{7\varrho}{2b}$

$$v = 2gt\ (\sin.\ \alpha - \frac{\varrho}{b} \cos.\ \alpha)$$

$$x = gt^2\ (\sin.\ \alpha - \frac{\varrho}{b} \cos.\ \alpha)$$

$$\gamma = \frac{5 g \varrho t \cos.\ \alpha}{b^2} \text{ (Nr. 27.).}$$

Für $\text{tang} = \frac{7\varrho}{2b}$ wird hingegen Nr. 31:

$$\gamma = \frac{10\ gt \sin.\ \alpha}{7\ \ b};\ v = \frac{10}{7}\ gt \sin.\alpha;\ x = \frac{5}{7}\ gt^2 \sin.\alpha$$

II. Zuſaz. Bey der ſenkrechten Walze iſt für die geometriſche Axe das Moment der Trägheit $k^2 P = \frac{1}{2} b^2 P$ (Reine Mech. §. 181. Zuſ.), mithin

für $\text{tang.}\ \alpha > \frac{\varrho}{b}\ (1 + \frac{b^2}{k^2})$ (Nr. 23.), das iſt

für $\text{tang.}\ \alpha > 3 \frac{\varrho}{b}$ wird Nr. 27.

$$v = 2gt\ \ (\sin.\ \alpha - \frac{\varrho}{b} \cos.\ \alpha)$$

$$x = gt^2\ \ (\sin.\ \alpha - \frac{\varrho}{b} \cos.\ \alpha)$$

$$\gamma = \frac{4 g \varrho t \cos.\ \alpha}{b^2}$$

Für tang. $\alpha = 3 \frac{\varrho}{b}$ wird Nr. 31.

$$\gamma = \frac{4\,g\,t\,\sin.\alpha}{3\,b}$$

$$v = \tfrac{4}{3}\,g\,t\,\sin.\alpha$$

$$x = \tfrac{2}{3}\,g\,t^2 \sin.\alpha\,.$$

§. 132.

Aufgabe. (Fig. 53.)

Es iſt alles, wie im vorhergehenden §., man ſuchet die Größe der Kraft V, welche am Schwerpuncte G der Walze nach der zu ſchiefen Ebene AB parallelen Richtung Ga′ angebracht, die Walze in Ruhe ſo erhält, daß bey der mindeſten Vermehrung dieſer Kraft eine Bewegung der Walze längſt der ſchiefen Ebene aufwärts erfolgt.

Auflöſung.

1. Am Schwerpuncte G wirkt nach der Richtung Ga die Kraft P sin. α, und

2. nach eben dieſer Richtung der von der Reibung herrührende Widerſtand $\frac{\varrho}{b}$ P cos. α (§. 78. V. Zuſ.)

3. Soll nun die Kraft V beyden zuſammen das Gleichgewicht halten, ſo muß

4. $V = P \sin.\alpha + \frac{\varrho}{b} P \cos.\alpha$ ſeyn.

I. **Zuſaz.** Wenn die Kraft V bloß das Herabrollen der Walze längſt der ſchiefen Ebene verhindern ſoll, ſo widerſezet ſich die Reibung ſelbſt dieſer Bewegung, und daher wird in dieſem Falle:

$$V = P \sin.\alpha - \frac{\varrho}{b} P \cos.\alpha$$

II. Zuſaz. Auf ebenem Boden iſt $\alpha = 0$; mithin Nr. 4. $V = \frac{\varrho}{b} P$.

III. Zuſaz. Sezet man, die Walze ſowohl, als die wagrechte Ebene ſey von Ulmholz, ſo iſt $\varrho = 0{,}0294$ (§. 79.), wenn ferner $b = 6$ Pariſer Zoll, und $P = 100$ ℔., ſo würde $V = \frac{0{,}02945}{6}\, 100$ ℔. $= 0{,}491$ ℔.
Läge hingegen ein Prisma von Ulmholz auf dieſer Ebene, ſo iſt ihr Reibungscoefficient:

$\lambda = 0{,}423$ (§. 67. V. Zuſ. d), mithin

$V = \lambda P = 0{,}423 \times 100$ ℔. $= 42{,}3$ ℔.

IV. Zuſaz. Da bey der wälzenden Bewegung die Größe ϱ allemal ſehr gering iſt, und, wenn der Halbmeſſer der Walze b eine beträchtliche Größe hat, der Reibungscoefficient $\frac{\varrho}{b}$ nothwendig ſehr klein, mithin das durch die Reibung eintrettende Hinderniß der Bewegung, oder $\frac{\varrho}{b}$ P ſehr vermindert wird, ſo läßt ſich die Walze als eine zur Bewegung großer Laſten ſehr vortheilhafte Vorrichtung anwenden, und gehört daher zu den einfachen Maſchinen (§. 1. b.).

§. 133.

Aufgabe (Fig. 54.):

Für eine Laſt RF, welche längſt der ſchiefen Ebene aufwärts gebracht werden ſoll, eine Vorrichtung anzugeben, wodurch ſtatt der gleitenden eine wälzende Bewegung entſteht.

Auflöſung.

1. Man nehme drey Walzen von gleichen Durchmeſſern;

2. zwey davon lege man in einiger Entfernung voneinander parallel nach der Queer auf die ſchiefe Ebene, ſo daß ihre Axen auf die Neigungsebene BAC ſenkrecht ſtehen.

3. Auf dieſe beyde Walzen lége man die Laſt,

4. ſchiebt nun bey R, oder zieht an F eine Kraft nach der Richtung FH aufwärts, ſo entſteht

5. bey N und E, wo die Laſt jedesmal auf den Walzen aufliegt, eine Reibung, und da dieſe für die gleitende Bewegung viel ſtärker als für eine wälzende iſt, ſo werden ſich

6. die beyden Walzen unten um O, D, wo ſie die ſchiefe Ebene berühren, drehen, und ſo wird nun oben die Laſt der aufwärts ziehenden Kraft folgen, indem ſie immer an andern Puncten die Walzen be- rühret.

7. Die Mittelpuncte c beyder Walzen bewegen ſich ebenfalls zur ſchiefen Ebene parallel aufwärts, (Reine Mech. §. 226. III. Zuſ.) da aber die Puncte E, N doppelt ſo weit von den Umdrehungspuncten D, O jedesmal entfernt ſind, ſo iſt der von der Laſt hinterlegte Weg allemal doppelt ſo groß, als jener der Walzen, mithin

8. rückt die Laſt auf den Walzen immer vorwärts, oder, was einerley iſt, die Walzen rücken immer mehr gegen das untere Ende R der Laſt zu, bevor alſo je- desmal die untere Walze NO ganz an das Ende ge- langt, muß

9. am obern Ende bey I die dritte Walze der Laſt untergelegt werden, damit leztere ſtets durch 2 Walzen zugleich unterſtüzt bleibt.

I. Zuſaz. Soll die Laſt auf ebenem Boden weiter gebracht werden, ſo bleibt die nemliche Vorrichtung, ſo daß ſtets die Axen der beyden Walzen auf der Verticalebene, in welcher die Richtung der bewegenden Kraft liegt, ſenkrecht ſtehen.

II. Zuſaz. Die beyden untergelegten parallelen Walzen müſſen ſtets in einer ſolchen Entfernung von einander bleiben, daß zwiſchen ihre Axen der Schwerpunct der Laſt fällt, folglich die Laſt durch die beyden Walzen immer unterſtüzt iſt.

III. Zuſaz. Der Druck der Laſt vertheilet ſich auf die beyden Walzen im umgekehrten Verhältniſſe der Entfernungen ihrer Axen vom Schwerpuncte der Laſt. (Reine Mech. §. 16. IV. Zuſ.)

§. 134.

Aufgabe. (Fig. 54.)

Auf der ſchiefen Ebene, deren Neigung α, ruhet auf zwey Walzen, deren Halbmeſſer $= b$, und beyder Gewicht zuſammen $= q$ iſt, die Laſt Q; an der Stelle F zieht die Kraft V nach der Richtung FM, welche die ſchiefe Ebene unter dem Winkel $FMA = \beta$ ſchneidet, man ſucht die Größe der Kraft V, wenn ſie ſo im Gleichgewicht iſt, daß bey ihrer geringſten Vermehrung auf ihrer Seite Ueberwucht vorhanden iſt, mithin eine Bewegung der Laſt Q aufwärts erfolgt.

Auflöſung.

1. Die Laſt Q hat ein Streben $= Q \sin. \alpha$ an den Stellen N, E herabzugleiten, und

2. äuſſert noch gegen eben dieſe Stellen der beyden Walzen zuſammen einen auf die ſchiefe Ebene ſenkrechten Druck $= Q \cos. \alpha$ (Reine Mech. §. 154.).

3. Leztere Druck pflanzet ſich nun auf die Stellen O, D der ſchiefen Ebene fort.

4. Durch das Gewicht q der beyden Walzen erhalten ſie zuſammen ebenfalls ein Streben q sin. α längſt der ſchiefen Ebene abwärts zu gleiten, und

5. äuſſern zuſammen gegen die ſchiefe Ebene an den Stellen O, D einen ſenkrechten Druck $= q \cos. \alpha$.

6. Die an F nach der Richtung FM ziehende Kraft V läßt ſich in eine zur ſchiefen Ebene parallele Seitenkraft nach $FH = V \cos. \beta$, und

7. in die auf die ſchiefe Ebene ſenkrechte nach FI $= V \sin. \beta$ zerlegen.

8. Leztere Kraft vermehret den ſenkrechten Druck der Laſt gegen die Walzen, ſo daß nun ſolcher an den beyden Stellen N, E zuſammen

$= Q \cos. \alpha + V \sin. \beta$ iſt (Nr. 2 und 7.)

9. Da ſich dieſer Druck ferner auf die untere Stellen O und D fortpflanzet, ſo iſt der geſammte ſenkrechte Druck auf die ſchiefe Ebene an dieſen Stellen

$= (Q + q) \cos. \alpha + V \sin. \beta$ (Nr. 5.).

10. Die Laſt müßte, ſobald $V \cos. \beta > Q \sin. \alpha$ (Nr. 1 und 6.) ſeyn würde, nothwendig erſterer Kraft folgen, und über die Walzen gleiten, wenn ſich nicht die Reibung bey N und E dagegen ſtemmte.

11. Da aber die Reibung bey gleitender Bewegung viel größer, als bey der wälzenden Bewegung iſt, ſo kann die Laſt nur dadurch der Kraft folgen, daß ſich die Walzen um O und D drehen.

12. Bey dieſer wälzenden Bewegung wirket nun an den beyden Stellen N, E zuſammen

nach der zu AB parallelen Richtung EI die Kraft $V \cos.\beta$ (Nr. 6.)

nach der entgegengeſezten EN die Kraft $Q \sin.\alpha$ (Nr. 1.)

13. Das Moment dieſer beyden Kräfte in Beziehung auf die Umdrehungspuncte O, D iſt

$$2b(V\cos.\beta - Q\sin.\alpha) = 2bV\cos.\beta - 2bQ\sin.\alpha$$

14. Ferner wirkt auf die beyden Mittelpuncte c der Walzen zur ſchiefen Ebene parallel abwärts die Kraft $q \sin.\alpha$ (Nr. 4.), das Moment dieſer Kraft iſt $bq\sin.\alpha$.

15. Ueberdieß widerſezet ſich der Bewegung noch die Reibung ſowohl an den obern Stellen N, E, als den untern O, D, bezeichnet nun $\frac{\varrho}{b}$ den Reibungscoefficienten bey wälzender Bewegung, ſo iſt nach §. 78. V. Zuſaz

16. das Moment der Reibung an den obern Stellen in Beziehung auf die Umdrehungspuncte O, D

$$= 2b\varrho(Q\cos.\alpha + V\sin.\beta) \text{ (Nr. 2 und 7.)}$$

17. Endlich iſt die Reibung bey O, D

$$= \varrho[(Q+q)\cos.\alpha + V\sin.\beta] \text{ (Nr. 9.)}$$

18. Da die Reibung allemal eine der Bewegung entgegengeſezte Richtung hat, ſo muß der Aufgabe gemäß die Kraft V ſo beſtimmt werden, daß

19. $$2bV\cos.\beta = 2bQ\sin.\alpha + bq\sin.\alpha + 2b\varrho[Q\cos.\alpha + V\sin.\beta] + \varrho[(Q+q)\cos.\alpha + V\sin.\beta]$$

(Nr. 13, 14, 16 und 17.), mithin

$$2bV\cos.\beta - 2b\varrho V\sin.\beta - \varrho V\sin.\beta = b\sin.\alpha(2Q+q) + \varrho\cos.\alpha(2bQ+Q+q)$$

$$V[2b(\cos.\beta - \varrho\sin.\beta) - \varrho\sin.\beta] = b\sin.\alpha(2Q+q) + \varrho\cos.\alpha(2bQ+Q+q)$$

20. $V = \frac{b \sin.\alpha (2Q+q) + \varrho \cos.\alpha (2bQ+Q+q)}{2b \cos.\beta - \varrho \sin.\beta (2b+1)}$

wodurch die Aufgabe aufgelöſet iſt.

I. Zuſaz. Liegt die Laſt mit den Walzen auf wagrechtem Boden, ſo iſt $\alpha = 0$, $\sin.\alpha = 0$, $\cos.\alpha = 1$ mithin

$$V = \frac{\varrho (2bQ+Q+q)}{2b \cos.\beta - \varrho \sin.\beta (2b+1)}$$

II. Zuſaz. Wirket die Kraft V zur ſchiefen Ebene parallel, ſo iſt $\beta = 0$, $\sin.\beta = 0$, $\cos.\beta = 1$, mithin Nr. 20.

$$V = \frac{b \sin.\alpha (2Q+q) + \varrho \cos.\alpha (2bQ+Q+q)}{2b}$$

$$= \sin.\alpha (Q+\tfrac{1}{2}q) + \varrho \cos.\alpha Q + \frac{\varrho}{2b} \cos.\alpha (Q+q)$$

III. Zuſaz. Auf wagrechten Boden, wenn die Kraft V nach wagrechter Richtung zieht oder ſchiebt, wird im I. Zuſ. $\beta = 0$, alſo

$$V = \frac{\varrho (2bQ+Q+q)}{2b} = \varrho Q + \frac{\varrho}{2b} (Q+q)$$

II. Hauptſtück.

Von der ſchiefen Ebene.

§. 135.

Erklärung.

Wenn ein oder mehrere miteinander verbundene feſte Körper ſo eine Lage bekommen, daß ſie nach einer Seite zu eine ſchiefe Ebene bilden, ſo heißt die ganze Vorrichtung eine phyſiſche ſchiefe Ebene.

I. Zuſaz. Wenn eine Laſt Q auf einer ſchiefen Ebene liegt, ſo ſtemmet ſich gegen die Kraft P, welche dieſe Laſt in Ruhe erhalten ſoll, nur ein Theil derſelben (Reine Mech. §. 154.), und überdieß, da ſich jedesmal die Reibung der Bewegung widerſezet (§. 56.), äuſſert ſich leztere zum Vortheil der Kraft.

II. Zuſaz. Soll hingegen die Laſt Q durch die Kraft P längſt der ſchiefen Ebene aufwärts bewegt werden, ſo ſtemmet ſich dagegen zwar die Reibung, aber von der Laſt Q nur ein Theil, mithin

III. Zuſaz. dienet die ſchiefe phyſiſche Ebene zur Ueberwältigung der Laſt als Maſchine (§. 1.).

IV. Zuſaz. Die Vorrichtung einer phyſiſchen ſchiefen Ebene kann ſehr mannigfaltig ſeyn, jedesmal aber müſſen die Theile, welche ſie bilden, ſolch eine Feſtigkeit haben, daß ſie von der Laſt weder zerbrochen, noch merklich gebogen werden.

I. Abſchnitt.

Von der eigentlichen ſchiefen phyſiſchen Ebene.

§. 136.

Erklärung. (Fig. 55.)

Wenn eine ſchiefe phyſiſche Ebene zum Niederlaſſen, oder zum Erheben einer Laſt gebraucht wird, ſo giebt man ihr gewöhnlich, um eine unnüze Schwerfälligkeit zu vermeiden, nachſtehende Form: Man nimmt zwey prismatiſch zugehauene Bäume AB, CD, die in paralleler Entfernung von einander, unten ſowohl, wo ſie auf dem Boden aufliegen, als oben, wo ſie

auf Stüzen BE, DF, ruhen, durch Querbalken verbunden werden.

Zuſaz. Manchmal werden die Bäume AB, CD nicht verbunden, ſondern jeder erhält oben 2 Stüzen, worauf er ruhet, damit man ſie in beliebiger Entfernung von einander ſtellen kann, bey kleinern Laſten, z. B. zur Abladung der Fäſſer von einem Wagen, giebt man der Vorrichtung die Form einer Leiter, nur bleiben, oben und unten ausgenommen, die Querſproſſen weg, und oben ſind Haken angebracht, mittels welchen die Leiter an den Wagen befeſtiget wird.

§. 137.

Aufgabe. (Fig. 53.)

Auf der ſchiefen Ebene liegt die Laſt Q, am Schwerpuncte G wirket die Kraft P nach der Richtung GE, man ſuchet die Größe der Kraft, wenn ſie gerade ſo groß ſeyn ſoll, daß ſie das Herabgleiten, oder Herabrollen der Laſt verhindert; ferner der Reibungscoefficient λ, die Neigung der ſchiefen Ebene $BAC = \alpha$, und der Winkel, unter welchem die Richtung der Kraft oben die ſchiefe Ebene ſchneidet, oder $GEA = \varphi$ gegeben ſind.

Auflöſung.

1. Vermög Rein. Mech. §. 154. wird die Laſt Q durch ihr eigenes Gewicht zur ſchiefen Ebene parallel, mithin der Schwerpunct nach der Richtung Ga mit einer Kraft $= Q . \sin. \alpha$ getrieben, und

2. mit einer Gewalt $= Q . \cos. \alpha$ ſenkrecht gegen die ſchiefe Ebene, das iſt, nach der Richtung GD gedrückt, woraus

3. eine Reibung $= \lambda Q \cos. \alpha$ entſteht. (§. 58.)

4. Die Kraft P zerfällt in zwey Seitenkräfte (Reine Mech. §. 55. I. Zuſ.), nemlich nach der zur ſchiefen Ebene parallelen Richtung $Ga' = P \cos. \varphi$ und

5. nach der auf die ſchiefe Ebene ſenkrechten Richtung $GD = P \sin. \varphi$, woraus wieder

6. eine Reibung $= \lambda P \sin. \varphi$ entſteht.

7. Da ſich nun die Reibung jedesmal der Bewegung widerſezet, mithin ihre Richtung allemal jener der Bewegung entgegengeſezt iſt, ſo wird, wenn die Kraft P bloß die Laſt erhalten ſoll, daß ſie ſich nicht abwärts beweget,

8. $P \cos. \varphi = Q \sin. \alpha - \lambda Q \cos. \alpha - \lambda P \sin. \varphi$
$P (\cos. \varphi + \lambda \sin. \varphi) = Q (\sin. \alpha - \lambda \cos. \alpha)$ und

9. $$P = \frac{Q (\sin. \alpha - \lambda \cos. \alpha)}{\cos. \varphi + \lambda \sin. \varphi}$$

I. Zuſaz. Je kleiner nun der Reibungscoefficient λ iſt, deſto größer wird der Zähler, und der Nenner deſto kleiner, mithin wächst P, wenn λ abnimmt; da nun der Reibungscoefficient bey der wälzenden Bewegung, oder $\frac{\varrho}{r}$ (§. 78. V. Zuſ.) viel kleiner, als jener bey der gleitenden iſt, ſo werden runde Körper beym Herablaſſen in eine ſchiefe Lage gebracht, und dadurch die wälzende in eine gleitende Bewegung verändert. Bey Fuhrwerken wird die Reibung durch Sperrung eines Rades, durch Unterlage des Radſchuhes vermehrt.

II. Zuſaz. Wirket die Kraft P zur ſchiefen Eebne parallel, mithin nach der Richtung Ga', ſo wird $\varphi = 0$, alſo $P = Q (\sin. \alpha - \lambda \cos. \alpha)$

III. Zuſaz. Iſt hingegen die Richtung der Kraft P wagrecht, alſo zu AC parallel, ſo wird $\varphi = \alpha$, mithin Nr. 9.

$$P = \frac{Q(\sin.\alpha - \lambda\cos.\alpha)}{\cos.\alpha + \lambda\sin.\alpha} = \frac{Q(\text{tang}.\alpha - \lambda)}{1 + \lambda\,\text{tang}.\alpha}$$

IV. Zuſaz. Für eine gegebene ſchiefe Ebene, wo alſo α eine beſtändige Größe iſt, iſt nur noch (Nr. 9.) der Winkel φ veränderlich, mithin wird dann P ein minimum, wenn der Nenner ein maximum iſt.

V. Zuſaz. Nimmt man auf die Reibung keine Rückſicht, das iſt, für $\lambda = 0$, wird $P = \frac{Q\sin.\alpha}{\cos.\varphi}$ (Reine Mech. §. 160. Nr. 4.), mithin für $\varphi = 0$, das iſt, für die zur ſchiefen Ebene parallele Richtung der Kraft, wird $\cos.\varphi$ ein maximum, alſo die Kraft $P = Q\sin.\alpha$ ein minimum.

§. 138.

Aufgabe.

Den Werth des Winkels φ zu beſtimmen, wo die Function: $\cos.\varphi + \lambda\sin.\varphi$ ein maximum iſt.

Auflöſung.

1. Man ſeze den ganzen Werth der Function $= y$; oder $y = \cos.\varphi + \lambda\sin.\varphi$, ſo iſt

2. $dy = -\sin.\varphi d\varphi + \lambda\cos.\varphi d\varphi$ (höhere Geom. §. 236.)

$$\frac{dy}{d\varphi} = 0 = -\sin.\varphi + \lambda\cos.\varphi, \text{ alſo}$$

$$\sin.\varphi = \lambda\cos.\varphi, \text{ und}$$

3. $\text{tang}.\varphi = \lambda$.

4. $d^2y = -\cos.\varphi d\varphi^2 - \lambda\sin.\varphi d\varphi^2$.

$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = -\cos.\varphi - \lambda\sin.\varphi$, folglich (Arithmet. §. 320.)

5. wenn

5. Wenn der Winkel φ ſo beſtimmt wird, daß tang. $\varphi = \lambda$, ſo iſt die Function ein maximum.

I. Zuſaz. Die Kraft P (§. 137.) wird alſo am kleinſten, und daher die Vorrichtung für eine gegebene ſchiefe Ebene am vortheilhafteſten, wenn ihre Richtung die ſchiefe Ebene auf der obern Seite der Verticallinie GL ſo ſchneidet, daß tang. $\varphi = \lambda$.

II. Zuſaz. Bey einem prismatiſchen Körper, wenn $\lambda = 0{,}429$ (§. 67. V. Zuſ. a) = tang φ, wird $\varphi = 23^\circ\,13'$.

III. Zuſaz. Wenn die Kraft P ein minimum seyn ſoll, ſo darf die Richtung der Kraft, wenn man zugleich auf die Reibung ſieht, nicht wie §. 137. V. Zuſ. zur ſchiefen Ebene parallel seyn.

§. 139.

Aufgabe.

Für einen prismatiſchen Körper, deſſen Gewicht Q = 1000 ℔., die Neigung der ſchiefen Ebene $\alpha = 30^\circ$, ferner der Reibungscoefficient $\lambda = 0{,}429$ gegeben iſt, die kleinſte Kraft P anzugeben, welche verhindert, daß der Körper nicht herabgleitet.

Auflöſung.

1. $$P = \frac{Q\,(\sin.\alpha - \lambda\cos.\alpha)}{\cos.\varphi + \lambda\sin.\varphi}$$ (§. 137.)

2. Soll nun P ein minimum seyn, ſo muß die Kraft P in der Neigungsebene eine Richtung haben, daß ſie die ſchiefe Ebene ober der ſenkrechten GL (Fig. 53.) unter einem Winkel GED = φ ſo ſchneidet,

daß tang. $\varphi = \lambda$, mithin gegenwärtig $\varphi = 23^\circ 13'$ iſt. (§. 138. I und II. Zuſ.)

3. $\lambda \cos. \alpha = 0{,}429 \times 0{,}8660254$
$= 0{,}3715249$
$\sin. \alpha = 0{,}5000000$, mithin

4. $\sin. \alpha - \lambda \cos. \alpha = 0{,}1284751$, und

5. $Q(\sin. \alpha - \lambda \cos. \alpha) = 128{,}4751$

6. $\lambda \sin. \varphi = 0{,}429 \times 0{,}3942093$
$= 0{,}1691158$
$\cos. \varphi = 0{,}9190207$.

7. $\cos. \varphi + \lambda \sin. \varphi = 1{,}0881365$.

8. Nun iſt
$\log. Q\,[\sin. \alpha - \lambda \cos. \alpha] = 2{,}1088188$
$\log. (\cos. \varphi + \lambda \sin. \varphi) = 0{,}0366834$
mithin $\log. P = 2{,}0721354$, folglich

9. $P = 118{,}07$ ℔.

I. Zuſatz. Für $\varphi = 0$, wenn nemlich die Richtung der Kraft zur ſchiefen Ebene parallel wirkt, iſt
$P = Q\,(\sin. \alpha - \lambda \cos. \alpha) = 128{,}4751$ ℔. (Nr. 5.)

II. Zuſatz. Nimmt man auf die Reibung keine Rückſicht, ſo iſt für die parallele Richtung der Kraft $P = Q \sin. \alpha$ (§. 137. V. Zuſ.) $= 1000 \times 0{,}5 = 500$ ℔.

§. 140.

Aufgabe. (Fig. 53.)

Es iſt alles wie §. 137., nur wirke die Kraft P nach der Richtung GF, welche, rückwärts verlängert, die ſchiefe Ebene unter der lothrechten Linie GL in F′ ſchneidet, ſo daß nun $GF'E = \psi$ ſey.

Auflöſung.

1. Die Laſt Q wird wieder längſt der ſchiefen Ebene parallel abwärts mit einer Gewalt $= Q \sin. \alpha$ getrieben, und

2. nach der ſenkrechten Richtung GD mit einer Gewalt $= Q \cos. \alpha$ auf ſelbige gedrückt.

3. Die am Schwerpuncte G wirkende Kraft P löſet ſich in zwey Seitenkräfte auf, nemlich nach der zu AB parallelen Richtung $Ga' = P. \cos. FGa' = P \cos. \psi$ und

4. nach der auf AB ſenkrechten Richtung $GD' = P \sin. \psi$.

5. Leztere Richtung iſt nun dem Drucke Nr. 2. gerade entgegengeſezet, vermindert daher denſelben, ſo wie die dadurch entſtehende Reibung, ſo daß alſo gegenwärtig die Reibung $= \lambda (Q \cos. \alpha - P \sin. \psi)$ wird.

6. Soll daher die Kraft P bloß die Bewegung der Laſt Q abwärts verhindern, ſo wird

7. $P \cos. \psi = Q \sin. \alpha - \lambda (Q \cos. \alpha - P \sin \psi)$
$P \cos. \psi - \lambda P \sin. \psi = Q \sin. \alpha - \lambda Q \cos. \alpha$, folglich

8. $P = \frac{Q[\sin. \alpha - \lambda \cos. \alpha]}{\cos. \psi - \lambda \sin. \psi}$.

I. Zuſaz. Da von der Kraft P der Theil $P \sin. \psi$ (Nr. 4.) nur den Druck der Laſt gegen die ſchiefe Ebene, mithin auch die Reibung, welche ſich doch gegenwärtig zum Vortheil der Kraft äuſſert, vermindert, ſo iſt dieſe Richtung der Kraft nicht vortheilhaft, und jene §. 137., wo ſie auf der obern Seite der Verticallinie GI. die ſchiefe Ebene in E ſchneidet, allemal vorzuziehen, wenn die Kraft P nur das Herabgleiten der Laſt verhindern ſoll.

II. Zuſatz. Wenn $\cos.\psi - \lambda \sin.\psi = 0$; mithin $\lambda \sin.\psi = \cos.\psi$, folglich $\lambda = \frac{\cos\ \psi}{\sin.\ \psi} = \cot.\psi$, ſo wird $P = \infty$

III. Zuſatz. Wirkte die Kraft P nach der verticalen Richtung aufwärts, alſo GL gerade entgegengeſezt, ſo iſt

$\psi = G \angle D = 90^\circ - \alpha$, mithin

$\cos.\psi = \sin.\alpha$; $\sin.\psi = \cos.\alpha$, alſo

$$P = \frac{Q(\sin.\alpha - \lambda \cos.\alpha)}{\sin.\alpha - \lambda \cos.\alpha} = Q.$$

§. 141.

Aufgabe. (Fig. 53.)

Es bleibt alles, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Kraft P ſoll nun aber der Laſt Q ſo das Gleichgewicht halten, daß ſie bey ihrer geringſten Vermehrung der Laſt eine Bewegung aufwärts ertheilet.

Auflöſung.

1. Es bleibt alles wie im vorhergehenden 140. §. Nr. 1-5.

2. Da ſich aber die Reibung gegenwärtig der Bewegung aufwärts entgegenſezet, ſo wird

3. $P \cos.\psi = Q \sin.\alpha + \lambda(Q \cos.\alpha - P \sin.\psi)$

$P \cos.\psi + P\lambda \sin\psi = Q \sin.\alpha + Q\lambda \cos.\alpha$, folglich

4. $$P = \frac{Q(\sin.\alpha + \lambda \cos.\alpha)}{\cos.\psi + \lambda \sin.\psi}.$$

I. Zuſatz. Um das Haupthinderniß der Bewegung, die Reibung, zu vermindern, verwandelt man entweder durch untergelegte Walzen die gleitende in

eine rollende Bewegung (§. 133.), oder man ſucht durch angebrachte Schmier dieſes zu bewirken.

II. Zuſaz. Aus §. 138 erhellet, daß für tang. $\psi = \lambda$, der Nenner cos. $\psi + \lambda$ sin. ψ ein maximum, mithin P ein minimum wird.

III. Zuſaz. Sezet man wie §. 139. Q = 1000 ℔.; $\alpha = 30^\circ$, $\lambda = 0{,}429$, ſo iſt wieder $\psi = 23^\circ 13'$, alſo

$$\begin{array}{rl} \sin.\alpha & = 0{,}5000000 \\ \lambda \cos.\alpha & = 0{,}3715249 \\ \hline \sin.\alpha + \lambda\cos.\alpha & = 0{,}8715249 \\ Q[\sin.\alpha + \lambda\cos.\alpha] & = 871{,}5249 \\ \cos.\psi + \lambda\sin\psi & = 1{,}0881365 \end{array}$$

Nun iſt $\log. Q\,[\sin.\alpha + \lambda\cos.\alpha] = 2{,}9402798$

$$\begin{array}{rl} \log\,[\cos\psi + \lambda\sin.\psi] & = 0{,}0366834 \\ \hline \text{mithin}\quad \log. P & = 2{,}9035964 \end{array}$$

folglich P = 800,933 ℔.

IV. Zuſaz. Iſt die Richtung der Kraft zur ſchiefen Ebene parallel, ſo iſt $\psi = 0$, mithin
$P = Q[\sin.\alpha + \lambda\cos.\alpha] = 871{,}5249$ ℔.

V. Zuſaz. Nimmt man auf die Reibung keine Rückſicht, das iſt, für $\lambda = 0$, würde wieder

$P = \frac{Q\sin.\alpha}{\cos.\psi}$ (Reine Mechan. §. 160. Nr. 4.) wie eben §. 137. V. Zuſ. Für $\psi = 0$, würde daher cos. ψ ein maximum, folglich
$P = Q\sin.\alpha = 1000 \times 0{,}5 = 500$ ℔. ein minimum, welches viel kleiner als im III und IV. Zuſaz iſt.

VI. Zuſaz. Wollte man der Kraft eine Richtung wie §. 137. geben, ſo daß ſie die ſchiefe Ebene auf der

obern Seite der Verticallinie GL in E unter dem Winkel GED $= \varphi$ ſchneidet, ſo würde nun aus §. 137.

$P \cos.\varphi = Q \sin.\alpha + \lambda Q \cos.\alpha + \lambda P \sin.\varphi$, mithin

$P \cos.\varphi - P\lambda \sin.\varphi = Q \sin.\alpha + Q\lambda \cos.\alpha$, alſo

$$P = \frac{Q[\sin.\alpha + \lambda \cos.\alpha]}{\cos.\varphi - \lambda \sin.\varphi}.$$

VII. Zuſaz. Für die wagrechte Richtung der Kraft, das iſt, für $\varphi = \alpha$, würde

$P = \dfrac{Q[\sin.\alpha + \lambda \cos.\alpha]}{\cos\alpha - \lambda \sin.\alpha}$, dividirt man den Zähler und Nenner mit $\cos.\alpha$, ſo würde

$$P = \frac{Q[\tan\alpha + \lambda]}{1 - \lambda \tan\alpha}.$$

VIII. Zuſaz. Da in dieſen beyden vorhergehenden Zuſäzen der Nenner kleiner, ſo würde der Werth für P jedesmal größer als Nr. 4. ſeyn. Soll daher eine Laſt durch eine Kraft mittels der ſchiefen Ebene zu einer Höhe gehoben werden, ſo muß die Richtung der Kraft allemal ſo beſchaffen ſeyn, daß ſie, rückwärts verlängert, die ſchiefe Ebene auf der untern Seite ſo ſchneidet, daß für GF′D $= \psi$, $\tan.\psi = \lambda$ iſt (II. Zuſ.).

IX Zuſaz. Nimmt man die Neigung α der ſchiefen Ebene ſelbſt als eine veränderliche Größe an, ſo hängt noch, bey der vortheilhafteſten Richtung der Kraft, ihre Größe Nr. 4. von jener des Zählers ab.

X. Zuſaz. Auf dem wagrechten Boden, oder für $\alpha = 0$, iſt $P = \dfrac{\lambda Q}{\cos.\psi + \lambda \sin\psi}$, behält man daher die im III. Zuſ. angenommenen übrigen Beſtimmungen, ſo iſt

$\lambda Q = 0{,}429 \times 1000 = 429$, ferner

$$\log. \lambda Q = 2{,}6324573$$
$$\log. (\cos. \psi + \lambda \sin. \psi) = 0{,}0366834, \text{ mithin}$$
$$\log. P = 2{,}5957739, \text{ folglich}$$
$$P = 394{,}252 \text{ ℔.}$$

§. 142.

Aufgabe.

Den Werth des Winkels ω zu beſtimmen, für welchen die Function $\sin. \omega + \lambda \cos. \omega$ ein maximum oder ein minimum wird, wenn λ eine unveränderliche Größe iſt.

Auflöſung.

1. Man ſeze $y = \sin. \omega + \lambda \cos. \omega$, mithin $dy = \cos. \omega d\omega - \lambda \sin. \omega d\omega$, und

2. $\frac{dy}{d\omega} = 0 = \cos. \omega - \lambda \sin. \omega$, alſo

3. $\lambda \sin. \omega = \cos. \omega$, und $\lambda = \frac{\cos. \omega}{\sin. \omega} = \cot. \omega$

4. $d^2y = \sin. \omega d\omega^2 - \lambda \cos. \omega d\omega^2$; $\frac{d^2 y}{d\omega^2} = - \sin. \omega - \lambda \cos. \omega$, folglich

5. Wenn ω ſo beſtimmt wird, daß es einen ſpizigen Winkel bezeichnet; für welchen $\cot. \omega = \lambda$ iſt, ſo giebt die Function ein maximum (Arithm. §. 320.).

I. Zuſaz. Da aus der Natur einer ſchiefen Ebene hervorgeht, daß ihre Neigung α allemal ein ſpiziger Winkel iſt, ſo wird für $\cot. \alpha = \lambda$ in der Gleichung $P = \frac{Q(\sin. \alpha + \lambda \cos \alpha)}{\cos. \psi + \lambda \sin. \psi}$ (§. 141. Nr. 4) der Zähler ein maximum, mithin, wenn der Nenner eine un-

veränderliche Größe iſt, wird auch die Kraft P ein maximum; folglich würde die Vorrichtung der ſchiefen Ebene mit einer ſolchen Neigung zur Hebung der Laſten ſehr zweckwidrig ſeyn.

II. Zuſaz. Bey einer ſolchen ſchiefen Ebene, wo $\cot. \alpha = \lambda$, wenn auch die Richtung der Kraft ſo gewählt wird, daß $\tang. \psi = \lambda$, alſo $\tang. \psi = \cot. \alpha$, das iſt, $\psi = 90^\circ - \alpha$; ſo wird $\cos. \psi = \sin. \alpha$, $\sin. \psi = \cos. \alpha$, mithin $P = Q$.

II. Abſchnitt.

Vom Keil.

§. 143.

Erklärungen. (Fig. 56.)

a. Ein dreyſeitiges Prisma ABC cba, welches zwiſchen die Fugen eines Körpers hineingetrieben wird, heißt ein Keil (cuneus); dabey nennet man

b. die Kante Cc, welche zuerſt eindringen muß, die Schneide,

c. die beyden Seitenflächen ACca, BCcb, welche durch ihre Neigung die Schneide bilden, die Seiten,

d. Die dritte Seitenfläche ABba, welche der Schneide gegenüber liegt, den Rücken oder den Kopf, und

e. eine von der Schneide auf den Rücken gezogene Perpendicularlinie CD, oder cd, die Länge des Keils.

f. Sind die beyden Seitenflächen ACca; BCcb einander congruent, mithin die beyden Grundflächen ACB, acb gleichſchenklichte Dreyecke, ſo heißt auch der Keil ein gleichſchenklichter Keil.

I. Zuſaz. Das Material des Keils muß hinlängliche Feſtigkeit haben, um durch den Druck der Kraft auf den Rücken, und durch die Preſſungen der Laſt auf ſeine Seiten nicht zuſammengedrückt, oder zerquetſchet zu werden.

II. Zuſaz. Legt man durch die Schneide und Länge des Keils, alſo durch cCD eine Ebene, ſo theilet dieſelbe den Keil in zwey ſchiefe Ebenen, welche die gemeinſchaftliche Grundfläche DCcd haben; iſt ferner der Keil ein ſenkrechtes Prisma, ſo ſtehen AC, DC, BC auf Cc ſenkrecht, folglich ſind in dieſem Falle ACD, BCD die Neigungswinkel; AC, BC die Längen; AD, BD die Höhen; CD die gemeinſchaftliche Grundlinie dieſer beyden ſchiefen Ebenen. (R. Mech. §. 155.)

III. Zuſaz. Bey dem gleichſchenklichten Keil ſind die beyden ſchiefen Ebenen, woraus der Keil zuſammengeſezt iſt, einander congruent.

IV. Zuſaz. Soll der Keil durch den Spalt eines Körpers nach der Richtung der Kraft P, welche auf ſeinen Kopf ſenkrecht wirket, eindringen, ſo muß ſich der Widerſtand an den beyden Seiten zuſammen auf Kräfte reduciren laſſen, deren Richtungen mit jener der Kraft P in einer Ebene liegen, und welche zum Theil untereinander, zum Theil der Kraft entgegengeſezt ſind. (Reine Mech. §. 52. I. Zuſ.)

V. Zuſaz. Bey dem Keil kömmt alſo nur jener Querſchnitt in Betrachtung, in welchem die Richtungen ſämmtlicher einwirkender Kräfte liegen.

§. 144.

Aufgabe. (Fig. 57.)

Durch die Oeffnung EF des Spaltes eines Körpers MmnN iſt der gleichſchenklichte Keil ACB ſo eingeſteckt, daß deſſen Rücken AB mit der Oeffnung des Spaltes EF parallel läuft; auf die Mitte D des Rückens wirkt eine Kraft P nach der auf AB ſenkrechten Richtung DC, man ſucht die Größe dieſer Kraft P, welche den ſämmtlichen Hinderniſſen das Gleichgewicht hält, ſo, daß ſie bey der mindeſten Zunahme das Uebergewicht bekömmt, und den Keil tiefer hineintreibet.

Auflöſung.

1. In der Figur ſey der Querſchnitt des Keils dargeſtellt, in welchem die Richtungen ſämmtlicher Kräfte liegen. (§. 143. V. Zuſ.)

2. Da die Richtung der Kraft P in der Mitte auf den Rücken des Keils ſenkrecht wirket, ſo geht ſie durch die Spize des Keils, und halbirt den Winkel ACB (Geom. §. 39.).

3. Der Körper MmnN drücket an den beyden Stellen E, F, wo er den Keil berührt, auf leztern, dieſer Druck läßt ſich nun auf jeder Seite, wenn er nicht ſchon auf die Seite des Keils ſenkrecht iſt, in einen ſolchen ſenkrechten, und einen zur Seite parallelen zerlegen, wovon alſo nur erſterer wirkſam iſt.

4. Man ſeze dieſen ſenkrechten Druck auf jeder Seite gleich, und jeden $=Q$, ſo wirket

5. an E auf den Keil, nach der ſenkrechten Richtung Ee eine Kraft Q, und eben ſo an F nach der Richtung Ff die Kraft Q.

6. Dieſe beyden Richtungen ſchneiden die Linie CD, alſo die Richtung der Kraft P (Nr. 2.) in eben denſelben Puncte K, denn

7. offenbar ſchneidet E e die Linie CD, weil eEC + ECD < 180° (Geometr. §. 44.), wodurch das Dreyeck ECK entſteht.

8. Eben ſo, indem fFC + FCD < 180°, ſchneidet Ef die Richtung CD in irgend einem Puncte, z. B. K', ſo daß wieder ein Dreyeck FCK' entſteht,

9. nun iſt EF parallel zu AB (per hyp.), mithin EC : FC = AC : BC (Geom. § 82.), alſo EC = FC; ECD = FCD (Nr. 2), CEK = 90° = CFK' mithin ΔECK ≅ ΔFCK', folglich CK = CK', das iſt, K' fällt mit K in eben denſelben Punct zuſammen.

10. Ferner iſt DKe = EKC = 90° - ECK = CAD
eben ſo DKf = FKC = 90° - FCK = CBD = CAD
indem der Keil gleichſchenklicht iſt.

11. Den ſenkrechten Druck Q bey E hält zwar die ſchiefe Ebene ACD, ſo wie ebendenſelben bey F die ſchiefe Ebene BCD durch ihre Feſtigkeit auf, aber beyde Ebenen werden dadurch ſelbſt gegeneinander gedrückt (§. 143. II. Zuſ.), erſtere nach der Richtung EK, leztere nach der Richtung FK, das heißt

12. Im Punct K wirken nun zwey Kräfte jede = Q nach den Richtungen Ke, Kf auf den Keil, und treiben ihn zuſammen nach der Richtung KD mit einer Gewalt = 2 Q cos. DKe (R. Mech. §. 53. VIII. Zuſ.)
= 2 Q cos. CAD (Nr. 10.) = 2 Q sin. ACD.

13. Ferner ſtemmet ſich noch gegen das tiefere Eindringen des Keils die Reibung, mithin auf jeder Seite eine Kraft = λ Q (§. 58.).

14. Da nun die Reibung allemal nach einer Richtung ſich äuſſert, welche jener der Bewegung entgegengeſezt iſt, ſo wirket λQ in E nach der Richtung EA, und in F nach der Richtung FB, oder, was gleichgeltend,

15. beyde zuſammen wirken in C nach den Richtungen CA, CB, wodurch nach der Richtung CD eine mittlere Kraft $= \lambda Q \cos. ACD$, wie oben Nr. 12. entſteht.

16. Soll nun die Kraft P den Bedingungen der Aufgabe entſprechen, ſo muß ſie den beyden Kräften Nr. 12 und 15. zuſammen das Gleichgewicht halten, folglich wird

$$17.\ P = 2Q \sin. ACD + 2\lambda Q \cos. ACD$$
$$= 2Q [\sin. ACD + \lambda \cos. ACD.]$$

I. Zuſaz. Nach §. 138. erhellet, daß für $\text{tang.} ADC = \text{tang.} \tfrac{1}{2} ACB = \lambda$ die Function Nr. 17., mithin die Kraft P, wenn die Preſſungen Q auf beyden Seiten unverändert bleiben, ein maximum wird.

II. Zuſaz. Um bey dem Hineintreiben des Keils ein Haupthinderniß, die Reibung, zu vermindern, wird gewöhnlich Schmier gebraucht.

III. Zuſaz. Da bey dem Keil, wenn er zum zerſpalten eines Körpers gebraucht wird, die Kraft durch einen Schlag wirket, deſſen Größe ſich nicht leicht beſtimmen läßt, da ferner die Größe der ſenkrechten Preſſungen bey der unendlichen Mannigfaltigkeit der Körper immer unbekannt bleiben wird, ſo bleibt die Theorie des Keils immer ſehr mangelhaft.

IV. Zuſaz. Als Keile wirken: das Meſſer, das Beil, der Hobel, der Nagel u. ſ. f.

V. Zuſaz. Wenn der Keil in den Spalt eingeklemmt iſt, ſo wird er durch die beyden Seitenpreſſungen mit einer Gewalt = 2Q sin. ACD (Nr. 13.) zurückgetrieben, da aber die Reibung einer jeden Bewegung hinderlich iſt, ſo wirket leztere nach entgegengeſezter Richtung mit einer Gewalt = 2λQ cos. ACD (Nr. 15.),

iſt nun $2\lambda Q \cos. ACD = 2Q \sin. ACD$

$\lambda \cos. ACD = \sin. ACD$, mithin

$\lambda = \cot. ACD$, ſo bleibt der Keil ruhig in ſeiner Stelle, und wenn $\lambda > \cot. ACD$, ſo wird eine Gewalt erfodert, um ſolchen herauszuziehen, will man daher einen Stift, oder Nagel in der Wand feſt machen, ſo läßt man ihn ſchärfen, daß iſt, ſeine Seiten rauch durch Einſchnitte machen, oder man benezet ihn, damit er durch den Roſt in der Folge rauche Seiten erhält, und dadurch die Reibung vermehrt wird, wodurch er alſo deſto feſter hält.

III. Abſchnitt.

Von der Schraube.

§. 145.

Lehrſaz. (Fig. 58.)

Wenn auf der krummen Seitenfläche eines ſenkrechten Cylinders eine beliebige krumme Linie AMDa verzeichnet iſt, und man zieht aus einem beliebigen Puncte M derſelben auf die Grundfläche des Cylinders den Perpendikel MP, ſo liegt ſolcher ganz in der krummen Seitenfläche, und P fällt mit einem Puncte der Peripherie der Grundfläche zuſammen.

Beweis.

1. Man ziehe die Axe Cc des Cylinders, ſo iſt ſie auf der Grundfläche ſenkrecht (Geometr. §. 230. d), mithin iſt

2. der Perpendikel MP zu Cc parallel, (Geometr. §. 165.) folglich

3. fällt MP ganz in die krumme Seitenfläche des Cylinders. (Geometr. §. 230. a).

4. Da endlich der Punct P zugleich in die Grundfläche fällt, ſo muß er mit einem Puncte der krummen Durchſchnittslinie dieſer Flächen, alſo mit einem Puncte der Peripherie zuſammen fallen.

I. Zuſaz. Da MP auf der Grundfläche des Cylinders ſenkrecht ſteht, ſo ſteht dieſe Linie auch auf der Peripherie deſſelben ſenkrecht. (Geometr. §. 162.)

II. Zuſaz. Fängt die Curve in dem Puncte A der Peripherie der Grundfläche an, ſo kann man für jeden Punct M, den Perpendikel MP zur Ordinate, und den Bogen AP zur Abſciſſe nehmen.

III. Zuſaz. Da anfänglich mit der Curve AMD die Abſciſſen ebenfalls zunehmen, bis erſtere in einem Punct a gelangt, welcher ſenkrecht über den Anfangspunct A liegt, ſo entſpricht dieſem Theile AMDa der Curve der ganze Umkreis der Grundfläche als Abſciſſe, und der Perpendikel Aa als Ordinate.

IV. Zuſaz. Sezet die Curve von a aus nach den nemlichen Geſezen ihre Richtung auf der Oberfläche des verlängerten Cylinders fort, ſo trifft auf jedes Stück des Cylinders von der nemlichen Höhe wie Aa, ein Theil der Curve von der nemlichen Beſchaffenheit

wie AMDa; wozu alſo jedesmal ein ganzer Umfang der Grundfläche als Abſciſſe, und eine Höhe = Aa als Ordinate gehört.

V. Zuſaz. Da ſich eine ſolche Curve immer um den Umfang des Cylinders windet, ſo hat ſie, wenn ſie nach a kömmt, einen Umgang vollendet, und in der Fortſezung beſteht ſie aus mehrern ſolchen einander congruenten Gängen, mithin

VI. Zuſaz. hat man bey Unterſuchung einer Curve dieſer Art nur auf einen ſolchen Gang Rückſicht zu nehmen.

§. 146.

Erklärungen. (Fig. 58.)

Wenn eine auf der krummen Seitenfläche eines ſenkrechten Cylinders verzeichnete krumme Linie AMDa u. ſ. w. ſo beſchaffen iſt, daß für jeden beliebigen Punct M eines Umganges ſich der zur Abſciſſe gewählte Bogen AP, zur ſenkrechten Ordinate MP, wie der ganze Umfang der Grundfläche des Cylinders zur Höhe Aa eines Umganges verhält, ſo heißt

a. die krumme Linie ſelbſt eine Schraubenlinie;

b. ein ganzer Umgang derſelben wie AMDa ein Schraubengang (circuitus incisus),

c. die für einen Gang entſprechende ſenkrechte Ordinate Aa die Höhe eines Ganges.

I. Zuſaz. Bey einer Schraubenlinie, wenn der Halbmeſſer der Grundfläche des Cylinders = r, die Höhe eines Ganges Aa = a, ferner für den beliebigen Punct M der Bogen AP als Abſciſſe = x, und die entſprechende Ordinate MP = y geſezt wird, iſt

$$x : y = 2r\pi : a, \text{ mithin}$$

$$y = \frac{ax}{2r\pi}$$

II. Zuſaz. Nimmt man noch einem Punct m, welcher M unendlich nahe liegt, und zieht die rechtwinklichte Ordinate mp, ſo ſind Mm, Pp Stückgen der Tangenten, und MmpP ein geradlinigtes Trapez (höhere Geom. §. 233. VI–VIII Zuſ.); zieht man noch Mn zu Pp parallel, ſo iſt:

$$Mn = Pp = dx;\ mn = dy = \frac{adx}{2r\pi} \text{ (I. Zuſ.)};$$

ferner im rechtwinklichten Dreyecke Mnm:

$$1 : \text{tang. } mMn = Mn : mn$$

$$= dx : dy = dx : \frac{adx}{2r\pi} = 1 : \frac{a}{2r\pi}$$

$$= 2r\pi : a = x : y \text{ (I. Zuſ.)}.$$

III. Zuſaz. Sezet man das Stück der Schraubenlinie AM = s, ſo iſt Mm = ds;

ferner $ds = \surd\,(dx^2 + dy^2)$ (höhere Geom. §. 267.)

$$= \surd\,\left(dx^2 + \frac{a^2}{4r^2\pi^2}\,dx^2\right) \text{ (II. Zuſ.)}$$

$$= \surd\left(\frac{4r^2\pi^2 + a^2}{4r^2\pi^2}\right) dx, \text{ mithin}$$

$AM = s = x\surd\left(\frac{4r^2\pi + a^2}{4r^2\pi^2}\right)$ wo keine Constans addirt werden darf, weil für $x = 0$, auch $AM = 0$ iſt. Für $x = 2r\pi$ wird s ein Schraubengang AMDa, mithin $AMDa = 2r\pi\ \surd\left(\frac{4r^2\pi^2 + a^2}{4r^2\pi^2}\right) = \surd\,(4r^2\pi^2 + a^2)$, und

$$AM : AMDa = x : 2r\pi.$$

IV. Zuſaz. Verlängert man die beyden Seiten des Trapezes mM, pP gegen MP zu, ſo ſchneiden ſie ein-

einander in T (Geometr. §. 51. X. Zuſ.), und bilden das Dreyeck mTp, wo in p ein rechter Winkel (§. 145. I. Zuſ.), ferner MT die Tangens der Schraubenlinie AM, und PT die Tangens des Bogens AP iſt.

V. Zuſaz. Da $\Delta mnM \backsim \Delta MPT$, ſo iſt

$$PT : MP = Mn : mn, \text{ oder}$$
$$PT : y = dx : dy$$
$$= x : y \text{ (II. Zuſ.)}$$

folglich $PT = x$, das iſt, die Tangens für jede Stelle M iſt der dieſer Stelle entſprechenden Abſciſſe, oder dem Bogen AP, gleich.

VI. Zuſaz. Ferner im Dreyecke MPT

$$PT : PM = 1 : \text{tang. } MTP$$
$$PT : PM = x : y \text{ (V. Zuſ.)}$$
$$x : y = 2r\pi : a \text{ (I. Zuſ.), mithin}$$
$$1 : (\text{tang. } MTP = 2r\pi : a, \text{ alſo}$$

$\text{tang. } MTP = \frac{a}{2r\pi}$ eine beſtändige Größe, das iſt, für jeden Punct M der Schraubenlinie behält die entſprechende Tangens gegen die Grundfläche immer eben dieſelbe Neigung.

VII. Zuſaz. Da jedesmal der Winkel $mMn = MTP$, und für $x = 0$, T mit A zuſammen fällt, ſo behält die Schraubenlinie an jeder Stelle, gegen eine zur Grundfläche parallelen Ebene immer eben dieſelbe Neigung, welche die Tangens gegen die Grundfläche hat, man kann daher dieſen unveränderlichen Winkel $MTP = \alpha$ ſezen, und die Neigung der Schraubenlinie nennen.

VIII. Zuſaz. Verzeichnet man ein rechtwinklichtes Dreyeck, deſſen Baſis der Peripherie der Grund-

fläche des Cylinders, und deſſen Höhe jener eines Umganges der Schraubenlinie gleich iſt, legt die Baſis des Dreyeckes an den Umfang, ſo congruiret die Hypothenuſe mit einem Umgange der Schraubenlinie; denn nimmt man bey dieſem rechtwinklichten Dreyecke die Grundlinie zur Abſciſſenlinie, ſo iſt für jede Abſciſſe x, die entſprechende Ordinate y ſo beſchaffen, daß

$$x : y = b : a;$$

da nun $b = 2r\pi$, und a der Höhe eines Ganges der Schraubenlinie gleich iſt, ſo iſt die Ordinate y des Dreyeckes mit jener der Schraubenlinie an jeder Stelle einerley (I. Zuſ.), folglich fallen alle Puncte der Hypothenuſe mit jenen der Schraubenlinie zuſammen.

§. 147.

Erklärungen. (Fig. 59.)

a. Wenn auf den krummen Seitenflächen zweyer ſenkrechten concentriſchen Cylinder Schraubenlinien AM, BN ſo verzeichnet ſind, daß ihre Gänge eben dieſelbe Höhe haben, ſo heiſſen jede zwey Puncte dieſer Schraubenlinien z. B. M, N, welche mit der Axe des Cylinders in einer Ebene liegen, zwey **correſpondirende Puncte** der beyden Schraubenlinien;

b. Eine Fläche ABNM zwiſchen dieſen beyden Schraubenlinien, in welche zugleich jede zwiſchen zwey correſpondirenden Puncten gezogene gerade Linie wie AB, MN fällt, heißt eine **Schraubenfläche** (helix).

I. **Zuſaz.** Sezet man den Halbmeſſer des äuſſern Cylinders AC = R, die der Curve AM entſprechende Abſciſſe, oder den Bogen AP = x, die ſenkrechte Ordinate MP = y, die Höhe eines Ganges = a, ſo iſt

$$y = \frac{ax}{2R\pi}$$ (§. 146. I. Zuſ.).

II. Zuſaz. Iſt am Umfange des innern Cylinders, deſſen Halbmeſſer $aC = r$, die Schraubenlinie BN ſo verzeichnet, daß ihr Anfangspunct B zwar mit A in eben derſelben Axenebene, aber um $Ba = c$ über der Grundfläche erhaben, liegt, ſo iſt für das Stück BN, deſſen Abſciſſe $ap = x'$, und Ordinate $Np = y'$,

$$y' = c + \frac{ax'}{2r\pi}$$

III. Zuſaz. Sind M und N zwey correſpondirende Puncte der beyden Schraubenlinien, ſo liegen ſie in einer Ebene, welche durch die Axe auf der Grundfläche des Cylinders ſenkrecht ſteht, mithin liegen in eben dieſer Ebene die beyden ſenkrechten Ordinaten MP, Np, (Geometr. §. 170. II. Zuſ.)

Ferner iſt der Winkel $acp = ACP$, mithin nach den bisher feſtgeſezten Bezeichnungen:

$$x' : x = r : R, \text{ alſo } x' = \frac{rx}{R}, \text{ folglich}$$

$$y' = c + \frac{a}{2r\pi} \cdot \frac{rx}{R} \text{ (II. Zuſ.)} = c + \frac{ax}{2R\pi}$$

$= c + y$ (I. Zuſ.), mithin $y' - y = c$, das iſt, der Unterſchied der Ordinaten für jedes Paar correſpondirende Puncte iſt unveränderlich die Größe $c = Ba$.

IV. Zuſaz. Zieht man zwiſchen zwey correſpondirenden Puncten M, N eine gerade Linie, und durch M zu PC die Parallele Ms, ſo ſchneiden ſie beyde die Axe Cc (Geometr. §. 45. II. Zuſ.).

Ferner iſt der Winkel $MNo = Mcs$;
$No = Np - MP = y' - y = c$ (III. Zuſ.).
$Mo = Pp = CP - cp = R - r$.

Im rechtwinklichten Dreyecke NoM iſt endlich:

$No : oM = 1 : \text{tang. } MNo$, daſs iſt

$c : R - r = 1 : \text{tang. } MNo$, mithin

$\text{tang. } MNo = \frac{R-r}{c}$ eine beſtändige Gröſse; folglich iſt auch der Winkel MNo, mithin auch Mcs unveränderlich, ſo daſs alſo jede gerade Linie zwiſchen zwey correſpondirenden Puncten gegen die Axe einerley Neigung hat.

Eben ſo iſt daher für jede Stelle der Winkel

$NMo = 90^0 - MNo$ unveränderlich $= BAa$.

V. Zuſaz. Für $Ba = c = o$, das iſt, wenn der Anfang B der innern Schraubenlinie mit dem Anfange A der äuſſern in die nemliche Ebene ACP fällt, wird

$y' = y$; $\text{tang. } MNo = \frac{R-r}{o} = \infty$, alſo

$MNo = Mcs = 90^0$, und $NMo = BAa = o$.

VI. Zuſaz. $MN = \sqrt{(No^2 + Mo^2)} = \sqrt{[c^2 + (R-r)^2]}$ iſt ebenfalls eine unveränderliche Gröſse, für $c = o$, wird $MN = R - r = Aa$. Folglich ſind die Entfernungen zweyer correſpondirenden Puncte an allen Stellen gleich groſs.

VII. Zuſaz. Da nun die Schraubenfläche vermöge den IV - VI. Zuſ. allenthalben gleichförmig gebildet iſt, ſo verhält ſich jedes beliebige Stück, welches zwiſchen den correſpondirenden Puncten A, B und M, N enthalten iſt, zu einem ganzen Gange dieſer Fläche, wie das entſprechende Stück einer Schraubenlinie AM zu dem ganzen Gange dieſer Linie, daher auch $= x : 2R\pi$ (§. 146. III. Zuſ.).

VIII. Zuſaz. Nimmt alſo die Abſciſſe, das iſt, der Bogen $AP = x$ um dx zu, ſo iſt das Differential

der Schraubenfläche ſo beſchaffen, daß ſich d(ABNM) zu der ganzen Fläche eines Ganges = dx : 2Rπ verhält.

§. 148.

Lehrſatz. (Fig. 59.)

Wird in der Schraubenfläche eine krumme Linie z. B. DE ſo verzeichnet, daß ſie mit der äuſſern AM, oder innern Schraubenlinie BN immer die gleiche Entfernung AD behält, ſo iſt ſie ebenfalls eine Schraubenlinie, welche der äuſſern und innern Schraubenlinie vollkommen ähnlich iſt, und mit ihnen die gemeinſchaftliche Höhe a eines Ganges hat.

Beweis.

1. Wenn von dem beliebigen Stücke DE dieſer Curve, A, B einer, und M, N ander Seits die correſpondirenden Puncte ſind, ſo, daß A, D, B mit der Axe cC in einer Ebene liegen, und eben dieſes von den Puncten M, E, N gilt, und

2. man zieht die geraden Linien AB, MN, welche alſo die Curve in D und E ſchneiden; ferner auf die Grundfläche des Cylinders die Perpendikel:

Da, Ba, MP, Ep, Np, ſo ſind ſie ſämmtlich zur Axe parallel. (Geometr. §. 165.)

3. Zieht man noch zu PC die Parallele Ms, welche Ep in r, und Np in o ſchneidet, ſo iſt EM = AD (per hyp.) der Winkel NMO = BAa (§. 147. IV. Zuſ.) ferner ErM = 90° = DaA, alſo $\Delta ErM \cong \Delta DaA$, folglich

4. Mr = Aa, und daher auch sM - Mr = CP - Pa = CA - Aa oder sr = Cp = Ca, das iſt:

5. Alle Puncte der Linie DE ſind von der Axe gleich weit entfernt, liegen alſo in der Oberfläche eines Cylinders, deſſen Halbmeſſer = Ca iſt.

6. Ferner iſt Ep = Er + rp = PM + Er = PM + Da; mithin Ep - Da = PM, das iſt, für jedes Stück DE der gezogenen Curve iſt die Ordinate gleich jener von AM der äuſſern Schraubenlinie, wenn man von erſterer jedesmal Da abzieht, mithin gilt dieſes ebenfalls nach jedem Umgang.

7. Da alſo ſämmtliche Puncte der Curve DE am Umfange eines Cylinders liegen (Nr. 5.), und ihre Ordinaten mit jenen der äuſſern Schraubenlinie nach Abzug von Da, um welches ihr Anfangspunct über die Grundfläche erhaben iſt, ganz gleich ſind, (Nr. 6.) ſo iſt DE eine Schraubenlinie ganz der äuſſern oder innern ähnlich, und hat mit ihnen eben dieſelbe Ganghöhe.

I. Zuſatz. Man kann daher die Curve DE in Beziehung auf die äuſſere AM, und innere Schraubenlinie BN, die mittlere Schraubenlinie, ſo wie ihren Halbmeſſer $Ca = \varrho$ des entſprechenden Cylinders den mittleren Halbmeſſer heiſſen.

II. Zuſatz. Wenn Ba = o (§. 147. V. Zuſ.), ſo iſt auch Da = o, das iſt, die mittlere Schraubenlinie fängt in dieſem Falle mit der äuſſern und innern Schraubenlinie in eben derſelben Ebene ACP an, und die correſpondirenden Puncte dieſer 3 Linien haben allemal gleiche Ordinaten.

III. Zuſatz. Für die mittlere Schraubenlinie iſt ebenfalls $\text{tang.}\ \alpha = \frac{a}{2\varrho\pi}$ (§. 146. VI und VII. Zuſ.)

§. 149.

Erklärungen.

a. Wenn am Umfange zweyer concentriſcher ſenkrechter Cylinder (Fig. 60.) die beyden Schraubenlinien ABCD u. ſ. w., und abcd u. ſ. w. ſo verzeichnet ſind, daß der Anfang a der innern, mit jenem der äuſſern oder A, zwar in eine Axenebene, aber nicht in eine Grundfläche fällt, ſondern a höher liegt (§. 147. II. Zuſaz), und es werden dazwiſchen zwey Schraubflächen ſo angelegt, daß die eine AabB von der äuſſeren Schraubenlinie AB u. ſ. f. zu der nächſt höher liegenden innern ab u. ſ. f.; die andere Schraubenfläche aCDb hingegen von der innern Schraubenlinie ab u. ſ. f. zu der nächſt höher liegenden äuſſern Schraubenlinie CD geht, ferner vom gröſſern ganzen Cylinder die zwiſchen die Schraubenflächen AabB und aCDb fallende Maſſe herausgenommen wird, und dieſes bey allen Gängen auf ähnliche Art geſchieht, ſo entſtehen wechſelweiſe Vertiefungen und Erhöhungen am Cylinder, und man nennet dieſe Vorrichtung eine **dreyſeitige Schraube.**

b. Fängt hingegen (Fig. 61.) die innere Schraubenlinie abcd mit der äuſſern ABCD nicht nur in der nemlichen Axenebene, ſondern auch in der nemlichen Grundfläche an, ſo daß c = o (§. 147. V. Zuſaz), und es werden in einiger Entfernung über der Grundfläche ebenfalls zwey der vorigen congruente Schraubenlinien a′b′c′d′ u. ſ. w., A′B′C′D′ verzeichnet, und man legt zwey Schraubenflächen ſo an, daß die eine durch die beyden erſtern Schraubenlinien AabB u. ſ. w., und die andere durch die beyden leztern nemlich A′a′b′B′ u. ſ. w. geht, läßt jedesmal die zwiſchen ihnen enthaltene Maſſe

a′A′AabBB′b′ ſtehen, nimmt hingegen die zwiſchen der erſten obern, und der nächſt höhern untern Fläche enthaltene Maſſe A′a′cCDdb′B′ heraus, ſo entſtehen wieder wechſelweiſe Erhöhungen und Vertiefungen am Cylinder, und dieſe Vorrichtung giebt eine vierſeitige Schraube.

c. Beyde dieſe Schrauben haben den gemeinſchaftlichen Namen einer männlichen Schraube (cochlea mas) oder man nennet jede ohne Beyſaz eine Schraube (cochlea); dabey heißt ferner

α. der Cylinder ſelbſt, die Spindel (Scapus),

β. die am Cylinder zwiſchen den Schraubenflächen enthaltenen Erhöhungen, das Gewind,

γ. jeder Theil des Gewindes, welcher genau einen Umfang der Schraubenflächen enthält, einen Schraubengang,

δ. die Entfernung zweyer nächſten Gänge, die Schraubenhöhe (distantia helicum).

d. Wird aus einem Körper von beliebiger Form MOPN (Fig. 60 und 61.) ein ſenkrechter Cylinder herausgebohret, und werden nun inwendig in dieſe Höhle Vertiefungen ſo eingegraben, daß die Gewinde einer männlichen Schraube genau in ſie paſſen, ſo entſteht die Schraubenmutter (cochlea faemina).

In der Tabelle iſt von der männlichen Schraube ihre Hälfte, von der Schraubenmutter aber nur ein Querſchnitt derſelben durch die Axe vorgeſtellt.

I. Zuſaz. Wird die Schraube ſammt der Mutter aus Metall verfertiget, ſo giebt man ihnen vierſeitige Gewinde wie (Fig. 61.); bey hölzernen Schrau-

den hingegen iſt die dreyſeitige Form der Gewinde (Fig. 60.) gewöhnlich.

II. Zuſaz. Da die männliche Schraube genau in die Schraubenmutter hineinpaßt, ſo iſt die Form der leztern mit jener der erſtern einerley, und die Spindel iſt beyden gemeinſchaftlich.

III. Zuſaz. Wenn die Schraubenmutter befeſtiget iſt, ſo kann ſich doch in ſelbiger die männliche Schraube nach der Richtung der Gänge ungehindert bewegen, die Spindel wird dadurch um ihre Axe gedrehet, und rücket zugleich in einer zur Axe parallelen Richtung fort.

IV. Zuſaz. Eine von dieſen beyden Bewegungen hat allemal die andere zur Folge.

V. Zuſaz. Drückt alſo eine Laſt Q auf die Spindel zur Axe parallel, ſo ſtrebt ſie zugleich die Schraube in der befeſtigten Mutter um die Axe zu drehen, und eine Kraft P, welche dieſes hindert, iſt mit derſelben im Gleichgewicht, ſo wie

VI. Zuſaz. umgekehrt, wenn die Kraft P die Schraube um ihre Axe zu drehen, alſo zugleich zu ihrer Axe parallel zu bewegen ſtrebt, und nun eine Laſt Q leztere Bewegung verhindert, ſo verhindert ſie auch die erſtere, und iſt mit P im Gleichgewichte.

VII. Zuſaz. Da die Schraubenfläche eines jeden Ganges eine krumme Fläche iſt, ſo läßt ſich eine Schraube nicht als eine ſchiefe Ebene betrachten; nimmt man aber zwey correſpondirende Puncte (Fig. 62.) M, N der äuſſern und innern Schraubenlinie eines Ganges, und ihnen unendlich nahe zwey andere m, n, ſo ſind

Nn, Mm zugleich Stückgen der Tangenten (höhere Geometr. §. 233. VII. Zuſ.), mithin läßt ſich ein ſolches Element MNnm eines Ganges als eine ſchiefe Ebene betrachten.

VIII. Zuſaz. Zerlegt man daher einen Schraubengang in ſolche Elemente, und beſtimmt für jedes die Neigung deſſelben gegen einen zur Grundfläche der Spindel parallelen Querſchnitt, ſo läßt ſich die Theorie der Schraube auf jene der ſchiefen Ebene gründen.

§. 150.

Aufgabe. (Fig. 62.)

Von einer dreyſeitigen Schraube ſind die Halbmeſſer R, r der äuſſern und innern Schraubenlinie, ferner die Höhe a eines Schraubenganges, und die Entfernung c, um welche bey der Schraubenmutter der Anfangspunct der äuſſern Schraubenlinie höher, als jener der innern liegt, gegeben, man ſucht die Neigung eines Elementes von einem Schraubengang gegen einen zur Grundfläche der Spindel parallelen Querſchnitt für die Schraubenmutter.

Auflöſung.

1. MNnm ſtelle dieſes Element von einem Gange der Schraubenmutter, und N den tiefer liegenden Punct der innern Schraubenlinie vor.

2. Man lege alſo durch N zur Grundfläche der Spindel einen parallelen Querſchnitt, welcher alſo ebenfalls ein Kreis iſt.

3. Von M, m, n fälle man auf die Ebene dieſes Querſchnittes die Perpendikel MP, mp, no, ſo liegen erſtere beyde an der Oberfläche des äuſſern, und no

an jener des innern concentriſchen Cylinders, (§. 145.) die Puncte P, p fallen in den Umfang, ſo daß $Pp = dx$ das entſprechende Differential des Abſciſſenbogens für das Element M m der äuſſeren Schraubenlinie iſt. (§. 146. I. Zuſ.)

4. Zieht man die geraden Linien PN, po, ſo ſind ſie Stücke von Radien der Spindel, und ſchneiden ſich daher in der Axe der leztern, mithin iſt

5. $PN = po = R - r$.

6. Ferner iſt $MP = c$, die Entfernung, um welche der Punct M der äuſſern Schraubenlinie höher, als der correſpondirende N der innern, liegt.

7. Man verlängere die beyden Elemente mM, pP, bis ſie ſich in T ſchneiden, ſo iſt

$$\text{tang. } MTP = \text{tang. } \alpha = \frac{a}{2R\pi}$$ (§. 146. IV-VII. Zuſ.).

8. Da MT die Verlängerung des Elementes mM der äuſſern Schraubenlinie iſt, ſo liegt MT in der Ebene des Schraubenelementes MNnm, mithin liegt der Punct T mit N zugleich in eben dieſer Ebene und in der Ebene des Querſchnittes (Nr. 2.), folglich iſt die gerade Linie NT die Durchſchnittslinie dieſer beyden Ebenen.

9. Zieht man von M in der Ebene des Elementes auf NT die ſenkrechte MO, und in der Ebene des Querſchnittes die gerade Linie PO, ſo ſteht leztere auf NT ebenfalls ſenkrecht (Geometr. §. 166. II. Zuſ.), mithin iſt

10. der Winkel MOP die Neigung des Schraubenelementes gegen den Querſchnitt, welche geſucht wird; man ſeze der Kürze wegen $MOP = O$.

11. Ferner ſteht NP als Stück des Halbmeſſers auf dem Elemente Pp, alſo auch auf deſſen Verlängerung PT ſenkrecht, mithin iſt NPT = 90°, und daher PTN = 90° - PNT.

12. Im rechtwinklichten Dreyecke MPN, wenn man der Kürze wegen den Winkel MNP = v ſezet, iſt:

NP : MP = 1 : tang. MNP, das iſt

R - r : c = 1 : tang. v (Nr. 5 und 6.), mithin

13. $\text{tang. } v = \frac{c}{R - r}$

14. Aus N ziehe man in den drey Ebenen MNP, MNT, PNT mit einem beliebigen Halbmeſſer Kreiſe, ſo entſteht ein ſphäriſches Dreyeck, welches indeſſen, um die Figur nicht durch zu viele Linien ganz unkenntlich zu machen, das Dreyeck MPT vorſtellen kann.

15. In dieſem ſpäriſchen Dreyecke iſt nun:
der Bogen MP = dem Winkel MNP = v (Nr. 12.);
der Bogen MT = dem Winkel MNT,
der Bogen PT = dem Winkel PNT (Sphär. Trig. §. 382. II. Zuſ.);
ferner der ſpäriſche Winkel MPT = 90° (Nr. 3.) und MTP = MOP (ſphär. Trig. §. 381. II. Zuſ.) = O (Nr. 10.).

16. In eben dieſem Dreyeck iſt daher
1 : sin. PT = tang. MTP : tang. MP (Sphär. Trig. §. 387.)
1 : sin. PNT = tang. O : tang. v (Nr. 15.), mithin
tang. O sin. PNT = tang. v, und

17. $\text{tang. } O^2 \times \text{sin. } PNT^2 = \text{tang. } v^2$

18. Verzeichnet man eben ſo aus T in den drey Ebenen MTN, NTP, MTP mit einem beliebigen Halbmeſſer Kreiſe, ſo entſteht ebenfalls ein ſphäriſches

Dreyeck, welches indeſſen der Triangel MNP vorſtellen kann.

19. In dieſem ſphäriſchen Dreyecke iſt nun wieder
der Bogen MN = dem Winkel MTN am Mittelpuncte,
der Bogen NP = dem Winkel NTP
der Bogen MP = dem Winkel MTP = α (Nr. 7.);
der ſphäriſche Winkel MPN = 90°, und
MNP = MOP = O.

20. Ferner iſt:
1 : sin. NP = tang. MNP : tang. MP, das iſt:
1 : sin. NTP = tang. O : tang. α, oder auch
1 : cos. PNT = tang. O : tang. α (Nr. 11.), mithin
tang. O. cos. PNT = tang. α, und

21. $\text{tang. } O^2 \times \cos. PNT^2 = \text{tang } \alpha^2$
$\text{tang. } O^2 \times \sin. PNT^2 = \text{tang. } v^2$ (Nr. 17.) alſo

$$\text{tang.} O^2 [\sin. PNT^2 + \cos. PNT^2] = \text{tang.} \alpha^2 + \text{tang.} v^2$$
$$\text{tang.} O^2 = \text{tang.} \alpha^2 + \text{tang.} v^2$$
$$= \frac{a^2}{4 R^2 \pi^2} + \frac{c^2}{(R\ r)^2}$$ (Nr. 7 u. 13.), folglich

22. $$\text{tang. } O = \sqrt{} [\text{tang. } \alpha^2 + \text{tang. } v^2]$$
$$= \sqrt{\left[\frac{a^2}{4R^2 \pi^2} + \frac{c^2}{(R-r)^2}\right]}$$

wodurch alſo die geſuchte Neigung O (Nr. 10.) gefunden iſt.

I. Zuſaz. Für die vierſeitige Schraube iſt c = o (§. 149.) mithin auch tang. v = o (Nr. 13.), folglich
$\text{tang. } O = \text{tang. } \alpha = \frac{a}{2 R \pi}$ (Nr. 22.).

II. Zuſaz. In beyden Fällen iſt nun tang. O; alſo der Winkel O eine beſtändige Größe, folglich hat für einen Schraubengang jedes Element gegen einen mit der Grundfläche parallelen Querſchnitt gleiche Neigung.

§ 151.

Lehrſaz.

Wenn am Umfange der Spindel eine Kraft P eine dreyſeitige Schraube um ihre Axe in der befeſtigten Mutter zu drehen ſtrebt, und dadurch die Spindel zum Steigen oder Sinken ſollicitirt (§. 149. III. Zuſ.), die Laſt Q aber auf die Spindel nach einer der lezten entgegengeſezten Richtung drückt, ferner R den Halbmeſſer der Spindel, a die Höhe eines Schraubenganges, ϱ den mittlern Halbmeſſer (§. 148 I. Zuſ.) bezeichnen, ſo iſt für den Zuſtand des Gleichgewichtes, wenn die Reibung nicht in Anſchlag kömmt:

$$P : Q = \frac{\varrho}{R} a : 2R\pi.$$

Aufloͤſung.

1. Die Laſt Q drücket die Schraubenflächen der männlichen Schraube gegen die Schraubenflächen der Schraubenmutter, und dieſer Druck verbreitet ſich auf alle Gänge, welche ineinander eingreiffen, gleichförmig, ſind alſo deren n, ſo leidet jeder Gang der Schraubenmutter nach der zur Axe parallelen Richtung einen Druck $q = \frac{1}{n} Q$.

2. Stellet nun (Fig. 62.) MNnm ein Element eines ſolchen belaſteten Ganges der Schraubenmutter vor, ſo verhält ſich, da die Laſt q auf alle Elemente gleichförmig vertheilet iſt, der auf dieſes Element treffende Antheil des Druckes, zu jenem eines ganzen Ganges, wie dieſes Element zu einem ganzen Gang, mithin auch:

$dq : q = dx : 2R\pi$ (§. 147.) VIII. Zuſ.), und

3. $$dq = \frac{q\,dx}{2R\pi} = \frac{Q\,dx}{2nR\pi} \text{ (Nr. 1.)}$$

4. Behält man nun die §. 150. Nr. 1 - 13. angezeigte Construction, und angenommenen Bezeichnungen, ſo liegt auf der ſchiefen Ebene MNnm, welche gegen den zur Grundfläche der Spindel durch N gelegten parallelen Querſchnitt die Neigung MOP = O, die Laſt dq.

5. Dieſe Laſt äuſſert nun gegen die Ebene des Elementes einen ſenkrechten Druck $= \frac{dq}{\cos. O}$, und

6. ein Streben zur Bewegung nach einer zu PO parallelen Richtung = dq tang. O (Reine Mech. §. 159. I. Zuſ.).

7. Der ſenkrechte Druck (Nr. 5.) wird durch die Feſtigkeit der Schraubenfläche aufgehoben, hingegen

8. die leztere Kraft (Nr. 6.) nach der zu PO parallelen Richtung läßt ſich wieder in zwey Seitenkräfte zerlegen, nemlich nach der Richtung PN des Halbmeſſers der Spindel, und nach der Richtung PT, welche auf PN ſenkrecht ſteht, und daher eine Tangens vom Querſchnitte, alſo vom Umfange der Spindel iſt.

9. Erſtere Kraft nach PN wird = dq. tang. O. cos. NPO = dq. tang. O sin. PNT.

10. Leztere nach PT = dq tang. O sin. NPO (Reine Mech. §. 53. IX Zuſ.), = dq tang. O cos. PNT = dq tang. [illegible] (§. 150. Nr. 20.).

11. Der Druck nach PN wird durch einen ähnlichen Gegendruck eines auf der entgegengeſezten Seite der Axe liegenden Elementes allemal aufgehoben.

12. Der Schwerpunct von dq fällt nun weder in einen Punct M der äuſſern, noch einem Punct N der innern Schraubenlinie, ſondern in einen Punct der

mittlern Schraubenlinie (§. 148. I. Zuſ.), bezeichnet alſo ϱ den mittlern Halbmeſſer, ſo iſt das Moment der Kraft Nr. 10. gegen die Axe der Spindel =

$$\varrho\, d\, q\, \text{tang.} O. \cos. PNT = \varrho\, d\, q\, \text{tang.}\, \alpha$$

$$= \frac{\varrho Q dx}{2nR\pi} \cdot \frac{a}{2R\pi} \text{(N.3 u. §. 150, N. 7.)}$$

$$= \frac{\varrho a Q dx}{4nR^2\pi^2}, \text{ und}$$

13. Für jedes beliebige Stück eines Ganges, wozu x als Abſciſſe der äuſſern Schraubenlinie gehört, iſt daher

$\int \frac{\varrho a Q dx}{4nR^2\pi^2} = \frac{\varrho a Q x}{4nR^2\pi^2}$, wo keine Const. addirt werden darf, weil für $x = 0$, auch $dq = 0$ iſt.

14. Für einen ganzen Gang wird nun $x = 2R\pi$; das Moment, mithin die Kraft nach der Richtung PT,

$$= \frac{\varrho a Q . 2R\pi}{4nR^2\pi^2} = \frac{\varrho a Q.}{2nR\pi}, \text{ und folglich}$$

15. für alle n Gänge, welche in einander eingreifen (Nr. 1.) $= \frac{\varrho a Q}{2R\pi}$

16. Nun wirket die Kraft P am Umfange der Spindel, ihr Moment iſt alſo R. P, mithin im Zuſtande des Gleichgewichtes wird

17. $R.P = \frac{\varrho . a . Q}{2R\pi}$, folglich

$$P : Q = \frac{\varrho}{R} a : 2R\pi;$$

I. Zuſaz. Da bey der vierſeitigen Schraube tang. O = tang. α (§. 150. I. Zuſ.), ferner der Winkel PNT = o, weil T mit P zuſammenfällt, ſo iſt

cos.

cos. PNT = 1, mithin dq tang. O. cos. PNT = d q. tang. α wie Nr. 10., folglich gilt auch der aufgeſtellte Saz für eine vierſeitige Schraube.

II. Zuſaz. Wirket die Kraft P ſenkrecht auf einen Hebelsarm f, welcher durch die Spindel geſteckt iſt, ſo wird Nr. 17. $f\,P = \frac{\varrho\, a\, Q}{2 R \pi}$, mithin

$P : Q = \frac{a}{f} : \frac{2 R \pi}{\varrho}$, das iſt, die Kraft P darf bey einer gegebenen Laſt Q um ſo geringer ſeyn, je kleiner die Höhe a eines Schraubenganges, und je größer der Hebelsarm f iſt.

III. Zuſaz. Als mittlerer Halbmeſſer läßt ſich Nr. 12. $\varrho = \frac{R + r}{2}$ annehmen.

§. 152.

Aufgabe.

Es bleibt alles wie §. 151., man ſuchet das Verhältniß zwiſchen P und Q, wenn die Reibung mit in Anſchlag gebracht wird, und λ den Reibungscoefficienten bezeichnet, ferner die Kraft P der Laſt Q ſo das Gleichgewicht halten ſoll, daß bey der mindeſten Zunahme der Kraft P nach ihrer Richtung ſich die dreyſeitige Schraube in der Mutter zu drehen anfängt.

Aufloſung.

Des Zuſammenhanges wegen werden die Nr. fortgeſezt.

18. Man betrachte wieder das Element der Schraubenmutter (Fig. 62) MNnm, welches gegen den durch N zur Grundfläche parallel gelegten Querſchnitt die Neigung MOP = O hat.

19. Auf der Ebene dieſes Elementes liegt die Laſt dq (Nr. 2 und 3.) $= \frac{Q\,dx}{2nR\pi}$

20. Dieſer Laſt würde nach der zu OP parallelen Richtung die Kraft $\frac{dq[\text{tang.}\,O+\lambda]}{1-\lambda\ \text{tang.}\,O}$ (§. 141, VII. Zuſ.) das Gleichgewicht halten, mithin

21. hat die Laſt des Elementes, die Reibung mit in Anſchlag gebracht, nach der entgegengeſezten, das iſt, nach der zu PO parallelen Richtung ein Streben zur Bewegung von eben dieſer Größe.

22. Zerlegt man nun dieſe Seitenkräfte ſelbſt wieder wie Nr. 8–10. in zwey Seitenkräfte nach der Richtung des Halbmeſſers PN, und der auf leztern ſenkrechten Richtung, oder Tangens PT, ſo wird

23. erſtere Kraft durch einen gleichen Seitendruck eines gegenüberliegenden Elementes wie Nr. 11. ebenfalls aufgehoben, hingegen wird die Seitenkraft nach PT nach Nr. 10.

$$= \frac{dq[\text{tang}\,O+\lambda]}{1-\lambda\,\text{tang.}\,O}\cos.\,PNT; \text{ und}$$

24. ihr Moment gegen die Spindel

$$= \frac{\varrho\,dq[\text{tang.}\,O+\lambda]}{1-\lambda\ \text{tang.}\,O}\cos.\,PNT$$

25. Nun iſt $\cos.\,PNT = \frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{tang.}\,O}$ (§. 150, N. 20.)

$$= \frac{a}{2R\pi\cdot\text{tang.}\,O}$$ (§. 148. III. Zuſ.), mithin wird obiges Moment, wenn man dieſen Werth, ſo wie ſtatt dq jenen Nr. 19., ſezet

$$26. = \frac{\varrho\,Q\,dx}{2nR\pi}\cdot\frac{\text{tang.}\,O+\lambda}{1-\lambda\,\text{tang.}\,O}\cdot\frac{a}{2R\pi\,\text{tang.}\,O}$$

$$= \frac{a\varrho\,Q\,dx}{4nR^2\pi^2}\cdot\frac{\text{tang.}\,O+\lambda}{(1-\lambda\,\text{tang.}\,O)\,\text{tang.}\,O}$$

27. Für ein Stück eines Ganges wie Nr. 13., iſt das Moment $= \frac{\varrho a Q x}{4 n R^2 \pi^2} \cdot \frac{\text{tang. } O + \lambda}{(1-\lambda \text{ tang. } O) \text{ tang. } O}$

28. Für $x = 2 R \pi$, oder einen ganzen Gang; iſt eben dieſes Moment $= \frac{\varrho n Q . 2 R \pi}{4 n R^2 \pi^2} \cdot \frac{\text{tang. } O + \lambda}{(1-\lambda \text{ tang } O) \text{ tang. } O}$

$= \frac{\varrho a Q}{2 n R \pi} \cdot \frac{\text{tang. } O + \lambda}{(1-\lambda \text{ tang. } O) \text{ tang. } O}$, folglich

29. Für alle n Gänge, welche ineinander eingreifen, mithin durch Q einen Druck leiden, iſt das geſammte Moment $= \frac{\varrho a Q}{2 R \pi} \cdot \frac{\text{tang. } O + \lambda}{(1-\lambda \text{ tang. } O) \text{ tang. } O}$

30. Soll nun die Kraft P am Umfange der Spindel dieſer Laſt das Gleichgewicht halten, ſo muß

$R P = \frac{\varrho a Q}{2 R \pi} \cdot \frac{\text{tang. } O + \lambda}{(1-\lambda \text{ tang. } O) \text{ tang. } O}$ ſeyn

31. Da nun $\text{tang. } O = \sqrt{\left[\frac{a^2}{4 R^2 \pi^2} + \frac{c^2}{(R-r)^2}\right]}$ (§. 150.) aus der Beſchaffenheit der gegebenen dreyſeitigen Schraube gegeben iſt, ferner $\varrho = \frac{R + r}{2}$ geſezt werden kann, ſo iſt dadurch (Nr. 30.) P vollkommen beſtimmt, mithin die Aufgabe aufgelöſet.

I. Zuſaz. Wirket die Kraft P auf einen durch die männliche Schraube geſteckten Hebelsarm f ſenkrecht, ſo wird $P . f = \frac{\varrho a Q [\text{tang. } O + \lambda]}{2 R \pi [1-\lambda \text{ tang. } O] \text{ tang. } O}$

II. Zuſaz. Soll bey einer dreyſeitigen Schraube die Kraft P am Hebelsarm f bloß verhindern, daß die Laſt Q, welche die Spindel nach der Richtung ih-

rer Axe drückt, lezterer nicht abwärts treibet, mithin ſich ſolche nicht zu drehen anfängt, ſo wird (Nr. 20.) die Seitenkraft nach der zu PO parallelen Richtung

$$= \frac{dq\,(\text{tang}\ O - \lambda)}{1 + \lambda\ \text{tang}.\ O}\ (\S.\ 137.\ \text{III. Zuſ.});$$

da ſonſt alles übrige unverändert bleibt, ſo erhält man durch ähnliches Verfahren wie Nr. 22 - 30.

$$P\ f = \frac{\varrho\, a\, Q\,[\text{tang}.\,O - \lambda]}{2R\pi\,[1 + \lambda \text{tang}.\,O]\ \text{tang}.\,O}$$

wo ebenfalls tang. O aus §. 150. beſtimmt iſt.

III. Zuſaz. Bey einer vierſeitigen Schraube, wenn die Kraft P am Hebelsarm f der Laſt Q ſo das Gleichgewicht halten ſoll, daß bey einer Zunahme von P eine Umdrehung der Spindel nach der Richtung dieſer Kraft erfolgt, bleibt alles wie im erſten Zuſaz, nur iſt in dieſem Falle:

$$\text{tang}.\ O = \text{tang}.\ \alpha = \frac{a}{2R\pi}\ (\S.\,150.\ \text{I. Zuſ.}),\ \text{alſo}$$

$$\text{tang}.\ O + \lambda = \frac{a}{2R\pi} + \lambda = \frac{a + 2\lambda R\pi}{2R\pi}$$

$$[1 - \lambda\,\text{tang}.\,O]\,\text{tang}.O = \left[1 - \frac{a\lambda}{2R\pi}\right]\ \frac{a}{2R\pi}$$

$$= \frac{2R\pi - a\lambda}{2R\pi} \cdot \frac{a}{2R\pi},\ \text{mithin}$$

$$P f = \frac{\varrho\, a\, Q}{2R\pi} \cdot \frac{a + 2\lambda R\pi}{2R\pi} \times \frac{4R^2\pi^2}{a\,(2R\pi - a\lambda)}$$

$$= \frac{\varrho.\,Q\,(a + 2\lambda R\pi)}{2R\pi - a\lambda}$$

IV. Zuſaz. Soll hingegen bey eben dieſer Schraube die Kraft P bloß das Umdrehen der Schraube verhindern, ſo wird aus dem II. Zuſaz auf ähnliche Art

$$P f = \frac{\varrho.\,Q\,(a - 2\lambda R\pi)}{2R\pi + a\lambda}.$$

V. Zuſaz. Bey der dreyſeitigen Schraube, wenn $\text{tang. } O - \lambda = o$, ſo wird im IIten Zuſ. Pf, mithin $P = o$, das iſt, die Reibung allein hält dem Drucke der Laſt Q das Gleichgewicht, es mag Q ſo groß wie immer ſeyn.

In dieſem Falle wird alſo

$$\lambda = \text{tang. } O = \sqrt{\left[\frac{a^2}{4R^2\pi^2} + \frac{c^2}{(R-r)^2}\right]} \text{ (§. 150.)}$$

VI. Zuſaz. Bey der vierſeitigen Schraube, wenn $a - 2\lambda R\pi = o$, ſo iſt im IVten Zuſaz auch P. f, mithin auch $P = o$, die Reibung hält alſo für ſich ſchon mit jeder noch ſo großen Laſt das Gleichgewicht.

In dieſem Falle wird $\lambda = \frac{a}{2R\pi} = \text{tang. } \alpha$ (§. 146. VI und VII. Zuſ).

VII. Zuſaz. Die Reibung wird um ſo mehr im Stande ſeyn, jeder Laſt Q das Gleichgewicht zu halten, wenn bey der dreyſeitigen Schraube $\lambda > \text{tang. } o$, oder bey der vierſeitigen $\lambda > \frac{a}{2R\pi}$ iſt, denn in dieſen Fällen iſt $\text{tang. } O - \lambda$ ſo wie $a - 2\lambda R\pi$ negativ, wodurch aber doch nach der entgegengeſezten Richtung keine Bewegung entſteht, weil ſich die Reibung immer nur leidend verhält.

VIII. Zuſaz. Die Schraube kann alſo ſowohl zur Hebung, als zur Befeſtigung großer Laſten ſehr vortheilhaft angewendet werden.

IX. Zuſaz. Wenn die äuſſere oder männliche Schraube unbeweglich, dafür aber die Schraubenmutter beweglich iſt, und auf leztere die Laſt Q zur Axe der Spindel parallel drückt oder zieht, ſo wird nun die Schraubenmutter gegen die äuſſere Schraube ge-

drückt, und wenn n Gänge ineinander eingreiſen, ſo kömmt wieder auf einen Gang der Druck $\frac{1}{n}$ Q; da nun die Gänge der äuſſern mit jenen der Schraubenmutter ganz einerley Bildung haben (§. 149), ſo gelten eben- falls die bisher erwieſenen Verhältniſſe zwiſchen Kraft und Laſt, ſo iſt's z. B. bey der **gewöhnlichen Preſſe** (Fig. 63.).

Sie beſteht aus zwey Brettern AB, DE; ferner aus den beyden männlichen Schrauben Cc, und ihren Schraubenmüttern FG, F′G′; erſtere ſind auf dem Brette AB befeſtiget, und leztere ſind beweglich; wird alſo zwiſchen die beyden Bretter ein elaſtiſcher Körper gebracht, ſo kann er durch Umdrehung der beyden Schraubenmütter zuſammengepreſſet werden.

X. Zuſaz. Da bey einer Umdrehung der Spin- del, und wenn dieſe befeſtiget iſt, bey einer Umdre- hung der Schraubenmutter die Bewegung nach der Richtung der Axe (§. 149. III. Zuſ.) doch nur die Höhe eines Ganges beträgt, die Höhe aber eines Ganges im Verhältniſſe zum Umfange der Spindel ſehr klein iſt, ſo dient die Schraube zugleich als ein Micrometrum, um entweder ſehr kleine Bewegungen zu erhal- ten, oder die Gröſze ſolcher kleinen Bewegungen mit Schärfe zu meſſen.

III. Hauptſtück.

Von der Rolle.

I. Abſchnitt.

Von der einfachen Rolle.

§. 153.

Aufgabe.

Um eine unbewegliche Rolle (Reine Mech. §. 73.) iſt ein Seil gelegt, auf der einen Seite zieht die Laſt Q, auf der andern nach entgegengeſezter Richtung die Kraft P, man ſoll leztere beſtimmen, wenn ſie bey der geringſten Vermehrung das Uebergewicht erhalten, mithin nach ihrer Richtung eine Bewegung erfolgen ſoll.

Auflöſung.

1. Wenn man von aller Nebenlaſt abſtrahirt, ſo muß $P = Q$ ſeyn (Reine Mechan. §. 73. I. Zuſ.).

2. Nimmt man hingegen zugleich auf die Nebenlaſt, welche durch die Zapfenreibung, und durch die Steife des Seils entſteht, Rückſicht, ſo wird:

3. $Pr = Qr + e \sin.\alpha \sqrt{[P^2 + Q^2 + 2PQ \cos.\gamma]} + d^m (a + bQ)$ (§. 82. I. Zuſ.)

4 Aus dieſer quadratiſchen Gleichung läßt ſich bey einer gegebenen Vorrichtung jedesmal P beſtimmen;

5. Es bezeichnet nemlich r den Halbmeſſer der Rolle, e entweder den Halbmeſſer der kreisrunden Oeffnung MNL (Fig. 37.) der Rolle, durch welche der

Bolzen geht, um welchen ſich die Rolle drehet, oder den Halbmeſſer des Bolzens, wenn ſich (Fig. 36.) die Rolle ſammt ihrem Bolzen in Pfannen dreht; d iſt der Durchmeſſer des Seils, woran die Laſt und Kraft ziehen.

6. Die Größen m, a, b müſſen als durch Verſuche beſtimmte Größen ſchon anderswoher bekannt ſeyn, will man, nach §. 76. $m = 1{,}7$ und nach §. 77. $a = 2{,}45$, $b = 0{,}053$ ſezen, ſo müſſen r, e, d in Pariſer Duodecimallinien, und Q in Pariſer Pfunden ausgedrückt werden (§. 77. VIII. Zuſ.).

7. Durch die Richtung des Seils auf den beyden Seiten iſt der Winkel $AMB = \gamma$ beſtimmt.

8. Da endlich der Reibungscoefficient λ ebenfalls durch Verſuche als bekannt vorausgeſezt wird, und $\lambda = \text{tang.}\,\alpha$ (§. 82. Nr 18.), ſo kann man entweder mittels trigonometr. Tabellen den sin. α beſtimmen, oder weil doch α jedesmal ein kleiner Winkel iſt, $\lambda = \sin.\alpha$ ſezen, will man aber ſtatt sin. α den Reibungscoefficient in die Rechnung bringen, ſo iſt

9. $\lambda = \text{tang.}\,\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos.\alpha}$, mithin

$$\lambda^2 = \frac{\sin.\alpha}{1-\sin.\alpha^2};\ \lambda^2 - \lambda^2 \sin.\alpha^2 = \sin.\alpha^2, \text{ alſo}$$

$$\lambda^2 = \sin.\alpha^2\,(1+\lambda^2), \text{ folglich}$$

$$\sin.\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$$

I. Zuſaz. Aus Nr. 3. wird $P = Q$

$$+ \frac{e \sin.\alpha \sqrt{[P^2 + Q^2 + 2PQ\cos.\gamma]} + d^m (a + bQ)}{r}$$

Die Kraft muß daher wegen der Nebenlaſt größer als

die Hauptlaſt Q ſeyn, eine zweckmäßige Vorrichtung erfodert daher,

a. daß der Halbmeſſer der Rolle r groß, hingegen der Halbmeſſer e (Nr. 5.) ſo klein als möglich gemacht werde,

b. daß man durch gehörige Politur und angebrachte Schmier den Reibungscoefficienten λ, und dadurch alſo sin. α vermindere,

c. daß man endlich der Rolle ſo eine Lage gebe, daß cos. γ entweder ſehr klein, oder gar negativ, alſo γ entweder ein rechter oder ſtumpfer Winkel wird.

II. Zuſaz. Wenn (Fig. 36 und 37.) AMB $= 90° = \gamma$, alſo cos. $\gamma = 0$, ſo iſt

$$P = Q + \frac{e \sin.\alpha \sqrt{(P^2+Q^2)} + d^m(a+bQ)}{r}$$

III. Zuſaz. Sind die Seile auf beyden Seiten parallel, ſo iſt $\gamma = 0$, alſo cos. $\gamma = 1$, und

$$P = Q + \frac{e \sin.\alpha \sqrt{[P^2+Q^2+2PQ]} + d^m(a+bQ)}{r}$$

$$= Q + \frac{e \sin.\alpha (P+Q) + d^m (a+bQ)}{r}$$

Aus dieſer Gleichung läßt ſich nun leicht P beſtimmen, denn $Pr = Qr + e \sin.\alpha P + e \sin.\alpha Q + d^m (a+bQ)$

$$P(r - e \sin.\alpha) = Q(r + e \sin.\alpha) + d^m (a+bQ)$$

folglich $P = \dfrac{Q(r + e \sin.\alpha) + d^m (a+bQ)}{r - e \sin.\alpha}$

IV. Zuſaz. Sind die Richtungen des Seils auf beyden Seiten vertical abwärts (Fig. 64.), ſo muß die Unterlage zugleich das Gewicht der Rolle, und des Seils

nebſt P und Q tragen, und dadurch wird die Reibung vermehrt, bezeichnet nun q die Summe der Gewichte der Rolle und des Seils, ſo wird

$$Pr = Q.r + e\sin.\alpha\{P + Q + q\} + d^m(a + bQ) \text{ (§.83.)}$$

$$P(r - e\sin.\alpha) = Qr + r\sin.\alpha(Q + q) + d^m(a + bQ)$$

$$P = \frac{Qr + e\sin.\alpha(Q + q) + d^m(a + bQ)}{r - e\sin.\alpha}$$

V. Zuſaz. Um die Laſt Q in Bewegung zu ſezen, wird alſo eine gröſsere Kraft als P erfodert, hat aber einmal die Bewegung ihren Anfang genommen, und dadurch die Laſt Q eine Geſchwindigkeit c erlangt, ſo reicht nun jedesmal die angegebene Kraft P zur gleichförmigen Fortſezung zu (§. 10.).

§. 154.

Aufgabe. (Fig. 64.)

Eine unbewegliche Rolle von Meſſing, deren Halbmeſſer r = 24 Linien, laſſe ſich um einen eiſernen wagrechten Bolzen, deſſen Halbmeſſer e = 6 Linien iſt, in verticaler Lage drehen; um die Rolle ſey ein Seil gelegt, deſſen Durchmeſſer = 9 Linien; auf der einen Seite hange das Gewicht Q = 600 ℔., und die Rolle ſammt dem Seil halte an Gewicht zuſammen q = 25 ℔., alles in Pariſer Maaße und Gewicht, man ſucht für die andere Seite das Gegengewicht P, ſo daß, bey geringſter Vermehrung deſſelben, P das Uebergewicht erhält.

Aufloſung.

1. Da die Rolle eine verticale Lage hat, ſo ſpannen zu beyden Seiten die Gewichte Q, P die Seilsende parallel, mithin iſt $\gamma = 0$, und

2. $P = \frac{Qr + e\sin.\alpha\,(Q+q) + d^m\,(a+bQ)}{r - e\sin.\alpha}$

(§. 153. IV. Zuſ.)

3. Da ferner alles im franzöſiſchen Pariſer Maaſſe und Gewicht gegeben iſt, ſo wird

4. $d^m\,(a+bQ) = 9^{1,7}\,(2,45 + 0,053 \times 600)$
(§. 77. VIII. Zuſ.). $\quad = 9^{1,7} \times 34,25$

5. Nun iſt $\log. 9 = 0,9542425$
$\qquad\quad 1,7 = \qquad 1,7$

$$\begin{array}{r} 66796975 \\ 9542425 \\ \hline \end{array}$$

mithin $\log. 9^{1,7} = 1,6222122$
$\qquad \log. 34,25 = 1,5346606$

$\log. 34,25 . 9^{1,7} = 3,1568728$, alſo

6. $d^m\,(a+bQ) = 1435,07$

7. Vermög §. 88. VI. Zuſ. iſt der Reibungscoeffiſcient oder $\lambda = 0,163 = \text{tang.}\,\alpha$ (§. 153. Nr. 8.), oder $= \sin.\alpha$ beynahe, mithin

8. $e\sin.\alpha\,(Q+q) = 6 \times 0,163 \times 625$
$\qquad\qquad = 611,25$

9. $Qr = 600 \times 24 = 14400$, mithin, wenn man dieſe Werthe Nr. 6, 8 und 9 addirt, ſo wird

10. $Qr + e\sin.\alpha\,(Q+q) + d^m\,(a+bQ)$
$\qquad = 1435,07 + 611,25 + 14400$
$\qquad = 16446,32$

11. Ferner $r - e\sin.\alpha = 24 - 0,978 = 23,022$ folglich, dieſe Werthe Nr. 2. geſezt:

12. $P = \frac{16446,32}{23,022} = \frac{1644632\text{0}}{23022} = 714,37$ ℔.

§. 155.

Aufgabe.

Es bleibt alles, wie §. 153., man ſoll die Kraft P angeben, welche gerade hinreichet, die Laſt Q in ihrer Lage ruhig zu erhalten, ſo daß nun Q bey ihrer mindeſten Zunahme das Uebergewicht erhalten würde.

Auflöſung.

1. Nimmt man aus §. 153. Nr. 3. die Formel:

$$Pr = Qr + e \sin.\alpha \sqrt{[P^2 + Q^2 + 2PQ \cos.\gamma]} + d^m (a + bQ)$$

ſo ergiebt ſich,

2. daß im gegenwärtigen Falle das Moment der Reibung, da ihre Richtung allemal jener, nach welcher eine Bewegung erfolgen ſoll, gerade entgegengeſezt iſt, vom Momente der Laſt abgezogen werden muß.

3. Ferner, da bey dem Uebergewichte der Laſt Q auf der andern Seite, wo die Kraft P angebracht iſt, das Seil ſich aufwinden müßte, und durch die Steiffe des Seils ein Hinderniß $\frac{d^m}{r}(a + bP)$ entſteht, ſo muß auch das Moment derſelben von jenem der Laſt abgezogen werden, mithin wird

4. $Pr = Qr - e \sin.\alpha \sqrt{[P^2 + Q^2 + 2PQ \cos.\gamma]} - d^m (a + bP)$

Aus dieſer quadratiſchen Gleichung läßt ſich nun jedesmal P beſtimmen.

I. Zuſaz. Je größer $\cos.\gamma$ iſt, deſto vortheilhafter iſt die Anrichtung, ſind die beyden Seilsende parallel geſpannet, ſo iſt $\gamma = 0$, und $\cos.\gamma = 1$, alſo

$$Pr = Qr - e \sin.\alpha (P + Q) - d^m (a + bP)$$

$$= Qr - e \sin.\alpha P - e \sin.\alpha Q - d^m a - d^m bP$$

$$P (r + e \sin.\alpha + d^m b) = Qr - e \sin.\alpha Q - d^m a$$

$$P = \frac{Qr - (e\sin.\alpha.Q + d^m a)}{r + e\sin.\alpha + d^m b}$$

II. Zuſaz. Sind die Richtungen der beyden Seile vertical abwärts, und bezeichnet q das Gewicht des Seils ſammt der Rolle, ſo iſt

$$P = \frac{Qr - (e\sin.\alpha(Q+q) + d^m a)}{r + e\sin.\alpha + d^m b}$$

III. Zuſaz. Nimmt man wie §. 154. $Q = 600$ ℔., $q = 25$ ℔.; $r = 24$, $e = 6$, $d = 9$ Linien alles im Pariſer Maaße und Gewichte; dann $\sin.\alpha = 0,163$; $a = 2,45$; $b = 0,053$; ſo iſt:

$$\begin{array}{ll} \log. d^m = 1,6222122; & \log. d^m = 1,6222122 \\ a = 0,3891661 & \log. b = 0,7242759-2 \\ \hline \log. d^m a = 2,0113783; & \log. d^m b = 0,3464881 \\ d^m.a = 102,654; & d^m b = 2,221 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} e\sin.\alpha(Q+q) & = 611,25 \\ \hline e\sin.\alpha(Q+q) + d^m a & = 713,904 \\ Q\,r & = 14400 \\ \hline Qr - [e\sin.\alpha(Q+q) + d^m a] & = 13686,096 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} r & = 24 \\ e\sin.\alpha & = 0,978 \\ d^m b & = 2,221 \\ \hline r + e\sin.\alpha + d^m b & = 27,199, \text{ folglich} \end{array}$$

$$P = \frac{13686,096}{27,199} = 503,18 \text{ ℔.}$$

§. 156.

Aufgabe. (Fig. 64.)

Um eine unbewegliche Rolle, welche ſich um ihren wagrecht befeſtigten Bolzen drehen läßt, iſt ein Seil gelegt, auf der einen Seite hängt die Laſt Q, auf der andern Seite zieht die Kraft P das Seil vertical abwärts, und ertheilet dadurch der Laſt Q eine ſenkrechte Bewegung aufwärts, man ſucht aus dem gegebenen Verhältniſſe dieſer beyden Größen, und aus den gegebenen ſämmtlichen Dimenſionen der Rolle und des Seils, die Beſchaffenheit der Bewegung.

Auflöſung.

1. Man behalte alle bisher bey der Rolle angenommenen Bezeichnungen, ſo wirket

2. am Umfange der Rolle die Kraft P, ihr Moment iſt alſo r P.

3. Auf der andern Seite zieht nach der entgegengeſezten Richtung die Laſt Q, ihr Moment iſt daher ebenfalls r Q.

4. Gegen die Bewegung, oder Umdrehung der Rolle um ihren Bolzen, welcher durch ihre kreisrunde Oeffnung geſteckt iſt, ſtemmet ſich die Reibung, da ſie am Umfange dieſer Oeffnung wirkſam iſt, ſo iſt ihr Moment, wenn e den Halbmeſſer der Oeffnung bezeichnet, $e \sin. \alpha \,(P+Q+q)$ (§. 82.).

5. Endlich wirket der Bewegung als Hinderniß an B die Seilsſteife $= \frac{d^m}{r}(a+bQ)$ (§. 73.), entgegen, mithin ihr Moment am Umfange der Rolle $= d^m(a+bQ)$.

6. Wegen der Verbindung muß auf der einen Seite die Laſt Q mit eben der Geſchwindigkeit ſteigen,

mit welcher auf der andern die Kraft P ſinket, ſo wie ſich mit eben dieſer Geſchwindigkeit die Rolle um ihren Bolzen drehen muß;

7. Dauert daher die Einwirkung der Kraft P während der beliebigen Zeit t, und bezeichnet u die daraus hervorgehende gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit für P und Q, ſo wie γ die der Rolle entſprechende Winkelgeſchwindigkeit, ſo iſt $r\gamma = u$, mithin

$$r\,d\gamma = du.$$

8. Bezeichnet ferner M die Maſſe, oder das Gewicht der Rolle ohne Bolzen, ſo iſt das Moment der Trägheit $k^2M = \frac{1}{2}Mr^2$ (Reine Mechan. §. 187. I. Zuſ.) am Umfange der Rolle iſt alſo ihr Umdrehungsmoment

$$= \frac{Mk^2d\gamma}{2gdt}\ (\S.11.) = \frac{\frac{1}{2}Mr^2d\gamma}{2gdt} = \frac{\frac{1}{2}Mrdu}{2gdt}\ (N.\ 7.)$$

9. Um endlich den Maſſen Q und P eben dieſelbe Geſchwindigkeit u zu ertheilen, ſind in ihren Schwerpuncten die Kräfte $\frac{Qdu}{2gdt}$, und $\frac{Pdu}{2gdt}$ (§. 6.) erfoderlich, wobey das Seil aber nicht in Anſchlag gebracht iſt, das Moment dieſer Kräfte am Umfange der Rolle iſt nun $\frac{rQdu}{2gdt}$, $\frac{rPdu}{2gdt}$.

10. Da nun die leztern Kräfte Nr. 8 und 9. den erſtern Nr. 2-5. zuſammen gleichgeltend ſind, ſo iſt

$$11.\quad \frac{\frac{1}{2}Mrdu}{2gdt} + \frac{rQdu}{2gdt} + \frac{rPdu}{2gdt}$$

$$= rP - rQ - e\sin.\alpha\,(P+Q+q) - d^m(a+bQ);$$

$$\frac{rdu}{2gdt}[\tfrac{1}{2}M+Q+P] = r[P-Q-\frac{e}{r}\sin.\alpha(P+Q+q)-\frac{d^m}{r}(a+bQ)]$$

$$12.\quad du = 2gdt\,\frac{P - Q - \frac{e}{r}\sin.\alpha\,(P+Q+q) - \frac{d^m}{r}\,(a+bQ)}{\frac{1}{2}M+Q+P}$$

13. Iſt nun die Kraft P eine unveränderliche Größe, ſo enthält leztere Gleichung nur die veränderlichen Größen u, und t, mithin wird

$$14.\quad u = 2gt\,\frac{P - Q - \frac{e}{r}\sin.\alpha\,(P+Q+q) - \frac{d^m}{r}\,(a+bQ)}{\frac{1}{2}M+Q+P}$$

wo kein Constans dazu kömmt, weil für $t = o$, auch $u = o$ iſt.

15. Bezeichnet s die Höhe, zu welcher während der Zeit t die Laſt Q gehoben wird, ſo iſt
$ds = udt$ (Reine Mechan. §. 38.), mithin

$$16.\quad ds = 2gtdt\,\frac{P - Q - \frac{e}{r}\sin.\alpha\,(P+Q+q) - \frac{d^m}{r}\,(a+bQ)}{\frac{1}{2}M+Q+P}$$

alſo

$$17.\quad s = gt^2\,\frac{P - Q - \frac{e}{r}\sin.\alpha\,(P+Q+q) - \frac{d^m}{r}\,(a+bQ)}{\frac{1}{2}M+Q+P}$$

wo ebenfalls keine Constans addirt werden darf.

18. Hört am Ende der Zeit t die Einwirkung der Kraft P auf, ſo ſteigt die Laſt Q durch die erlangte Geſchwindigkeit u für ſich, ohne daß die Seilsſteife, oder die Zapfenreibung der Rolle daran hinderlich iſt, während der Zeit $t = \frac{u}{2g}$ noch zur Höhe $s' = \frac{u^2}{2g}$ (Reine Mechan. §. 132.).

19. Die ganze Höhe, zu welcher die Laſt Q ſteigt, iſt alſo $S = s + s'$, und

20. die

20. die ganze Dauer der Zeit, während welcher die Laſt Q ſteigt oder $T = t + t'$.

21. Beſtimmet man alſo aus Nr. 14, 17, 18. die Werthe von u, s, s', t', ſo erhält man aus N. 19 u. 20. die ganze Dauer T der Bewegung, und die ganze Höhe S, zu welcher Q ſteigt.

§. 157.

Aufgabe. (Fig. 64.)

Bey dem Schlagwerke Nr. I. (§. 114. b.) iſt der Rammkloz $Q = 1320$ ℔., die Rolle hat eine kreisrunde Oeffnung, welche mit Meſſing gefüttert iſt, und der wagrecht befeſtigte Bolzen iſt von Eiſen, das Gewicht der hölzernen Rolle ſammt der meſſingenen Bixe oder $M = 104$ ℔., der Halbmeſſer der Rolle $r = 3$ Fuß 5 Zoll = 492 Duodec. Linien, der Halbmeſſer der Bixe $e = 1\frac{3}{4}$ Zoll = 21 Linien, die Dicke, oder vielmehr der Durchmeſſer des Seils $d = 2\frac{1}{2}$ Zoll = 30 Linien; von dieſem Seil wogen 3 Klafter, alſo 18 Fuß, 13 ℔., das Seil iſt gegen 70 Fuß lang, man kann alſo das Gewicht des ganzen Seils ſammt den damit verknüpften Nebenſeilen, an welchen die Arbeiter ziehen gegen 72 ℔. rechnen, ſo daß alſo das Gewicht deſſelben ſammt Rolle, oder $q = 72 + 104 = 176$ ℔.; die mittlere Höhe des Rammklozes betrug bey dem Gebrauche 4 Schuh, 10 Zoll, während 16241 Secunden wurden 6436 Schläge gemacht, und 54 Arbeiter zogen jedesmal an den einzelnen Seilen. Man ſoll nun die Größe der Geſammtkraft P, die erlangte Geſchwindigkeit u des Rammklozes, dann die Höhe s', zu welcher derſelbe durch die erlangte Geſchwindigkeit noch ſteigt, und die Zeit

t′, während welcher er leztere Höhe noch erreichet; beſtimmen.

Aufloſung.

Da dieſe Aufgabe als Beyſpiel unter jener des vorhergehenden §. enthalten iſt, ſo werden die Nr: fortgeſezet.

22. Alle Data ſind im baieriſchen Maaße und Gewichte beſtimmt, mithin iſt für die Seilsſteiffe $m = 1,7$, $a = 2$, $b = 0,048$ (§. 77. IX. Zuſ.), und

$$a + bQ = 2 + 0,048 \times 1320 = 65,36.$$

23. $\log. d = \log. 30 = 1,4771213$
$m = 1,7 = 1,7$

$$\begin{array}{r} 103398491 \\ 14771213 \\ \hline \end{array}$$

$\log. d^m = 2,5111062$
$\log. (a + bQ) = 1,8153120$
$c.\ dec.\ \log. r = 7,3080349 - 10$ (Arith. §. 249.)

$\log. \frac{d^m}{r} (a + bQ) = 1,6344531$, mithin

24. $\frac{d^m}{r} (a + bQ) = 43,1.$

25. In Beziehung der Reibung der meſſingenen Bixe auf dem eiſernen Bolzen iſt $\lambda = 0,16$ (§. 88. VI. Zuſ.) $=$ tang. α (§. 82. Nr. 18.), mithin ohne merklichen Unterſchied $=$ sin. α, alſo

26. $\frac{e}{r}$ sin. $\alpha = \frac{21}{492} \times 0,16 = 0,0068$

$\frac{e}{r}$ sin. $\alpha (P + Q + q) = 0,0068 (P + 1320 + 176)$

$= 0,0068\, P + 10,17$, und

27. $P - Q - \frac{e}{r} \sin.\alpha (P+Q+q) = P - 1320 - 0{,}0068P - 10{,}17$

$= 0{,}9932\,P - 1330{,}17$

28. $\frac{1}{2}M + Q + P = 52 + 1320 + P = P + 1372.$

29. Da ferner während 16241 Secunden 6436 Schläge gemacht wurden, ſo erfoderte ein Schlag $\frac{16241}{6436} = 2{,}54$ Sec.', wobey jedesmal der Rammkloz die Höhe von 4 Schuh 10 Zoll erreichte, und dann von derſelben wieder herabfiel.

30. Nimmt man nun an, daß die Arbeiter ihren Zug abwärts allemal in 1 Sec. vollendeten, und die übrige Zeit von 1,54 Sec. dazu verwendet wurde, ſich wieder aufrecht zu ſtellen, und zu dem nächſten Zug vorzubereiten, ſo iſt $t = 1$ Sec.

31. Ferner kann man annehmen, daß während dieſer Secunde der Rammkloz zur Höhe von 4 Schuh gehoben wurde, und dann durch die erlangte Geſchwindigkeit u noch zu der Höhe von 10 Zoll $= 0{,}83$ Schuh ſtieg, mithin iſt

32. $s = 4$; $s' = 0{,}83$.

33. Sezet man nun die Werthe Nr. 24, 27, 28, 30 und 32. in die Gleichung Nr. 17., ſo wird

34. $$4 = g\,\frac{0{,}9932\,P - 1330{,}17 - 43{,}1}{P + 1372}$$

$$= 16{,}8015\,\frac{0{,}9932\,P - 1373{,}27}{P + 1372}$$ (Reine Mech. §. 130. V. Zuſ.)

$$1 = 4{,}2004\,\frac{0{,}9932\,P - 1373{,}27}{P + 1372}$$

$$P + 1372 = 4{,}2004\,(0{,}9932\,P - 1373{,}27)$$
$$= 4{,}1718\,P - 5768{,}28$$

$1372 + 5768{,}28 = 3{,}1718\,P$; folglich

35. $P = \frac{7140,28}{3,1718} = \frac{7140280 0}{31718}$
$= 2251$ ℔.

36. Sezet man ferner dieſen Werth von P nebſt den oben Nr. 33. angeführten in die Gleichung Nr. 14., ſo wird

37. $u = 2g \frac{0,9932 \times 2251 - 1373,27}{2251 + 1372}$

$= 2g \frac{2235,69 - 1373,27}{2251 + 1372} = 2g \frac{862,42}{3623}$

38. Nun iſt log. g = 1,2253480 (R. M. §. 130. VI. Zuſ.)

log. 2	= 0,3010300
log. 862,42	= 2,9357188
log. 2g × 862,42	= 4,4620968
log. 3624	= 3,5590683
log. u	= 0,9030285, folglich

39. u = 7,9988 Fuß.

40. log. u	= 0,9030285 (Nr. 38.)
log. 2g	= 1,5263780
log. t′	= 0,3766505 - 1, (Nr. 18.) folglich

41. t′ = 0,238 Sec.

42. log. u	= 0,9030285
2	= 2
log. u²	= 2,8060570 - 1
log. 4g	= 1,8274080
log. s′	= 0,9786490 - 1 (Nr. 18), und

43. s′ = 0,952 Fuß, unbedeutend größer als Nr. 32.

44. Durch Nr. 35, 39, 41 und 43 iſt endlich die Aufgabe vollkommen aufgelöst.

I. Zuſaz. Vertheilet man die Geſammtkraft P auf die bey dieſem Schlagwerke angeſtellten 54 Arbeiter gleichheitlich, ſo iſt der auf einen treffende Antheil

$$= \frac{2251}{54} \text{℔.} = 41{,}7 \text{℔.}$$

II. Zuſaz. Vergleicht man die gegenwärtigen Reſultate bey dieſem Schlagwerke mit den obigen §. 114., ſo darf nicht vergeſſen werden, daß bey den aus §. 113. abgeleiteten Formeln weder die Reibung, noch die Seilsſteife, noch das Umdrehungsmoment der Rolle in Anſchlag gebracht ſind.

§. 158.

Aufgabe. (Fig. 65.)

Eine bewegliche Rolle, an welcher die Laſt Q hängt; wird durch ein umgelegtes Seil ſo gehalten, daß auf der einen Seite das Ende deſſelben in E befeſtiget iſt, auf der andern Seite aber die Kraft P in F das Seil vertical aufwärts zieht, man ſucht die Größe der Kraft P, wenn ſie der Laſt Q und allen Hinderniſſen zuſammen das Gleichgewicht hält, und bey geringſter Vermehrung das Uebergewicht bekömmt.

Auflöſung.

1. Wie bisher bezeichnen r den Halbmeſſer, q das Gewicht der Rolle ſammt der Hilſe, e den Halbmeſſer der Oeffnung, durch welchen der Bolzen geſteckt iſt, ſo wie bey der Reibung d, m, a, b die feſtgeſezten Bedeutungen beybehalten.

2. Die Laſt Q + q drücket die Rolle gegen ihren Bolzen vertical abwärts, dadurch entſteht zwiſchen dem

Zapfen und der Bixe die Reibung $\sin.\alpha\,(Q+q)$, deren Moment am Umfange der Bixe

$= e\sin.\alpha\;(Q+q)$ iſt.

3. Die Spannung des Seils AE ſey $= T$, ſo iſt T der ſpannenden Kraft gleich (Reine Mechan. §. 71. I. Zuſ.), mithin

4. ihr Moment bey $A = r.T$, und

5. das Moment der Seilsſteife an eben dieſer Stelle $= d^m\,(a+bT)$.

6. Nun ſoll die Kraft P auf der andern Seite, der Aufgabe gemäß, dieſen ſämmtlichen Kräften das Gleichgewicht halten, alſo iſt ihr Moment, oder

$$Pr = T.r + e\sin.\alpha\,(Q+q) + d^m\,(a+bT)$$

7. Im Zuſtande des Gleichgewichts muß aber auch der verticale Zug aufwärts jenem abwärts gleich ſeyn, mithin iſt

8. $T+P = Q+q$, alſo
$$T = Q+q-P$$

9. Sezet man ſtatt T dieſen Werth in die Gleichung Nr. 6., ſo wird

10. $$Pr = Qr + qr - Pr + e\sin.\alpha\,(Q+q) + d^m\,[a+b\,(Q+q-P)]$$

$$2Pr = (Q+q)(r+e\sin.\alpha) + d^m\,[a+b(Q+q)] - d^m bP$$

$$P\,(2r+d^m b) = (Q+q)\,(r+e\sin.\alpha) + d^m\,[a+b\,(Q+q)]$$

11. $$P = \frac{(Q+q)\,(r+e\sin.\alpha+d^m b)}{2r+d^m b} + \frac{d^m a}{2r+d^m b}$$

I. Zuſaz. Nr. 2. iſt die Laſt, welche auf den Bolzen drückt, mithin auch die Reibung etwas zu groß angenommen, denn nebſt der Laſt Q drückt nur die Hilſe, nicht aber die Rolle auf den Bolzen, indeſſen iſt dieſer Fehler ganz unmerklich.

II. Zuſaz. Soll die Laſt Q wirklich gehoben werden, ſo iſt eine größere Kraft als P erfoderlich, ſobald aber einmal die Bewegung eingeleitet iſt, und dadurch die Laſt eine gewiſſe Geſchwindigkeit c erlangt hat, ſo reicht zur gleichförmigen Fortſezung der Bewegung die Kraft P zu (§. 11.).

III. Zuſaz. Wenn man von aller Nebenlaſt abſtrahirt, ſo wird $P = \frac{1}{2}Q$ wie in der reinen Mech. §. 73. VI. Zuſ.

II. Abſchnitt.

Von der Zuſammenſezung mehrerer Rollen.

§. 159.

Erklärungen.

Wenn mehrere Rollen vermittels darübergeſchlungener Seile untereinander verbunden werden, um dadurch eine Laſt zu heben, ſo heißt die ganze Vorrichtung ein Rollenzug, ein Rollen-Syſtem, und zwar

a. ein Rollenzug der erſten Art, wenn (Fig. 66.) mehrere bewegliche Rollen B, D, F u. ſ. w. ſo untereinander verbunden ſind, daß immer das Seil, welches um eine Rolle gelegt iſt, auf der einen Seite in A, C, E u. ſ. f. an einem Balken, auf

der andern Seite aber, an der Hilſe der nächſt folgenden Rolle in D, F u. ſ. f. befeſtiget, bey der lezten beweglichen Rolle hingegen über eine unbewegliche Rolle GH geſchlungen, und am Ende deſſelben die Kraft P angebracht wird, wodurch die an der Hilſe der erſten beweglichen Rolle befeſtigte Laſt Q gehoben werden kann.

b. Ein Rollenzug der zweyten Art, wenn (Fig. 67.) bey der unterſten Rolle das eine Ende des Seils an einem Hebel, an welchem die Laſt Q hängt, in A befeſtiget, am andern Ende aber die Kraft P angebracht, bey allen folgenden Rollen aber das eine End ebenfalls an dem Hebel in C, E, G u. ſ. f., das andere End aber jedesmal an der Hilſe der nächſt vorhergehenden beweglichen Rolle in B, D, F u. ſ. w. befeſtiget wird, ſo daß endlich die ganze Vorrichtung mittels der lezten Rolle H, welche eine unbewegliche iſt, an einem Balken aufgehangen wird.

§. 160.

Aufgabe. (Fig. 66.)

Ein Rollenzug der erſten Art beſteht aus n gleichen beweglichen Rollen, wovon M das Gewicht jeder einzelnen bezeichnet, die ſämmtlichen Seile ſind nach verticalen Richtungen geſpannet: man ſucht für den Zuſtand des Gleichgewichtes das Verhältniß der Kraft P zur Laſt Q, wenn man dabey weder die Zapfenreibung bey den Rollen, noch die Steife der Seile in Anſchlag bringt.

Auflöſung.

1. Man ſeze die Spannung des erſten Seils $AB = t'$, die des zweyten $CD = t''$, die des dritten

$= t'''$, u. ſ. f., mithin jene des $n$ten Seils $= t^{(n)}$, wo alſo n keinen Exponenten einer Dignität bezeichnet.

2. Da für den Zuſtand des Gleichgewichtes bey der unbeweglichen ſowohl, als beweglichen Rolle das Seil auf beyden Seiten gleich geſpannt iſt (Reine Mech. §. 73. I und VIII. Zuſ.), ſo behält

3. das lezte oder $n$te Seil, welches noch um die unbewegliche Rolle G geht, und an welchem auf der andern Seite H die Kraft P angebracht iſt, unverändert die Spannung $t^{(n)}$, mithin

4. da P mit dieſer Spannung das Gleichgewicht halten ſoll, ſo iſt: $P = t^{(n)}$ (Reine Mechan. §. 71.).

5. Bey der erſten Rolle B, an welcher die Laſt Q hängt, tragen nun die beyden Seile AB, BD zuſammen dieſe Laſt Q nebſt dem Gewichte M der Rolle, mithin iſt auf jeder Seite die Spannung:

6. $t' = \frac{1}{2}(Q+M)$ (§. 158. II. Zuſ.).

7. Die beyden Seile CD, DF, welche um die zweyte Rolle D gehen, tragen miteinander die Laſt $\frac{1}{2}(Q+M)$ nebſt dem Gewichte M der Rolle D, mithin iſt zu beyden Seiten die Spannung, oder

$$8.\quad t'' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(Q+M)+M\right] = \frac{1}{4}Q + \frac{1}{4}M + \frac{1}{2}M$$
$$= \frac{1}{2^2}Q + \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\right)M$$

9. Eben ſo tragen bey der dritten Rolle die Seile dieſe Laſt, wozu aber noch das Gewicht M dieſer Rolle kömmt, ſo daß alſo

$$10.\quad t''' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^2}Q + \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\right)M + M\right]$$
$$= \frac{1}{2^3}Q + \left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\right)M$$

11. Auf eben dieſelbe Art erhellet, daß bey der lezten, alſo $n$ten beweglichen Rolle die Spannung, oder

$$t^{(n)} = \frac{1}{2^n} Q + \left[\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2}\right] M$$

$$= \frac{1}{2^n} Q + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) M \text{ (Arithm. §. 221.)}$$

12. Sezet man ſtatt $t^{(n)}$ aus Nr. 4. deſſen Werth, ſo iſt:

$$P = \frac{1}{2^n} Q + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) M$$

Zuſaz. Für einen Rollenzug der erſten Art von 3 beweglichen Rollen, wenn das Gewicht jeder Rolle 12 ℔., und der Laſt 800 ℔. beträgt, wird die Kraft

$$P = \frac{1}{2^3} \times 800 + (1 - \tfrac{1}{8})\, 12$$
$$= (100 + 10\tfrac{1}{2}) \text{ ℔.} = 110\tfrac{1}{2} \text{ ℔.}$$

§. 161.

Aufgabe. (Fig. 66.)

Es bleibt alles wie im vorhergehenden §., man ſoll die Kraft P beſtimmen, wenn die Reibung der Rollen ſowohl, als die Steife der Seile in Anſchlag gebracht wird, und P bey der geringſten Vermehrung das Uebergewicht erhalten ſoll.

Auflöſung.

1. Wenn nun die Spannungen der Seile, welche um die beweglichen Rollen gelegt ſind, ſo bezeichnet werden, daß t' die Spannung des erſten Seils BD, t'' jene des zweyten DF u. ſ. w., alſo $t^{(n)}$ jene des $n$ten oder lezten Seils FG der beweglichen Rollen bezeichnen, ſo iſt

2. $t' = \frac{(Q+M)(r+e\sin.\alpha)+d^m(a+b(Q+M))}{2r+d^m b}$ (§. 158.)

$$= \frac{r+e\sin.\alpha+d^m b}{2r+d^m b}(Q+M) + \frac{d^m a}{2r+d^m b}$$

3. Man ſeze der Kürze wegen

$\frac{r+e\sin.\alpha+d^m b}{2r+d^m b} = A$, und $\frac{d^m a}{2r+d^m b} = B$, alſo

4. $t' = A(Q+M)+B.$

5. Für die zweyte Rolle wird daher die Spannung oder

$$t'' = A(t'+M)+B$$
$$= A[A(Q+M)+B+M]+B$$
$$= A^2Q+(AM+B)(A+1)$$

6. $t''' = A(t''+M)+B$

$$= A[A^2Q+(AM+B)(A+1)+M]+B$$
$$= A^3Q+(AM+B)(A^2+A)+AM+B$$
$$= A^3Q+(AM+B)(A^2+A+1).$$

7. Auf die nemliche Weiſe erhellet, daß endlich

$$t^{(n)} = A^nQ+(AM+B)(A^{n-1}+A^{n-2}+\ldots\ldots+A+1)$$
$$= A^nQ+(AM+B)\frac{1-A^n}{1-A}$$ (Arithm. §. 221.)

8. Nun läuft dieſes lezte Seil n der beweglichen Rolle noch um eine unbewegliche G, wo dann auf der andern Seite H die Kraft P angebracht iſt, folglich wird

9. $P = \frac{t^{(n)}r+e\sin.\alpha(t^{(n)}+M)+d^m(a+bt^{(n)})}{r-e\sin.\alpha}$

(§. 153. IV. Zuſ.)

$$= t^{(n)}\frac{r+e\sin.\alpha+d^m b}{r-e\sin.\alpha}+M\frac{e\sin.\alpha}{r-e\sin.\alpha}+\frac{d^m a}{r-e\sin.\alpha}$$

10. Sezet man der Kürze wegen

$$\frac{r+e\sin.\alpha+d^m b}{r-e\sin.\alpha}=C;\ \frac{e\sin.\alpha}{r-e\sin.\alpha}=D;\ \frac{d^m a}{r-e\sin.\alpha}=E$$

ſo iſt

$$11.\ P=Ct^{(n)}+D.M+E$$

$$=C\left[A^nQ+(AM+B)\frac{1-A^n}{1-A}\right]+D.M+E$$

(Nr. 8.)

§. 162.

Aufgabe. (Fig. 66.)

Ein Rollenzug der erſten Art beſteht aus 3 beweglichen Rollen, dieſe ſowohl als die vierte unbewegliche ſind vom Meſſing, und drehen ſich um eiſerne Bolzen, das Gewicht einer jeden Rolle, oder M = 12 ℔., der Halbmeſſer r = 36 Linien, und der Halbmeſſer der Bixe oder e = 6 Lin., der Durchmeſſer eines jeden Seils d = 10 Linien, ferner die Laſt Q = 800 ℔., alles im baieriſchen Maaße und Gewichte, man ſucht die Größe der Kraft P, welche der geſammten Laſt ſo das Gleichgewicht hält, daß bey ihrer geringſten Vermehrung dieſe Kraft die Ueberwucht bekömmt.

Auflöſung.

Da die Aufgabe ein Beyſpiel zur vorhergehenden iſt, ſo werden die Nr. fortgeſezet.

12. Für baieriſches Maaß und Gewicht iſt:
$m=1{,}7$; $a=2$; $b=0{,}048$ (§. 77. IX. Zuſ.)

13. $\lambda=0{,}16$ (§. 88. VI. Zuſ.) $=\sin.\alpha$.

14. $\log.\ d=1{,}0000000$
$m=1{,}7$
$\log.\ d^m=1{,}7$, mithin $d^m=50{,}119$ und

15. $d^m b = 50{,}119 \times 0{,}048 = 2{,}406$

16. $d^m a = 50{,}119 \times 2 = 100{,}238$

17. $e \sin. \alpha = 6 \times 0{,}16 = 0{,}96$,

18. $A = \frac{r + e \sin. \alpha + d^m b}{2r + d^m b}$ (Nr. 3)

$$= \frac{36 + 0{,}96 + 2{,}406}{72 + 2{,}406} = \frac{39{,}366}{74{,}406}$$

19. Nun iſt

log. 39,366 = 1,5951213
log. 74,406 = 1,8716080

alſo log. A = 0,7235133 - 1
n = 3

log. A^n = 0,1705399 - 1 mithin

20. $A = 0{,}52907$, und

21. $A^n = 0{,}14809$ ferner

22. $1 - A^n = 0{,}85191$, und $1 - A = 0{,}47093$

23. $C = \frac{r + e \sin. \alpha + d^m b}{r - e \sin. \alpha}$ (Nr. 10.)

$$= \frac{36 + 0{,}96 + 2{,}406}{36 - 0{,}96} = \frac{39{,}366}{35{,}04} = 1{,}1235$$

24. log. 39,366 = 1,5951213
log. 35,04 = 1,5445641, alſo

log. C = 0,0505572

25. log. Q = log. 800 = 2,9030900
log. A^n = 0,1705399 - 1 (Nr. 19.)
log. C = 0,0505572 (Nr. 24.), alſo

log. C . A^n . Q = 2,1241871, folglich

26. $C.A^n . Q = 133,13$

27. $B = \frac{d^m a}{2r + d^m b}$ (Nr. 3.) $= \frac{100,238}{72+2,406}$ (Nr. 15 u. 16.)

$= \frac{100,238}{74,406}$, mithin

28. $B = 1,347$
$A.M = 6,349$ (Nr. 20.)

$A.M+B = 7,696$

29. $\log. (AM+B) = 0,8862651$
$\log. \; C = 0,0505572$ (Nr. 24.)
$\log. (1-A^n) = 0,9303937-1$ (Nr. 22.)

$\log. [C(AM+B)(1-A^n)] = 0,8672160$, alſo
$\log. (1-A) = 0,6729564-1$ (Nr 22.)

$\log. [C(AM+B)\frac{1-A^n}{1-A}] = 1,1942596$, alſo

30. $C(AM-B)\frac{1-A^n}{1-A} = 15,641$

31. $D = \frac{e \sin. \alpha}{r-e. \sin. \alpha}$ (Nr. 10) $= \frac{0,96}{36-0,96}$ (Nr 17.)

$= \frac{0,96}{35,04} = 0,0274$, und

32. $D.M = 0,0274 \times 12 = 0,329$

33. $E = \frac{d^m a}{r-e \sin. \alpha}$ (Nr. 10.) $= \frac{100,238}{36-0,96}$ (Nr. 16 und 17.)

$= \frac{100,238}{35,04} = 2,861$

34. Nun iſt $C.A^n.Q = 133{,}13$ (Nr. 26.)

$C\,(AM+B)\,\frac{1-A^n}{1-A} = 15{,}641$ (Nr. 30.)

$DM = 0{,}329$ (Nr. 32.)

$E = 2{,}861$ (Nr. 33.)

folglich $P = 151{,}961$ ℔. (Nr. 11.)

Zuſaz. Vergleichet man dieſen eben gefundenen Werth P mit jenem §. 160. Zuſ, ſo erhellet, wie bedeutend der Einfluß der Zapfenreibung und Seilsſteiſe zuſammen iſt.

§. 163.

Aufgabe. (Fig. 67.)

Ein Rollenzug der zweyten Art beſteht aus n Rollen (die lezte unbewegliche mitgezählet), das Gewicht jeder einzelnen Rolle iſt = M, die Seile ſind ſämmtlich vertical geſpannet, man ſuchet für den Zuſtand des Gleichgewichtes das Verhältniß der Kraft P zur Laſt Q, wenn weder die Reibung, noch die Seilsſteiſe in Anſchlag gebracht wird.

Aufloſung.

1. Die durch die Laſt Q erzeugte Spannung des Seils AB, an welchem auf der andern Seite die Kraft P zieht, iſt offenbar dieſer Kräft gleich, wenn anders die Kraft P im Gleichgewichte mit der Laſt Q ſeyn ſoll, alſt $t' = P$.

2. Da die ſämmtlichen Seile vertical geſpannet ſind, ſo muß das Seil BD der zweyten Rolle eine Laſt $= 2P + M$ tragen (Reine Mechan. §. 73. II. Zuſ.), mithin wird

3. die Spannung dieſes Seils auf der andern Seite, nemlich CD, oder $t'' = 2P + M$.

4. Das Seil D F, welches um die dritte Rolle gelegt iſt, trägt die Laſt $= 4P + 2M + M$, mithin iſt die Spannung deſſelben auf jeder Seite, alſo jene von EF, oder $t''' = 2^2 P + M(2+1)$.

5. Das Seil der nächſtfolgenden 4ten Rolle trägt alſo wieder die Laſt $= 2[2^2 P + (2+1)M] + M$, mithin iſt wieder die Spannung, oder

6. $t'''' = 2^3 P + (2^2 + 2 + 1)M$.

7. Durch fortgeſezte ähnliche Schlüſſe erhellet, daß bey dem $n$ten Seile, welches über die $n$te alſo lezte Rolle, welche unbeweglich iſt, geht, auf jeder Seite die Spannung

8. $t^{(n)} = 2^{n-1} P + (2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots\ldots + 2 + 1) M$
$= 2^{n-1} P + (1 + 2 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^{n-2}) M$

9. Der Haken H, an welchem die lezte unbewegliche oder die $n$te Rolle befeſtiget iſt, trägt daher die Laſt:

$$2t^{(n)} + M = 2[2^{n-1} P + (1+2+2^2+\ldots\ldots+2^{n-2})M] + M$$
$$= 2^n P + [2+2^2+2^3+\ldots\ldots+2^{n-1}]M + M$$
$$= 2^n P + [1+2+2^2+2^3+\ldots\ldots+2^{n-1}] M$$
$$= 2^n P + (2^n - 1) M \text{ (Arithm. §. 221.).}$$

10. Da endlich dieſer nemliche Haken H die ganze Vorrichtung, mithin die Laſt $Q + P + nM$ zu tragen hat, und die einzelnen Richtungen ſämmtlich vertical, alſo unter ſich parallel ſind, ſo iſt

11. $Q + P + nM = 2^n P + (2^n - 1) M$

$Q + nM - (2^n - 1) M = 2^n P - P = (2^n - 1) P$; folglich

12. P

12. $P = \frac{Q}{2^n - 1} + \frac{n}{2^n - 1} M - M.$

Zuſaz. Für die Laſt Q = 800 ℔., wenn die Anzahl aller Rollen oder n = 4, und das Gewicht jeder Rolle, oder M = 12 ℔., würde

$$P = \frac{800}{2^4 - 1} + \frac{4}{2^4 - 1}\ 12 - 12$$

$$= \frac{800}{15} + \frac{48}{15} - \frac{180}{15} = \frac{668}{15} = 44\frac{8}{15}\text{ ℔.}$$

Man vergleiche den Zuſaz §. 160.

§. 164.

Aufgabe. (Fig. 67.)

Für den Rollenzug der zweyten Art bleibt alles wie im vorhergehenden §. man ſoll die Kraft P beſtimmen, wenn die Reibung und Seilsſteife mit in Anſchlag gebracht wird, und P bey geringſter Zunahme über die geſammte Laſt das Uebergewicht erhalten ſoll.

Aufloͤſung.

1. Man ſeze die Spannung des Seils BP bey der erſten oder unterſten Rolle = ι', jene des zweyten Seils DB = ι'', die des dritten FD = ι''' u. ſ. f., mithin die Spannung des nten Seils, in der Figur des Seils FH = $\iota^{(n)}$, ſo läuft dieſes Seil um die lezte oder oberſte Rolle H, welche unbeweglich iſt, die Spannung auf der andern Seite, oder des Seils GH iſt daher = $\iota^{(n+1)}$

2. Da an dem erſten Seile BP unmittelbar die Kraft P angebracht wird, ſo iſt

$\iota' = P$ (Reine Mechan. §. 71. I. Zuſ.).

3. Für den Zuſtand des Gleichgewichtes können die Stellen des Hebels A, C, E, G, wo die Seile feſt gemacht ſind, als unbeweglich betrachtet, mithin das Verhältniß der Kräfte aus §. 158. beſtimmt werden, es iſt daher:

$$4.\ t' = \frac{(t''+M)(r+e\sin.\alpha)+d^m[a+b(t''+M)]}{2r+d^m b};$$

$$t''(r+e\sin.\alpha+d^m b)+M(r+e\sin.\alpha+d^m b)+d^m a = t'(2r+d^m b)$$

$$t'' = \frac{2r+d^m b}{r+e\sin.\alpha+d^m b}\,t' - M - \frac{d^m a}{r+e\sin.\alpha+d^m b}$$

5. Man ſeze der Kürze wegen:

$$\frac{2r+d^m b}{r+e\sin.\alpha+d^m b} = A; \text{ und } \frac{d^m a}{r+e\sin.\alpha+d^m b} = B$$

ſo iſt Nr. 4.

6. $t'' = At' - M - B.$

7. Auf ähnliche Art ergiebt ſich

$$8.\ t''' = At'' - M - B,$$
$$= A[At' - M - B] - M - B$$
$$= A^2 t' - (A+1)(M+B)$$

9. Eben ſo iſt:

$$t'''' = At''' - M - B$$
$$= A[A^2 t' - (A+1)(M+B)] - M - B$$
$$= A^3 t' - (A^2+A)(M+B) - M - B$$
$$= A^3 t' - (A^2+A+1)(M+B)$$

10. Für das n te Seil, welches zur lezten Rolle, die unbeweglich iſt, geht, iſt alſo:

$$t^{(n)} = A t^{(n-1)} - (M+B)$$
$$= A^{n-1} t' - (A^{n-2}+A^{n-3}+\ldots+A+1)(M+B)$$

11. Sezet man in leztere Gleichung für t' deſſen Werth P (Nr. 2.), und ſummirt die geometriſche Reihe, ſo iſt

12. $t^{(n)} = A^{n-1} P - \frac{A^{n-1}-1}{A-1}(M+B)$

13. Bey der lezten unbeweglichen Rolle iſt endlich für die Spannung des Seils GH $= t^{(n+1)}$

$$t^{(n)} = \frac{t^{(n+1)}r + e\sin.\alpha(t^{(n+1)}+M) + d^m(a+bt^{(n+1)})}{r - e\sin.\alpha}$$

(§. 153. IV. Zuſ.)

$$= t^{(n+1)}\frac{r+e\sin.\alpha + d^m b}{r - e\sin.\alpha} + \frac{e\sin.\alpha}{r-e\sin.\alpha}M + \frac{d^m a}{r - e\sin.\alpha}$$

14. Sezet man der Kürze wegen

$$\frac{r+e\sin.\alpha+d^m b}{r-e\sin.\alpha} = C;\ \frac{e\sin.\alpha}{r-e\sin.\alpha} = D;\ \frac{d^m a}{r-e\sin.\alpha} = E$$

ſo wird

15. $t^{(n)} = Ct^{(n+1)} + DM + E$, mithin

16. $t^{(n+1)} = \frac{t^n}{C} - \frac{DM+E}{C}$

17. Die Unterlage oder der Haken H leidet alſo den ſenkrechten Druck $= t^{(n+1)} + t^{(n)} + M$;

18. Aber eben dieſer Haken trägt auch die ganze Vorrichtung, mithin eine Laſt $= Q + P + nM$, folglich iſt:

19. $t^{(n+1)} + t^{(n)} + M = Q + P + nM$, oder wenn man aus Nr. 16. ſtatt $t^{(n+1)}$ deſſen Werth ſezet

26*

20. $\frac{t^{(n)}}{C} - \frac{DM + E}{C} + t^{(n)} + M = Q + P + nM$

$$t^{(n)}\left(1 + \frac{1}{C}\right) = Q + P + (n-1)M + \frac{DM + E}{C}$$

21. $t^{n} = \frac{Q + P + (n-1)M}{C + 1}C + \frac{DM + E}{C + 1}$

22. Sezet man endlich die Werthe Nr. 12 und 21. einander gleich, ſo wird:

23. $A^{n-1}P - \frac{A^{n-1} - 1}{A - 1}(M + B) = \frac{P.C}{C+1} + \frac{Q + (n-1)M}{C + 1}C + \frac{DM + E}{C + 1}$

$$P\left(A^{n-1} - \frac{C}{C+1}\right) = \frac{Q + (n-1)M}{C + 1}C + \frac{DM + E}{C + 1} + \frac{A^{n-1} - 1}{A - 1}(M + B)$$

$$P\left(\frac{A^{n-1}C + A^{n-1} - C}{C + 1}\right) = \frac{Q + (n-1)M}{C + 1}C + \frac{DM + E}{C + 1} + \frac{A^{n-1} - 1}{A - 1}(M + B)$$

folglich

24. $P = \frac{Q.C + (n-1)MC + DM + E}{A^{n-1}C + A^{n-1} - C} + \frac{(A^{n-1} - 1)(M + B)(C + 1)}{(A - 1)(A^{n-1}C + A^{n-1} - C)}$

§. 165.

Aufgabe. (Fig. 67.)

Der Rollenzug der zweyten Art beſteht aus 4 Rollen, alle Dimenſionen ſind eben dieſelben wie §. 162., mithin M = 12 ℔., r = 36 Lin. e = 6 Lin. d = 10 Lin. Q = 800 ℔., man ſoll das Gewicht P beſtimmen, welches der geſammten Laſt ſo das Gleichgewicht hält, daß bey deſſen Vermehrung ſolche das Uebergewicht bekömmt.

Aufloſung.

Da die Aufgabe ein Beyſpiel der vorhergehenden iſt, ſo werden die Nr. fortgeſezet.

25. Für baieriſches Maaß und Gewicht iſt wieder $m = 1,7$; $a = 2$, $b = 0,048$ (§. 77. IX. Zuſ.) $\lambda = 0,16$ (§. 88. VI. Zuſ.) $= \sin.\alpha$, mithin

26. $A = \frac{2r + d^m b}{r + e \sin.\alpha + d^m b}$ (Nr. 5.) $= \frac{74,406}{39,366}$ (§. 162. Nr. 18) $= 1,89$

27. $B = \frac{d^m a}{r + e \sin.\alpha + d^m b} = \frac{100,238}{39,366}$ (§. 162. Nr. 16.) $= 2,5463$

28. $C = \frac{r + e \sin.\alpha + d^m b}{r - e \sin.\alpha}$ (Nr. 14.) $= \frac{39,366}{35,04} = 1,1235$ (§. 162. Nr. 23.)

29. $D = \frac{e \sin.\alpha}{r - e \sin.\alpha} = 0,0274$ (§. 162. Nr. 31.)

30. $E = \frac{d^m a}{r - e \sin.\alpha} = 2,861$ (§. 162. Nr. 33.).

31. Daher iſt

$$
\begin{array}{rl}
QC = & 898,8 \\
(n-1)\,MC = & 40,446 \\
DM = & 0,329 \\
E = & 2,861 \\
\hline
QC + (n-1)MC + DM + E = & 942,436
\end{array}
$$

32.

$$
\begin{array}{rl}
CA^{n-1} = & 7,5861 \\
A^{n-1} = & 6,7524 \\
\hline
CA^{n-1} + A^{n-1} = & 14,3385 \\
C = & 1,1235 \\
\hline
C.A^{n-1} + A^{n-1} - C = & 13,2150
\end{array}
$$

33. Nun iſt

$$\log.[QC+(n-1)MC+DM+E] = 2{,}9742519 \text{ (Nr. 31.)}$$
$$\log.[C.A^{n-1} + A^{n-1} - C] = 1{,}1210672 \text{ (N.32.) alſo}$$

$$\text{log.}\ \frac{Q.C+(n-1)MC+DM+E}{C.A^{n-1}+A^{n-1}-C} = 1{,}8531847, \text{ mithin}$$

34. $$\frac{Q.C+(n-1)MC+DM+E}{C.A^{n-1}+A^{n-1}-C} = 71{,}3156$$

35. $$\log[CA^{n-1}+A^{n-1}-C] = 1{,}1210672$$
$$\log.(A-1) = 0{,}9493900-1 \text{ (N.26.)}$$

$$\text{alſo } \log.[(A-1)(CA^{n-1}+A^{n-1}-C)] = 1{,}0704572$$

36. $$\log.(A^{n-1}-1) = 0{,}7598491$$
$$\log.(M+B) = 1{,}1627526$$
$$\log.(C+1) = 0{,}3270523, \text{ mithin}$$

$$\log.[(A^{n-1}-1)(M+B)(C+1)] = 2{,}2496540$$
$$\log.[(A-1)(CA^{n-1}+A^{n-1}C)] = 1{,}0704572 \text{ (Nr. 35.)}$$

$$\log.\ \frac{(A^{n-1}-1)(M+B).C+1)}{(A-1)(CA^{n-1}+A^{n-1}-C)} = 1{,}1791968, \text{ alſo}$$

37. $$\frac{(A^{n-1}-1)(M+B)(C+1)}{(A-1)(CA^{n-1}+A^{n-1}-C)} = 15{,}1076$$

38. Sezet man endlich die Werthe Nr. 34 und 37 in die Gleichung Nr. 24. des vorhergehenden §., ſo wird

39. $$P = 71{,}3156 + 15{,}1076$$
$$= 86{,}4232 \text{ ℔.}$$

I. Zuſaz. Die für die Kraft P (§. 161 u. §. 164.) angegebenen Werthe reichen zwar anfänglich um die Laſt Q wirklich zu heben nicht zu, wenn aber einmal

durch eine größere Kraft die Bewegung eingeleitet iſt, und dadurch die Laſt mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit c ſteigt, ſo wird dieſe Laſt mit eben dieſer Geſchwindigkeit zu ſteigen gleichförmig fortfahren, wenn bey dem Rollenzug der erſten Art die §. 161. beſtimmte Kraft, oder bey dem Rollenzuge der zweyten Art die §. 164. angezeigte Kraft beſtändig wirkſam iſt (§. 11.).

II. Zuſaz. Aus der Vergleichung mit §. 163. ergiebt ſich auch für den Rollenzug der zweyten Art, wie beträchtlich die Nebenlaſt iſt; aus der Vergleichung endlich mit §. 162. erhellet, daß der Rollenzug der zweyten Art vortheilhafter als jener der erſten Art iſt.

III. Zuſaz. Beyde Rollenzüge haben nachſtehende weſentliche Unvollkommenheiten:

1. daß ſie einen beträchtlichen Raum erfodern, und ſich nicht ohne vielen Zeitaufwand von einem Ort in einen anderen verſezen laſſen,

2. daß durch ſie die Laſt nie zu einer beträchtlichen Höhe gehoben werden kann, denn bey dem Rollenzuge der erſten Art (Fig. 66.) wird die Laſt nur ſo lange ſteigen, bis die oberſte bewegliche Rolle F die unbewegliche G erreicht hat; und bey dem Rollenzuge der zweyten Art (Fig. 67.) kann die Laſt nur ſo weit ſteigen, bis der Hebel AG die nächſte unterſte Rolle B erreicht.

§. 166.

Erklärungen. (Fig. 68 - 70.)

a. Wenn mehrere Rollen durch eine gemeinſchaftliche Hilſe ſo miteinander verbunden ſind, daß ſie ſich zwar um ihre Axe drehen, aber ihre Lage gegeneinan-

der nicht verändern können, ſo heißt die Vorrichtung ein Kloben, oder Flaſche (rechamus);

b. werden nun zwey Flaſchen durch ein Seil, welches immer wechſelweiſe von einer Rolle des einen Kloben zu einer Rolle des andern geht, verbunden, der eine Kloben irgendwo ſo feſtgemacht, daß er ſeine Lage nicht verändern kann, an dem andern Kloben hingegen die Laſt, welche gehoben oder bewegt werden ſoll, befeſtiget, ſo heißt die ganze Verbindung ein Flaſchenzug (polyspastus), und zwar

α. ein Flaſchenzug der erſten Art, wenn (Fig. 68 und 69.) das Seil an der unbeweglichen Flaſche in A anfängt, dann um eine Rolle der untern beweglichen Flaſche geht, und von da um eine Rolle der obern ſich ſchlingt, u. ſ. w.

β. ein Flaſchenzug der zweyten Art (Fig. 70.), wenn das Seil an dem Haken der beweglichen Flaſche anfängt, um eine Rolle der obern Flaſche geht, und von da zu einer der untern Flaſche läuft, u. ſ. f.

I. Zuſaz. Wenn man nicht nur auf die Haupt-, ſondern auch auf die Nebenlaſt Rückſicht nimmt, ſo iſt das Seil nicht an allen Stellen gleich geſpannet; man betrachtet daher jedes Stück deſſelben, welches von einer Rolle des einen Kloben, zu einer Rolle des andern Kloben läuft, als ein beſonderes Seil, ſo heißt z. B das Stück AB das erſte, CD das zweyte, EF das dritte Seil, u. ſ. f.

II. Zuſaz. Man kann zwar mittels des Flaſchenzuges eine Laſt nach jeder beliebigen Richtung in Bewegung ſezen, wenn nur der unbewegliche Kloben

nach der entgegengeſezten Richtung feſtgemacht iſt; gewöhnlich aber ſoll die Hauptlaſt ſenkrecht gehoben werden, ſo daß alſo die beyden Flaſchen ſenkrecht über einander zu ſtehen kommen, die obere Flaſche an einem Balken feſtgemacht, und dadurch die an der untern Flaſche hängende Laſt gehoben wird. Auf dieſe verticale Lage des Flaſchenzuges beſchränken ſich daher die nachfolgenden Unterſuchungen um ſo mehr, als für jede andere Lage die Anwendung leicht gemacht werden kann.

III. Zuſaz. Soll nun bey der verticalen Lage des Flaſchenzuges auch die Kraft P am lezten Seil vertical abwärts, und dadurch die Laſt Q aufwärts ziehen, ſo muß bey dem Flaſchenzug der erſten Art die obere unbewegliche Flaſche eben ſo viele, und bey dem Flaſchenzuge der zweyten Art, um eine Rolle mehr als die untere bewegliche Flaſche enthalten.

IV. Zuſaz. Wenn die in einem Kloben verbundenen Rollen (Fig. 68.) einen gemeinſchaftlichen Bolzen haben, ſo liegen ſie nebeneinander, und ihre Halbmeſſer können einander gleich ſeyn; hingegen liegen die beyden Seile jeder Rolle, z. B. AB, CD, oder EF, GH, nicht mit der Rolle in einerley Ebene, ſo wie ihre Richtungen nicht untereinander parallel ſind; durch dieſe ſchiefe Richtung der Seile entſteht an den Rollen eine eigene Zapfenreibung.

V. Zuſaz. Bekömmt jede Rolle einen eigenen Bolzen (Fig. 69, 70.), ſo ſtehen ſie in jedem Kloben übereinander, und können daher nicht gleiche Halbmeſſer haben, mithin auch die Seile nicht unter ſich parallel geſpannet ſeyn.

VI. Zuſaz. Wenn die beyden Kloben nur eine etwas beträchtliche Entfernung haben, ſo iſt die Abweichung zweyer Seile, welche um eine Rolle gehen, von der parallelen Lage ſowohl im IVten als Vten Zuſaz unmerklich.

VII. Zuſaz. Bey der Unterſuchung eines Flaſchenzuges, da ſich ohnehin die von der Reibung und Seilsſteiffe herrührende Nebenlaſt nicht genau beſtimmen läßt, nimmt man zur Erleichterung an:

1. daß die beyden Seile, welche um eine Rolle gehen, parallel geſpannt ſind,

2. Bey ungleichen Halbmeſſern der Rollen (V. Zuſ.) nimmt man das arithmetiſche Mittel als den gemeinſchaftlichen Halbmeſſer aller Rollen eines Kloben,

3. die durch das Gewicht der einzelnen Rollen vermehrte Zapfenreibung wird in Beziehung auf die große Hauptlaſt als unmerklich weggelaſſen.

§. 167.

Aufgabe. (Fig. 68 und 69)

Bey einem Flaſchenzuge der erſten Art enthält die bewegliche Flaſche n Rollen, deren mittlerer Halbmeſſer = r, und jener ihrer Bixe = e, ſo wie das Gewicht M der Flaſche gegeben iſt, ferner ſey noch der Durchmeſſer des Seils d, und die Hauptlaſt Q bekannt, man ſucht für den Zuſtand des Gleichgewichtes die Größe der Kraft P, welche bey geringſter Vermehrung die Laſt Q heben würde.

Auflöſung.

1. Da um jede Rolle der beweglichen Flaſche zwey Seile gehen, wozu noch das lezte NP kömmt, an wel-

chem die geſuchte Kraft P ſenkrecht zieht, ſo iſt die Anzahl aller Seile $= 2n + 1$.

2. Man ſeze die Spannung des erſten Seils $AB = t'$, des zweyten $CD = t''$, des dritten $EF = t'''$ u. ſ. f., alſo des 2n ten $= t^{(2n)}$, und des lezten oder $(2n+1)$ten $= t^{(2n+1)}$, ſo iſt

3. $t^{(2n+1)} = P$ (Reine Mechan. §. 71. I. Zuſ.)

4. Ferner, da in jedem Kloben die Rollen durch die gemeinſchaftliche Hilfe ſo verbunden ſind, daß ſie unter ſich ihre Lage nicht verändern können, ferner im Zuſtande des Gleichgewichtes die Laſt Q die untere an ſich bewegliche Flaſche unverrückt in ihrer Lage eben ſo, wie der Haken R die obere unbewegliche erhält, ſo kann man ſämmtliche Rollen in beyden Flaſchen als unbewegliche betrachten, mithin das Verhältniß der Kraft zur Laſt jedesmal nach §. 153. IV. Zuſ. beſtimmen, mithin wird

5. $$t'' = \frac{t'r + e\sin.\alpha.t' + d^m(a+bt')}{r - e\sin.\alpha} \text{ (§. 166. VII. Zuſ. 3.)}$$

$$= \frac{r + e\sin\alpha + d^m b}{r - e\sin.\alpha} t' + \frac{d^m a}{r - e\sin.\alpha}$$

6. Sezet man der Kürze wegen wie §. 161. Nr. 10.

$$\frac{r + e\sin.\alpha + d^m b}{r - e\sin.\alpha} = C;\ \frac{d^m a}{r - e\sin.\alpha} = E, \text{ ſo iſt}$$

7. $$t'' = Ct' + E = Ct' + \frac{C-1}{C-1} E$$

$$= Ct' + \left(\frac{C}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right) E$$

8. Eben ſo wird

$$t''' = Ct'' + E = C[Ct' + E] + E = C^2t' + (C+1)E$$

$$= C^2 t' + \frac{(C+1)(C-1)}{C-1} E = C^2 t' + \frac{C^2-1}{C-1} E$$

$$= C^2 t' + \left[\frac{C^2}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E$$

9. Auf eben dieſe Weiſe wird

$$t'''' = C^3 t' + \left[\frac{C^3}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E$$

10. Für die folgenden Seile erhält man eben ſo die Werthe ihrer Spannungen, ſo daß

11. $t^{(2n)} = C^{2n-1} t' + \left[\frac{C^{2n-1}}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E$, und

12. die Spannung des lezten Seils, oder

$$t^{(2n+1)} = C^{2n} t' + \left[\frac{C^{2n}}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E$$

13. Sezet man nun aus Nr. 3. den beſtimmten Werth, ſo wird

$$C^{2n} t' + \left[\frac{C^{2n}}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E = P, \text{ mithin}$$

14. $t' = \frac{P}{C^{2n}} - \left[\frac{C^{2n}}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] \frac{E}{C^{2n}}$

15. Die Seile, welche um die Rollen der beweglichen Flaſche gehen, müſſen zuſammen dieſe untere Flaſche ſammt der daran befeſtigten Hauptlaſt tragen, mithin iſt:

16. $Q + M = t' + t'' + t''' + \ldots\ldots + t^{(2n)}$

17. Sezet man für dieſe Spannungen die Nr. 7–11. beſtimmten Werthe, ſo wird

$$18.\quad Q+M = t' + Ct' + \left[\frac{C}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E + C^2 t'$$

$$+ \left[\frac{C^2}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E + C^3 t' + \left[\frac{C^3}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E +$$

$$+ \cdots\cdots + C^{2n-1} t' \left[\frac{C^{n-1}}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E$$

$$= (1 + C + C^2 + C^3 + \cdots\cdots + C^{2n-1}) t'$$

$$+ \left[\frac{C}{C-1} + \frac{C^2}{C-1} + \frac{C^3}{C-1} + \cdots\cdots + \frac{C^{2n-1}}{C-1}\right] E$$

$$- \frac{2n-1}{C-1} E$$

$$= \frac{C^{2n}-1}{C-1} t' + \frac{C^{2n}-C}{(C-1)^2} E - \frac{2n-1}{C-1} E \text{ (Arithm. §. 221.)}$$

mithin

$$19.\quad \frac{C^{2n}-1}{C-1} t' = Q + M - \frac{C^{2n}-C}{(C-1)^2} E + \frac{2n-1}{C-1} E, \text{ und}$$

$$20.\quad t' = \frac{C-1}{C^{2n}-1} (Q+M) - \frac{C^{2n}-C}{(C^{2n}-1)(C-1)} E + \frac{2n-1}{C^{2n}-1} E$$

21. Sezet man ſtatt t' deſſen Werth aus Nr. 14; ſo wird

$$22.\quad \frac{p}{C^{2n}} - \frac{C^{2n}-1}{C-1} \cdot \frac{E}{C^{2n}} = \frac{C-1}{C^{2n}-1} (Q+M)$$

$$- \frac{C^{2n}-C}{(C^{2n}-1)(C-1)} E + \frac{2n-1}{C^{2n}-1} E$$

$$\frac{P}{C^{2n}} = \frac{C-1}{C^{2n}-1}(Q+M) + \frac{C^{2n}-1}{C-1} \cdot \frac{E}{C^{2n}} - \frac{C^{2n}-C}{(C^{2n}-1)(C-1)} E$$

$$+ \frac{2n-1}{C^{2n}-1} E$$

folglich

$$23.\ P = \frac{C^{2n}(C-1)}{C^{2n}-1}(Q+M) + \left[\frac{C^{2n}-1}{C-1} - \frac{C^{2n}(C^{2n}-C)}{(C^{2n}-1)(C-1)} + \frac{(2n-1)C^{2n}}{C^{2n}-1}\right] E$$

$$= \frac{C^{2n}(C-1)}{C^{2n}-1}(Q+M)$$

$$+ \frac{(C^{2n}-1)^2 - C^{2n}(C^{2n}-C) + (2n-1)C^{2n}(C-1)}{(C^{2n}-1)(C-1)} E$$

I. Zuſaz. Dieſe Kraft P reicht zwar für den Anfang nicht zu, um die Laſt wirklich zu heben, wenn aber durch eine größere Kraft die Bewegung eingeleitet iſt, ſo wird die Laſt mit der erlangten Geſchwindigkeit gleichförmig zu ſteigen fortfahren, ſo lange die eben beſtimmte Kraft wirkſam iſt (§. 11.).

II. Zuſaz. Nimmt man auf die Nebenlaſt keine Rückſicht, läßt man nemlich ſowohl das Gewicht M der untern Flaſche, als die Reibung und Seilsſteiffe als unbedeutend weg, ſo wird Nr. 5. $t'' = t'$, und ſo alle Spannungen der Seile einander gleich, mithin auch $t^{2n+1} = t' = P$, und daher Nr. 16.

$$Q = 2n t' = 2n P, \text{ folglich}$$

$$P = \frac{Q}{2n}$$

§. 168.

Aufgabe. (Fig. 68 und 69.)

Das Verhältniß der Kraft P zur Laſt Q unter den Bedingungen der vorhergehenden Aufgabe §. 167. zu beſtimmen; wenn die Rollen aus Meſſing, ihre Bolzen aus Eiſen ſind, ferner $n = 3$; $r = 3$ Zoll $= 36$ Linien, $e = 6$ Linien, $M = 36$ ℔., $d = 10$ Linien, $Q = 800$ ℔., alles im baieriſchen Maaße und Gewichte gegeben ſind.

Auflöſung.

Der Bequemlichkeit wegen werden die Nr. des vorhergehenden §. fortgeſezet.

24. Man ſeze der Kürze wegen Nr. 23.

$$\frac{C^{2n}(C-1)}{C^{2n}-1} = a;$$

$$(C^{2n}-1)^2 - C^{2n}(C^{2n}-C) + (2n-1)\,C^{2n}(C-1) = b$$

$$(C^{2n}-1)(C-1) = c, \text{ ſo iſt}$$

25. $P = a\,(Q+M) + \frac{b}{c}\,E$

26. Da r, e, d, m, b mithin auch C und E (Nr. 6.) eben ſo wie §. 162. Nr. 23 und 33. beſtimmt ſind, ſo iſt ebenfalls

$$C = \frac{39{,}366}{35{,}04} = 1{,}1235;\ C-1 = 0{,}1235, \text{ und}$$

27. $E = 2{,}861$ (§. 162. Nr. 33.).

28. $\log. C = 0{,}0505572$
$\quad 2n = \quad 6$

$\log. C^{2n} = 0{,}3033432$, alſo

29. $C^{2n} = 2,0107$; $C^{2n} - 1 = 1,0107$, und
$C^{2n} - C = 0,8872$

30.
$$\begin{array}{rl}
\log. C^{2n} & = 0,3033432 \\
\log. (C - 1) & = 0,0916670 - 1 \\
\hline
\log. C^{2n}(C - 1) & = 0,3950102 - 1 \\
\log. (C^{2n} - 1) & = 0,0046223 \quad \text{mithin N. 24.} \\
\hline
\log. a & = 0,3903879 - 1 \\
\log. (Q + M) & = 2,9222063 \\
\hline
\log. a\,(Q + M) & = 2,3125942, \text{ alſo}
\end{array}$$

31. $a\,(Q + M) = 205,397$

32.
$$\begin{array}{rl}
\log. (C^{2n} - 1) & = 0,0046223 \\
2 & = \quad 2 \\
\hline
\log. (C^{2n} - 1)^2 & = 0,0092446, \text{ mithin}
\end{array}$$

33. $(C^{2n} - 1)^2 = 1,0215$

34.
$$\begin{array}{rl}
\log. C^{2n} & = 0,3033432 \\
\log. (C^{2n} - C) & = 0,9480215 - 1 \\
\hline
\log. C^{2n}(C^{2n} - C) & = 0,2513647, \text{ folglich}
\end{array}$$

35. $C^{2n}(C^{2n} - C) = 1,7839$

36.
$$\begin{array}{rl}
\log. (2n - 1) & = 0,6989700 \\
\log. C^{2n} & = 0,3033432 \\
\log. (C - 1) & = 0,0916670 - 1 \\
\hline
\log. [(2n - 1)\, C^{2n}(C - 1)] & = 0,0939802, \text{ alſo}
\end{array}$$

37.
$$\begin{array}{rl}
(2n - 1(C^{2n}(C - 1) & = 1,2416 \\
(C^{2n} - 1)^2 & = 1,0215 \text{ (Nr. 33.)} \\
\hline
(C^{2n} - 1)^2 + (2n - 1)\,C^{2n}(C - 1) & = 2,2631 \\
C^{2n}(C^{2n} - C) & = 1,7839 \text{ (Nr. 35.), alſo} \\
\hline
\text{38.} \quad b & = 0,4792 \text{ (Nr. 24.)}
\end{array}$$

39. log.

39. $\log. (C^{2n} - 1) = 0{,}0046223$
$\log. (C - 1) = 0{,}0916670 - 1$, alſo

40. $\log. c = 0{,}0962893 - 1$

41. $\log. b = 0{,}6805168 - 1$ (Nr. 38.)
$\log. E = 0{,}4565179$ (Nr. 27.)

$\log. b.E = 0{,}1370347$
$\log. c = 0{,}0962893 - 1$ (Nr. 40.)

$\log. \frac{b.E}{c} = 1{,}0407454$, mithin

42. $\frac{b.E}{c} = 10{,}984$

$a(Q + M) = 205{,}397$ (Nr. 31.), folglich

43. $P = 216{,}381$ ℔. (Nr. 25.).

Zuſaz. Ohne Nebenlaſt würde

$P = \frac{Q}{2n}$ (§. 167. II. Zuſaz.) $= \frac{800}{6} = 133{,}33$ ℔.

ſeyn; man ſieht daraus, wie beträchtlich bey einem Flaſchenzuge der Aufwand der Kraft auf die Ueberwindung der Nebenlaſt iſt.

§. 169.

Aufgabe. (Fig. 70.)

Bey einem Flaſchenzuge der zweyten Art enthält die bewegliche Flaſche n Rollen, ferner bezeichnet wieder r den mittlern Halbmeſſer dieſer Rollen, e den Halbmeſſer der Bixen, d den Durchmeſſer der Seile, M das Gewicht der beweglichen Flaſche, und Q die Hauptlaſt, man ſoll die Kraft P beſtimmen, welche am lezten Seile ſenkrecht abwärts der geſammten Laſt das Gleichgewicht hält.

Aufloͤſung.

1. Bey dem gegebenen Falle enthaͤlt die unbeweg⸗liche obere Flaſche $n+1$ Rollen (§. 166. III. Zuſ.);

2. um die Rollen der untern beweglichen Flaſche gehen $2n$ Seile, und das erſte AB iſt an dieſer Fla⸗ſche befeſtiget, ſo daß alſo $2n+1$ zur untern Flaſche gehen, und miteinander das Gewicht derſelben, ſo wie die daran befeſtigte Laſt, alſo $Q+M$ tragen.

3. Zu dieſen Seilen koͤmmt endlich noch das lez⸗te, an welchem die Kraft P wirket, ſo daß alſo in al⸗lem $2n+2$ Seile ſind.

4. Sezet man wieder die Spannung des erſten Seils $AB = t'$, des zweyten $CD = t''$, des dritten $FE = t'''$ u. ſ. w., mithin des $(2n+1)^{ſten} = t^{(2n+1)}$ und endlich die des lezten oder $(2n+2)^{ten} = t^{(2n+2)}$ ſo iſt

5. $t^{(2n+2)} = P$ (Reine Mech. §. 71. I. Zuſ.)

6. Ferner iſt wieder wie §. 167. Nr. 5.

$$t'' = \frac{r + e\sin.\alpha + d^m b}{r - e\sin.\alpha} t' + \frac{d^m a}{r - e\sin.\alpha}$$

7. Sezet man wieder

$$\frac{r + e\sin.\alpha + d^m b}{r - e\sin.\alpha} = C; \quad \frac{d^m a}{r - e\sin.\alpha} = E, \text{ ſo iſt}$$

8. $t'' = Ct' + E = Ct' + \left\{\frac{C}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right\} E$

9. Auf eben dieſelbe Art wie §. 167. Nr. 8–12. er⸗giebt ſich:

10. $t''' = C^2 t' + \left[\frac{C^2}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E$ u. ſ. f. alſo

11. $t^{(2n+1)} = C^{2n} t' + \left[\frac{C^{2n}}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E$

12. $t^{(2n+2)} = C^{(2n+1)} t' + \left[\frac{C^{2n+1}}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E$

13. Sezet man in leztere Gleichung aus Nr. 5 den Werth der Spannung, ſo iſt

$$P = C^{2n+1} t' + \frac{C^{2n+1} - 1}{C-1} E,$$

$$C^{2n+1} t' = P - \frac{C^{2n+1} - 1}{C-1} E, \text{ alſo}$$

14. $t' = \frac{P}{C^{2n+1}} - \frac{C^{2n+1} - 1}{C^{2n+1}(C-1)} E$

15. Ferner iſt vermög Nr. 2.

$$Q + M = t' + t'' + t''' + \ldots\ldots + t^{(2n+1)}$$

$$= t' + Ct' + \left[\frac{C}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E + C^2 t'$$

$$+ \left[\frac{C^2}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E + \ldots\ldots + C^{2n} t'$$

$$+ \left[\frac{C^{2n}}{C-1} - \frac{1}{C-1}\right] E \text{ (Nr. 8-11.)}$$

$$= (1 + C + C^2 + \ldots\ldots C^{2n}) t'$$

$$+ \left[\frac{C}{C-1} + \frac{C^2}{C-1} + \ldots\ldots + \frac{C^{2n}}{C-1}\right] E - \frac{2n}{C-1} E$$

$$= \frac{C^{2n+1} - 1}{C-1} t' + \frac{C^{2n+1} - C}{(C-1)^2} E - \frac{2n}{C-1} E \text{ Arithm. §. 221.}$$

$$= \frac{C^{2n+1} - 1}{C-1} t' - \frac{2n(C-1) - (C^{2n+1} - C)}{(C-1)^2} E, \text{ mithin}$$

16. $\frac{C^{2n+1} - 1}{C-1} t' = Q + M + \frac{2n(C-1) - (C^{2n+1} - C)}{(C-1)^2} E$, und

17. $t' = \frac{C-1}{C^{2n+1} - 1} (Q + M) + \frac{2n(C-1) - (C^{2n+1} - C)}{(C^{2n+1} - 1)(C-1)} E$

folglich, wenn man aus Nr. 14. ſtatt t′ deſſen Werth ſezet

18. $\frac{P}{C^{2n+1}} - \frac{C^{2n+1}-1}{C^{2n+1}(C-1)} E = \frac{C-1}{C^{2n+1}-1}(Q+M)$

$+ \frac{2n(C-1)-(C^{2n+1}-C)}{(C^{2n+1}-1)(C-1)} E$

$$\frac{P}{C^{2n+1}} = \frac{C-1}{C^{2n+1}-1}(Q+M)$$

$$+ \frac{(C^{2n+1}-1)^2+2nC^{2n+1}(C-1)-C^{2n+1}(C^{2n+1}-C)}{C^{2n+1}(C^{2n+1}-1)(C-1)} E$$

folglich

19. $P = \frac{C^{2n+1}(C-1)}{C^{2n+1}-1}(Q+M)$

$$+ \frac{(C^{2n+1}-1)^2+2nC^{2n+1}(C-1)-C^{2n+1}(C^{2n+1}-C)}{(C^{2n+1}-1)(C-1)} E$$

I. Zuſaz. Die Kraft P, wenn anfänglich durch eine grössere Kraft die Laſt zu ſteigen anfängt, reicht zur gleichförmigen Fortſezung der Bewegung zu (§. 11.).

II. Zuſaz. Nimmt man auf die Nebenlaſt keine Rückſicht, ſo iſt Nr. 6. $t'' = t'$, und alle Seile ſind gleich geſpannet, mithin auch $t^{(2n+2)} = t' = P$ (Nr. 5), folglich

$Q = (2n+1)t$ (Nr. 15.) $= (2n+1)P$, und alſo

$P = \frac{Q}{2n+1}$.

§. 170.

Aufgabe. (Fig. 70.)

Bey einem Flaſchenzuge der zweyten Art beſteht die bewegliche Flaſche aus 2 Rollen, die Rollen ſind aus Meſſing, und die Bolzen von Eiſen, ihr mittlerer

Halbmeſſer $r = 36$ Linien, der Halbmeſſer ihrer Bixen $e = 6$ Linien, der Durchmeſſer der Seile $d = 10$ Linien, das Gewicht der untern Flaſche $M = 24$ ℔., und der Hauptlaſt $Q = 800$ ℔, alles wieder im baieriſchen Maaße und Gewichte, man ſucht für den Zuſtand des Gleichgewichtes die Kraft P.

Aufloͤſung.

1. Da gegenwärtig $n = 2$, ſo wird §. 169. N. 19.

$$P = \frac{C^5(C-1)}{C^5-1}(Q+M) + \frac{(C^5-1)^2+4C^5(C-1)-C^5(C^5-C)}{(C^5-1)(C-1)}E$$

2. Ferner ſind gegenwärtig r, e, d, m, a eben dieſelben Größen wie §. 162., mithin iſt auch

$C = 1{,}1235$, und

$E = 2{,}861$ (§ 162. Nr. 23 und 33.).

3. Der Kürze wegen ſeze man:

$$\frac{C^5(C-1)}{C^5-1} = a;$$

$(C^5-1)^2+4C^5(C-1)-C^5(C^5-C) = b$

$(C^5-1)(C-1) = c$, mithin

4. $P = a\,(Q+M) + \frac{b}{c}E$

5. $\log.\ C = 0{,}0505572$

$\quad 5 = \quad 5$

$\log.\ C^5 = 0{,}2527860$, alſo

6. $C^5 = 1{,}7897$; $C^5-1 = 0{,}7897$, und

$C^5-C = 0{,}6662$.

7. $\log.\ C^5 = 0{,}2527860$

$\log.\ (C-1) = 0{,}0916670-1$

$\log.\ C^5(C-1) = 0{,}3444530-1$

$\log.\ (C^5-1) = 0{,}8974621-1$, mithin

$\log.\ a = 0{,}4469909-1$ (Nr. 3.)

$\log.\ (Q+M) = 2{,}9159272$

$\log.\ a(Q+M) = 2{,}3629181$, folglich

8. $a(Q+M) = 230,631$

9. $\log.(C^5-1) = 0,8974621-1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2$

$\log.(C^5-1)^2 = 0,7949242-1$, mithin

10. $(C^5-1)^2 = 0,624$

11. $\log.\ 4 = 0,6020600$
$\log.\ C^5 = 0,2527860$
$\log.(C-1) = 0,0916670-1$

$\log.\ 4C^5(C-1) = 0,9465130-1$, alſo

12. $4C^5(C-1) = 0,884$

13. $\log.\ C^5 = 0,2527860$
$\log.(C^5-C) = 0,8236046-1$

$\log.\ C^5(C^5-C) = 0,0763906$, folglich

14. $C^5(C^5-C) = 1,192$

15. $\log.(C^5-1) = 0,8974621-1$
$\log.(C-1) = 0,0916670-1$

$\log.\ c = 0,9891291-2$ (Nr. 3.)

16. $(C^5-1)^2 = 0,624$ (Nr. 10.)
$4C^5(C-1) = 0,884$ (Nr. 12.)

$(C^5-1)^2 + 4C^5(C-1) = 1,508$
$C^5(C^5-C) = 1,192$ (Nr. 14.), alſo

$b = 0,316$ (Nr. 3.)

17. $\log.\ b = 0,4996871-1$
$\log.\ E = 0,4565179$ (Nr. 2.)

$\log.\ bE = 0,9562050-1$
$\log.\ c = 0,9891291-2$

$\log.\ \frac{c}{b}E = 0,9670759$, mithin

$$18.\ \frac{b}{c}E = 9{,}370$$
$$a(Q+M) = 230{,}631\ \text{(Nr. 8.)},\ \text{folglich}$$
$$19.\quad P = 239{,}901\ \text{℔.}\quad \text{(Nr. 4.)}$$

I. Zuſaz. Ohne Nebenlaſt würde

$$P = \frac{Q}{2n+1}\ (\text{§. 169. II. Zuſ.}) = \frac{800}{5} = 160\ \text{℔.}$$

II. Zuſaz. Da ſich ein Flaſchenzug überall ſehr leicht anbringen läßt, und mit demſelben eine Laſt nach jeder beliebigen Richtung überwältiget werden kann, ſo ſind die Flaſchenzüge weit brauchbarer als die Rollenzüge (§. 165. III. Zuſ.).

IV. Hauptſtück.

Vom Rade an der Welle.

§. 171.

Erklärungen (Fig. 61.)

Wenn mit einem ſenkrechten Cylinder, welcher mit den an ſeinen beyden Enden ausgehenden kleinern Cylindern auf Unterlagen ruhet, eine Kreisebene ſo verbunden wird, daß die Axe des Cylinders auf ihr durch den Mittelpunct ſenkrecht ſteht, und am Umfange des Kreiſes, und des Cylinders, zwey Kräfte die ganze Vorrichtung um die Axe nach entgegengeſezten Richtungen zu drehen ſtreben, ſo heißt

a, die Kreisebene CDE das Rad (Peritrochium),

b, der größere Cylinder die Welle,

c. die Ende der Welle an beyden Seiten, die klei- nern Cylinder nemlich, wie in der Figur a einen darſtellet, die Zapfen, und

d. ihre Unterlagen die Pfannen oder Zapfen- lager,

e. die ganze Vorrichtung ein Wellrad, oder ein Rad an der Welle (axis in peritrochio).

I. Zuſaz. Es wird allemal, wenn nicht ausdrück- lich das Gegentheil angezeigt iſt, vorausgeſezet, daß die ſämmtlichen Richtungen der Kräfte in ihren Um- drehungsebenen, das iſt, in Ebenen liegen, welche auf der Axe der Welle ſenkrecht ſtehen.

II. Zuſaz. Ohne die Nebenlaſt in Betrachtung zu ziehen, wenn R den Halbmeſſer des Rades, r je- nen der Welle, ferner P die am Umfange des Rades, und Q die am Umfange der Welle nach den Richtun- gen der Tangenten wirkenden Kräfte bezeichnen, ſo iſt für den Zuſtand des Gleichgewichtes $P.R = Q.r$ (Reine Mechan. §. 81.), mithin iſt

II. Zuſaz. $P = \frac{Q.r}{R}$, und eben ſo $Q = \frac{P.R}{r}$ das iſt, der Kraft Q am Umfange der Welle iſt die Kraft $\frac{Q.r}{R}$ am Umfange des Rades, und eben ſo der Kraft P am Umfange des Rades die Kraft $\frac{P.R}{r}$ am Umfange der Welle gleichgeltend (Reine Mechan. §. 4.); vorausgeſezt, daß ihre Richtungen auf den Halbmeſſer am Berührungspuncte ſenkrecht ſind.

IV Zuſaz. Da bey dem Rade an der Welle die Laſt Q, welche bewegt werden ſoll, gewöhnlich mittels eines um die Welle gelegten Seils verbunden wird, ſo wirkt ſie nach der Richtung der Tangens am Um-

fange der Welle (Reine Mech. §. 72.), mithin iſt für den Halbmeſſer der Welle ſammt der halben Seils-Dicke, das iſt, für den mechaniſchen Halbmeſſer r, das Umdrehungsmoment = Q.r.

V. Zuſaz. Selten wirket hingegen die Kraft mittels eines um den Umfang des Rades gelegten Seils, ihre Richtung iſt daher ſelten auf den Endespunct des Radius ſenkrecht, ſondern macht damit eine gewiſſe Neigung α, mithin iſt alsdann das Moment der Kraft = P.R. sin. α (Reine Mechan. §. 80.).

VI. Zuſaz. Das Moment der Kraft am Umfange des Rades, oder P.R. sin. α bleibt ſo lange unverändert, als die 3 Factoren, das iſt, die Kraft P, ihre Richtung gegen den Halbmeſſer, das iſt, der Winkel α, und endlich der Halbmeſſer R unverändert bleiben; es iſt daher einerlei, ob an der Welle wie Fig. 71. ein wirkliches Rad angebracht iſt, oder wie Fig. 73. Speicher durch die Welle geſteckt, oder endlich Handhaben wie Fig. 72. an den Zapfen zum Umdrehen befeſtiget ſind.

§. 172.

Erklärungen.

a. Wenn das Rad an der Welle mittels der beyden Zapfen ſo unterſtüzet wird, daß die Axe der Welle eine horizontale, mithin die Ebene des Rades eine verticale Lage bekömmt, ſo heißt die Vorrichtung überhaupt ein Haſpel (Sucula);

b. Bekömmt hingegen durch die Unterſtüzung der beyden Zapfen die Axe der Welle eine verticale, alſo dadurch die Ebene des Rades eine horizontale Lage, ſo heißt die Vorrichtung ein Göpel (Ergata).

e. Wird mit einer Welle ein Rad bloß in der Abſicht verbunden, um die Ungleichförmigkeit der Bewegung im Beharrungszuſtande der Maſchine (§. 13 und 19.) zu vermindern, ſo heißt dieſes Rad ein Schwungrad.

I. Abſchnitt.

Von dem Haſpel.

§. 173.

Aufgabe. (Fig. 71.)

Für einen Haſpel das Verhältniß der Kraft P am Umfange des Rades, zur Laſt Q am Umfange der Welle zu beſtimmen, wenn der Halbmeſſer R des Rades, der Winkel α, welchen dieſe Kraft mit dem Radius am Berührungspuncte einſchließet, der mechaniſche Halbmeſſer r der Welle (§. 171. IV. Zuſ.), der Halbmeſſer e der beyden Zapfen, d der Durchmeſſer des Seils, k das Gewicht einer zur Einheit genommenen Länge, z. B. eines Fußes vom Seil, n die Länge des abgewickelten, und s die Länge des an der Welle noch aufgewickelten Seils, endlich das Gewicht M des Rades, der Welle ſammt den übrigen an ihr befeſtigten Stücke gegeben ſind, und P der geſammten Laſt ſo das Gleichgewicht halten ſoll, daß ſie bey ihrer geringſten Vermehrung das Uebergewicht bekömmt, und die Maſchine in Bewegung ſezet.

Auflöſung.

1. Am Umfange der Welle, oder eigentlich am Endespuncte des mechaniſchen Halbmeſſers r hängt die Laſt Q, ſammt dem Gewichte nk des abgewickelten

Seils, mithin iſt ihr Moment $= r(Q + nk)$ (§. 172. IV. Zuſ.).

2. Am Umfange des Rades wirket die Kraft P, deren Richtung gegen den Halbmeſſer R unter dem Winkel α geneigt iſt, ihr Moment iſt alſo $= R \sin \alpha P$ (§. 172. V. Zuſ.).

3. Dieſe Kraft ſowohl, als die Nr. 1. angeführte Laſt äuſſern auf die beyden Zapfenlager einen Druck, wozu noch der verticale Druck kömmt, welcher aus dem Gewicht M der Vorrichtung, und dem Gewichte sk des noch aufgewundenen Seils beſteht.

4. Die Laſt $Q + nk$ (Nr. 1.) äuſſert nemlich eben denſelben Druck, als wenn ſie unmittelbar an der Axe der Welle nach verticaler Richtung angebracht wäre (Reine Mechan. §. 83 und 84.), und eben ſo äuſſert das im Schwerpuncte der Maſchine vereinigte Gewicht einen ſenkrechten Druck abwärts, dadurch leiden alſo beyde Zapfen zuſammen einen verticalen Druck $= M + Q + (n + s) k$.

4. Durch die Kraft P leidet zwar auch die Axe der Welle einen Druck, wie wenn ſie unmittelbar an dieſer Axe angebracht wäre, aber da die Richtung der Kraft nicht allemal vertical abwärts geht, ſondern jede beliebige Richtung, wenn z. B. die Kraft während ihrer Einwirkung ſich in einem Kreiſe drehet, haben kann, ſo entſteht dadurch an den Zapfen ein Druck P nach einer Richtung, welche mit der vorhergehenden verticalen nicht zuſammen fällt;

5. Wollte man nun den wahren Druck der Zapfen gegen ihre Pfannen beſtimmen, ſo müßte man für die beyden Seitenkräfte und ihre Richtungen (Nr.

3 und 4.) die Richtung und Größe der mittlern Kraft wie § 82. beſtimmen, da dieſes allemal ſehr ſchwer iſt, und da ſich die Reibung ohnehin nie nach aller Schärfe beſtimmen läßt, ſo ſezet man den geſammten Druck der beyden Zapfen zuſammen der Summe aller angeführten Kräfte gleich, und vertheilet ſolchen gleichheitlich auf die beyden Zapfenlager.

6. Bezeichnet daher λ den Reibungscoefficienten für die umdrehende Bewegung (§. 82. Nr. 18.), ſo ſtemmet ſich am Umfange der Zapfen die Reibung gegen die Bewegung, und das Moment dieſes Hinderniſſes für beyde Zapfen zuſammen, iſt

$$= e\lambda[P+Q+M+(n+s)k].$$

7. Das von der Seilsſteiffe hervorgehende Hinderniß am Umfange der Welle in Y iſt

$= \frac{d^m}{r}[a+b(Q+nk)]$ (§. 73.), wo aus §. 77. VIII und IX. Zuſ. alle Größen bekannt ſind.

8. Das Moment dieſes Hinderniſſes iſt alſo

$$d^m (a+b(Q+nk))$$

9. Soll endlich die Kraft P am Umfange des Rades der geſammten Laſt das Gleichgewicht halten, und bey ihrer geringſten Zunahme über ſelbige das Uebergewicht bekommen, ſo muß

$$P.R\sin.\alpha = r(Q+nk)+e\lambda[P+Q+M+(n+s)k] + d^m(a+b(Q+nk));$$

$$P(R\sin.\alpha - e\lambda) = r(Q+nk)+e\lambda[Q+M+(n+s)k] + d^m(a+b(Q+nk))$$

folglich

$$10.\ P = \frac{r(Q+nk)+e\lambda[Q+M+(n+s)k]+d^m(a+b(Q+nk))}{R\sin.\alpha - e\lambda}$$

I. Zuſaz. Aus dieſer Gleichung wird

$$Q = \frac{P(R\sin.\alpha - e\lambda) - e\lambda[M + (n+s)k] - d^m(a+bnk)}{r + e\lambda + d^m b}$$

das iſt, die Laſt beſtimmt, welcher die gegebene Kraft P am Umfange des Rades das Gleichgewicht hält.

II. Zuſaz. Sezet man $R = r$, und die Richtung der Kraft auf den Halbmeſſer ebenfalls ſenkrecht, mithin $\alpha = 90^\circ$, und alſo $\sin.\alpha = 1$, und läßt das Gewicht des Seils als unbedeutend weg, ſo wird für die unbewegliche Rolle

$$p = \frac{rQ + e\lambda(Q+M) + d^m(a+bQ)}{R - e\lambda}$$ wie §. 153. IV. Zuſ.

III. Zuſaz. Um die belaſtete Maſchine anfänglich in Bewegung zu ſezen, wird eine größere Kraft erfodert, iſt aber dieſelbe einmal eingeleitet, und ſteiget dadurch die Laſt Q mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit c, oder was eines iſt, drehet ſich die Welle um ihre Axe mit einer beſtimmten Winkelgeſchwindigkeit γ, ſo iſt zur gleichförmigen Fortſezung dieſer Bewegung die Nr. 10. angegebene Kraft hinreichend (§. 10 und §. 12. I. Zuſ.).

§. 174.

Erklärungen.

Wenn ein Haſpel im weitern Sinne (§. 172. a.) ſo eingerichtet iſt, daß er durch Menſchenhände, während die Arbeiter immer an eben dem Plaze ſtehen bleiben, in Bewegung geſezet wird, ſo heißt er ein Haſpel im engern Sinne, und zwar

a. ein Radhaſpel, wenn an der Welle ein wirkliches Rad angebracht iſt, entweder

α. ein Stirnrad, wo am Umfange des Rades Zapfen, welche der Arbeiter ergreiffet, ſo her- vorragen, daß ſie in der Ebene des Rades (an der Stirn deſſelben) liegen, oder

β. ein Spillrad wie Fig. 71, wo die hervorragen- den Zapfen auf der Radesebene ſenkrecht ſtehen.

b. ein Kreuzhaſpel, wenn ſtatt dem Rade He- belsarme (Speicher) gewöhnlich über's Kreuz durch die Welle geſteckt ſind;

c. ein Hornhaſpel wenn an einem, oder bey- den Zapfen der Welle (Fig. 72.) ein Haſpelhorn, Kurbel (manubrium), die Stelle des Rades vertritt.

I. Zuſaz. Bey dem Rad- ſowohl, als dem Kreuz-Haſpel iſt das Verhältniß der Kraft zur Laſt durch §. 173. Nr. 10. beſtimmt; da ſich der Win- kel α, welchen jedesmal die Richtung der Kraft mit dem Radius des Rades am Berührungspuncte ein- ſchließet, nie genau angeben läßt, ſo begnügt man ſich, die Kraft für den Fall zu beſtimmen, wo $\alpha = 90^\circ$, mithin $\sin.\alpha = 1$ iſt, in dieſem Falle wird:

$$P = \frac{r(Q+nk)+e\lambda[Q+M+(n+s)k]+d^m(a+b(Q+nk))}{R-e\lambda}$$

II. Zuſaz. Bey dem Kreuzhaſpel, und dem Rad- haſpel mit einem Stirnrade muß der Halbmeſſer des Rades R von der Axe der Welle an bis in die Mitte des Angriffes, bey dem Radhaſpel mit Spillen hinge- gen von der Axe der Welle bis an jene Stellen des Rades gerechnet werden, wo die Spillen eingeſezet ſind.

§. 175.

Erklärungen.

Ein Hornhaſpel erhält nach der Anzahl der Arbeiter, und der dadurch nothwendig verſchiedenen Einrichtung der Kurbeln die Benennung

a. eines einmännigen Haſpels, wenn nur auf einer Seite ein Kurbel angebracht iſt,

b. eines zweymännigen, wenn auf jeder Seite, das iſt, an jedem Zapfen der Welle, wie Fig. 72. eine Kurbel befeſtiget iſt,

c. eines dreymännigen, wenn auf einer Seite eine doppelte, und auf der andern eine einfache Kurbel, und

d. eines viermännigen Haſpels, wenn auf jeder Seite eine doppelte Kurbel angebracht iſt.

I. Zuſaz. Bey dem Hornhaſpel wird der Halbmeſſer R vom Mittelpuncte des Zapfens an gerechnet, ſo ſind (Fig. 72. ab, cd die Halbmeſſer.

II. Zuſaz. Da bey der Umdrehung der Kurbel der Arbeiter immer Kreiſe beſchreibet, ſo muß er dabey verſchiedene Stellungen annehmen, die zu ſeiner Kraftäuſſerung nicht gleich tauglich ſind, mithin läßt ſich bey dem Hornhaſpel die Kraft, folglich auch ihr Moment nicht als eine unveränderliche Größe betrachten, und die Bewegung ſelbſt kann nicht gleichförmig ſeyn. Bey dem einmännigen Haſpel iſt natürlich dieſe Ungleichförmigkeit am größten.

III. Zuſaz. Soll durch eine größere Anzahl von Arbeitern, das iſt, durch einen zwey⸗ drey⸗ oder viermännigen Haſpel nicht nur die Kraft an ſich verſtärkt,

ſondern auch die Ungleichförmigkeit der Momente bey dem Umdrehen vermindert werden, ſo muß, der Erfahrung zu Folge, der Winkel, welchen die Hörner der Kurbeln untereinander einſchließen, oder vielmehr, welchen die Projectionen derſelben auf einem durch die Axe ſenkrechten Querſchnitt einſchließen, bey dem zweymännigen 135°, bey dem dreymännigen 120°, und bey dem viermännigen 90° betragen.

IV. Zuſaz. Da ſich die Verſchiedenheit der Kraftäuſſerung bey dem Umdrehen nicht genau beſtimmen läßt, ſo nimmt man eine mittlere Kraft P an, und ſuchet durch ein Schwungrad die Ungleichförmigkeit zu vermindern.

§. 176.

Aufgabe. (Fig. 72.)

An einem Hornhaſpel ſind 2 Kübel ſo angebracht, daß, während der gefüllte z. B. F hinauf ſteigt, der andere leere G abwärts ſich ſenket, und, indem der gefüllte ganz oben, gleichzeitig der leere ganz unten z. B. in einem Schacht iſt, die Ladung eines Kübels Q, der Halbmeſſer R der Kurbeln, der mechaniſche Halbmeſſer r der Welle, der Halbmeſſer e der Zapfen, das Gewicht M der Welle ſammt ihren Zapfen und Kurbeln, das Gewicht $\frac{1}{2}$ q eines jeden leeren Kübels, das Gewicht k vom Längenmaaße des Seils z. B. eines Fußes oder Lachters, die ganze Teufe n des Schachtes, die Länge s des beſtändig aufgewickelten Seils, und der Reibungscoefficient λ für die umdrehende Bewegung, endlich der Durchmeſſer d des Seils ſind gegeben, man ſuchet die mittlere Kraft P, welche der geſammten Laſt ſo das Gleichgewicht hält, daß ſie bey fernerer Zunahme die Maſchine in Bewegung ſezet.

Auf-

Aufloſung.

1. Da die Kübel immer gegen einander gehen, mithin das Gewicht des einen auf einer Seite der Welle, durch das gleiche Gegengewicht des andern auf der andern Seite aufgehoben wird, ſo kommen ſie als Laſt, die gehoben werden ſoll, nicht in Anſchlag.

2. Die Laſt beſteht daher aus der Ladung Q des gefüllten Kübels F, und aus dem Gewichte des abgewundenen Seils, mithin anfänglich aus $n.k$.

3. Die Laſt, je höher ſie ſteiget, wird zwar immer dadurch vermindert, daß ſich auf der Seite des geladenen Kübels das Seil auf- und auf der andern Seite dagegen abwindet, indeſſen, da doch im Anfange die Laſt $Q+nk$ gehoben werden muß, ſo kann man ſolche als unveränderlich beybehalten.

4. Am Umfange der Welle iſt daher das Moment dieſer Laſt $= r(Q+nk)$.

5. Der geſammte Druck auf die beyden Zapfenlager iſt $= P+Q+q+M+(n+s)k$ (§. 173. Nr. 5.); mithin

6. am Umfange der Zapfen das Moment der Reibung $= e\lambda[P+Q+q+M+(n+s)k]$.

7. Dazu kömmt endlich am Umfange der Welle bey Y das Moment der Seilsſteife

$$= d^m(a+b(Q+\tfrac{1}{2}q+nk))$$

8. Soll daher eine auf das Rad nach der Richtung der Tangens wirkende Kraft P dieſer Geſammtlaſt ſo das Gleichgewicht halten, daß bey ihrer Zunahme ſie das Uebergewicht bekömmt, ſo iſt

$$9.\quad P.R = r(Q+nk) + e\lambda[P+Q+q+M+(n+s)k] + d^m(a+b(Q+\tfrac{1}{2}q+nk))$$

$$P(R-e\lambda) = r(Q+nk) + e\lambda[Q+q+M+(n+s)k] + d^m(a+b(Q+\tfrac{1}{2}q+nk))$$

folglich

$$10.\quad P = \frac{r(Q+nk)+e\lambda[Q+q+M+(n+s)k]+d^m(a+b(Q+\tfrac{1}{2}q+nk))}{R-e\lambda}$$

I. Zuſaz. Aus lezterer Gleichung wird:

$$Q[r+e\lambda+d^m b] = P(R-e\lambda)-rnk-e\lambda[q+M+(n+s)k] - d^m(a+b(\tfrac{1}{2}q+nk))$$

$$Q = \frac{P(R-e\lambda)-rnk-e\lambda[q+M+(n+s)k]-d^m(a+b(\tfrac{1}{2}q+nk))}{r+e\lambda+d^m b}$$

wenn für eine gegebene Kraft P erſt das Gewicht Q der jedesmaligen Ladung beſtimmt werden ſoll.

II. Zuſaz.

$$r = \frac{P(R-e\lambda)-e\lambda[Q+q+M+(n+s)k]+d^m(a+b(Q+\tfrac{1}{2}q+nk))}{Q+nk}$$

Wenn für eine gegebene Laſt Q und Kraft P die Beſchaffenheit des Rundbaumes angegeben werden ſoll.

III. Zuſaz. Um die Maſchine anfänglich in Bewegung zu ſezen, müſſen ſich die Arbeiter mehr anſtrengen, aber zur Fortſezung reichet die Kraft P (Nr. 10.) zu. (§. 12. I. Zuſ.)

§. 177.

Aufgabe. (Fig. 72.)

Bey einem zweymännigen Hornhaſpel iſt im baieriſchen gewöhnlichen Duodecimal-Längenmaaße, und Gewichte: Q = 77 ℔.; R = 22 Zoll, r = 5,5 Zoll (wo die halbe Seilsdicke mit eingerechnet iſt), e = 0,625 Zoll, M = 153 ℔., $\frac{1}{2}$ q = 26 ℔., die Teufe des Schachtes,

oder $n = 30$ Berglachter $= 202{,}5$ Fuß, die Länge des ganzen Seils, oder $n + s = 50$ Lachter $= 337{,}5$ Fuß, ferner $nk = 22{,}5$ ℔, $sk = 15$ ℔., $d = 1$ Zoll $= 12$ Linien. Die Zapfen ſind von Eiſen, und ruhen in eiſernen Pfannen, wobey gewöhnliche Wagenſchmier gebraucht wird. — Man ſuchet die Größe der mittlern Kraft P.

Aufloſung.

Da die gegenwärtige Aufgabe als Beyſpiel der vorgehenden allgemeinen dient, ſo werden die Nr. fortgeſezet.

11. $r(Q + nk) = 5{,}5(77 + 22{,}5) = 547{,}25$

12. Vermög §. 88. VII. Zuſ. kann man den Reibungscoefficienten $\lambda = 0{,}133$ ſezen, dadurch wird

13. $$e\lambda[Q + q + M + (n + s)k] =$$
$$= 0{,}625 \times 0{,}133[77 + 52 + 153 + 37{,}5]$$
$$= 0{,}083 \times 319{,}5$$
$$= 26{,}5$$

14. Will man nach §. 77. IX. Zuſ. die Größe der Seilsſteiffe beſtimmen, ſo muß d ſowohl, als r in baieriſchen Duodecimallinien ausgedrückt werden, dadurch wird

15. $$\frac{d^m}{r}\left[a + b\left(Q + \tfrac{1}{2}q + nk\right)\right] =$$
$$= \frac{12^{1{,}7}}{66}[2 + 0{,}048(77 + 26 + 22{,}5)]$$
$$= \frac{12^{1{,}7}}{66}[2 + 0{,}048 \times 125{,}5] = \frac{12^{1{,}7}}{66} \times 6{,}024 = 6{,}2$$

16. Dieſes Hinderniß äuſſert ſich nun am Umfange der Welle, mithin iſt ihr Moment
$$= 55 \times 6{,}2 = 34{,}1$$

17. Sezet man dieſe gefundenen Werthe in die Gleichung Nr. 10., ſo wird die mittlere Kraft, oder

$$18.\ P = \frac{547,25+26,5+34,1}{22 - 0,081} = \frac{607,85}{22} = 27,6\ \text{℔.}$$

weil im Nenner der Subtrahend als unmerklich weggelaſſen werden kann.

I. Zuſaz. Mit dem angeführten zweymännigen Haſpel werden zu Amberg, woher ich die Dimenſionen deſſelben erhielt, in einer 10 ſtündigen Schichte (Tagesarbeit) 150 Kübel, das iſt, 11550 ℔. aus einer Teufe von 30 Lachtern oder 202,5 Fuß gehoben, folglich beträgt für einen Haſpelknecht der tägliche Nuzeffect $5775 \times 202{,}5 = 1169437$ ℔. zur Höhe eines, oder 1169 ℔. zur Höhe von 1000 baier. Schuhen erhoben. Man vergleiche §. 103. V und VII. Zuſ., ſo ergiebt ſich, wie beträchtlich der Vortheil iſt, welchen der Haſpel bey der Hebung einer Laſt aus einer beträchtlichen Tiefe gewähret.

II. Zuſaz. Die Kraft, welche jeder von den beyden Arbeitern bey dem Umdrehen ſtets anwenden muß, iſt $\frac{1}{2} P = 13{,}8$ ℔. (Nr. 18). — Der Umfang der Welle iſt $= \frac{31{,}416}{12}$ Fuß, mithin gehören zu einem Kübelzuge, aus der Tiefe von 202,5 Fuß, 773,49 Umdrehungen der Welle, folglich zu 150 Kübelhübe aus eben dieſer Tiefe 11602 Umdrehungen der Welle, alſo auch eben ſo viele Umdrehungen der Kurbel; nun beträgt der Umfang des Kreiſes, welchen bey jeder Umdrehung die Handhabe beſchreibt $\frac{44\pi}{12} = 5{,}759$ Fuß, folglich hinterlegt jeder Arbeiter während 11602 Umdrehungen mit ſeinen Händen einen Weg von 66825 Fuß, und ſeine ganze tägliche Kraftäuſſerung iſt

13,8 × 66825 = 922185 ℔. zur Weite eines, oder 922 ℔. zur Weite von 1000 Fuß getragen. Man vergleiche §. 112. III u. IV. Zuſ.

III. Zuſaz. Die Arbeitszeit iſt 12 Stunde, nemlich von 4 Uhr Morgens bis 4 Uhr Abends, wo aber 2 Stunde zur Erholung wegkommen, rechnet man noch, daß zur Füllung von 150 Kübel 2 Stunde verwendet werden, ſo werden während den noch übrigen 8 Stunden 11602 Umdrehungen gemacht, und dadurch 66825 Fuß hinterlegt, folglich beträgt der während einer Secunde durchloffene Raum, oder die Geſchwindigkeit 2,3 Fuß.

IV. Zuſaz. Hr. Langsdorf, in ſeinen Grundlehren der Mechanik Seite 377 und 381., ſezet die mittlere Kraft eines Haſpelknechtes auf 26 ℔. Nürnbergiſchen Gewichtes, d. i., auf 23,6 baier. ℔., und die Geſchwindigkeit auf $2\frac{1}{2}$ rheinl. Fuß = 2,69 baier. Fuß, und die tägliche Dauer auf 7 Stunde.

§. 178.

Erklärungen.

Wenn bey einem Haſpel im weitern Sinne (§. 177. a.) die beyden Kränze des Rades mit ſtarken Brettern, und daran befeſtigten Leiſten oder Stuffen beſchlagen werden, wodurch Menſchen, oder Thiere, vermittels ihrer Schwere das Rad in Bewegung ſezen, ſo heißt die Vorrichtung ein Lauf- oder Trett-Rad, und zwar

a. ein inneres (Fig. 74.), wenn die Stuffen an der innern Seite des Umfanges angebracht ſind, ſo daß ſich der Arbeiter in der untern Hälfte des Rades befindet, und durch das Betretten der höher liegenden Stuffen das Rad in Bewegung ſezet;

b. ein äuſſeres Tretrad, wenn die Stuffen auf der äuſſern Fläche des Umfanges angebracht ſind, und der Arbeiter auf der obern Hälfte des Rades die Stuffen betritt.

I. Zuſaz. Wenn der Arbeiter im innern Laufrade den einen Fuß auf die in m liegende Stuffe (Fig. 75) geſezet hat, ſo verläßt er mit dem andern Fuße die tiefer liegende Stuffe in n, dadurch drückt er mit ſeinem ganzen Gewichte gegen die obere Stuffe m, iſt nun das Moment dieſes Druckes größer als jenes der geſammten Laſt, ſo wird ſich das Rad drehen, mithin die Stuffe ſinken bis zur Stelle n, wo der Arbeiter indeſſen den andern Fuß auf die nun in m befindliche Stuffe ſezet, ſo daß mn die Weite ſeines Schrittes iſt; und nun wieder alles wie vorher erfolget.

II. Zuſaz. Da die lothrechte Richtung mw der Schwere des Arbeiters von m bis n gegen den Halbmeſſer immer eine ſchiefere Lage bekömmt, mithin ihr Moment veränderlich iſt, ſo nimmt man zwiſchen m und n die Stelle o als unveränderlich an, und bringt das für dieſe Stelle berechnete Moment der Schwere als eine unveränderliche Größe in Anſchlag.

III. Zuſaz. Wird das innere Laufrad von einem Thiere in Bewegung geſezet, ſo werden von ihm allemal durch einen Vorder- und Hinterfuß 2 Stuffen, z. B. in m und n zugleich betretten, ſo daß man den Schwerpunct wieder in die Mitte nach o ſezen, und für dieſe Stelle das Moment der Kraft berechnen kann.

IV. Zuſaz. Zieht man (Fig. 75.) die Sehne mn, ferner durch n die wachrechte Linie nw, und durch m die verticale m'w, ſo bildet mnw eine ſchiefe Ebene,

auf welcher ſich der arbeitende Menſch oder Thier während dem Umdrehen immer befindet.

V. Zuſaz. Für einen Menſchen ſowohl, als für ein Thier iſt die Größe mn eines Schrittes eine beſtimmte unveränderliche Größe, da nun die Stelle o immer in die Mitte von mn fällt, ſo iſt durch die Lage von mn auch die Lage von o allemal beſtimmt.

VI. Zuſaz. Ziehet man (Fig. 75.) auſſer den Linien des IV. Zuſ. noch die Halbmeſſer Co, Cn, Cm, ferner den verticalen Halbmeſſer CB, ſo iſt der Winkel BCo, mnw; Denn man verlängere die wagrechte wn bis ſie CB in u ſchneidet, und durch n die Tangens st, ſo iſt: $Cnu + Cns + snw = 180°$
ferner $Cnu = 90° - BCn$, und $Cns = 90°$ (Geom. §. 76. I. Zuſ.). Sezet man dieſe Werthe in obige Gleichung, ſo iſt

$$90° - BCn + 90° + snw = 180°, \text{ oder}$$
$$-BCn + snw = 0, \text{ alſo}$$
$$snw = BCn$$

Ferner iſt:

$$nCo + Cno = 90° = Cno + mns, \text{ mithin}$$
$$nCo = mns, \text{ und}$$
$$BCn + nCo = mns + snw, \text{ das iſt}$$
$$BCo = mnw.$$

VII. Zuſaz. Je größer nun der Winkel BCo, mithin mnw iſt, deſto ſteiler iſt die ſchiefe Ebene mn (IV. Zuſ.), deſto beſchwerlicher wird die Arbeit, und deſto kürzer die Dauer, man nimmt daher für einen Menſchen, welcher das Laufrad in Bewegung ſezen ſoll, $BCo = 30°$ (§. 103. a. II. Zuſ.), und für ein arbeitendes Thier nimmt man dieſen Winkel höchſtens 20°.

§. 179.

Aufgabe. (Fig. 74.)

Von einem Laufrade iſt der Halbmeſſer R des Rades, der mechaniſche Halbmeſſer r der Welle, der Halbmeſſer e der beyden Zapfen, ferner das Gewicht M des Rades und Welle mit ihren Zapfen zuſammen, endlich der Durchmeſſer d, und Länge n des Seils nebſt dem Gewichte k vom Längenmaaße, z. B. einem Schuhe des Seils gegeben, man ſucht für das bekannte Gewicht P des Arbeiters, und deſſen Stelle o, oder dem Winkel BCo = α (§. 178. VII Zuſ.) im Zuſtande des Gleichgewichtes die Laſt Q, wenn P bey geringſter Zunahme die Ueberwucht bekommen ſoll.

Auflöſung.

1. Die Kraft, das iſt, das Gewicht P der Arbeiter in o (Fig 76.) drückt nach der verticalen Richtung op auf den Endespunct des Halbmeſſers Co; mithin iſt

2. der Winkel por = BCo = α.

3. Ziehet man durch o die Tangens ot, ſo läßt ſich P in zwey Seitenkräfte zerlegen, nemlich

4. nach der Richtung der Tangens ot
= P sin. por = P sin. α, und

5. nach der Richtung des verlängerten Halbmeſſers nach or = P cos. por = P cos. α (Reine Mech. §. 53. IX. Zuſ.).

6. Da ſich das Rad nur um ſeine Axe drehen, mithin nach der Richtung der Tangens ot bewegen kann, ſo iſt das Moment der Kraft Nr. 4.
= P.R sin. α.

7. Die Kraft $P \cos.$ (Nr. 5.) wird zwar durch die befeſtigte Axe aufgehoben, aber ſie vermehrt eben dadurch den Druck gegen die Unterlagen der Zapfen; und zwar eben ſo, als wirkte ſie unmittelbar an einem Puncte der Axe (Reine Mechan. §. 83 u. 84.).

8. Eben ſo äuſſert die Laſt Q ihren ganzen Druck auf die Zapfenlager, wozu noch jener vom Gewichte der Maſchine und des Seils, oder $M + nk$ kömmt, mithin iſt ſolcher

9. $= P \cos.\alpha + Q + M + nk$, und

10. das Moment der Reibung am Umfang der Zapfen $= e\lambda [P \cos.\alpha + Q + M + nk]$.

11. Ferner iſt das Moment der Seilsſteife in y am Umfange der Welle

$$= d^m (a + b (Q + nk)).$$

12. Am Umfange der Welle hängt die Laſt Q; wozu noch das Gewicht vom abgewickelten Seil kömmt, gehen nun nicht wie §. 176 u. 177. zwey Kübel gegen einander, ſo iſt dieſes Seilſtück ſehr veränderlich, und im Anfange beynahe der ganzen Seilslänge n gleich, da nun doch dieſe Laſt gehoben werden muß, ſo wird ſie als unveränderlich beybehalten, und

13. ihr Moment iſt daher $= rQ + rnk$.

14. Soll alſo der Arbeiter durch ſein Gewicht P der geſammten Laſt das Gleichgewicht halten, ſo muß

15. $$P.R \sin.\alpha = r(Q + nk) + e\lambda [P \cos.\alpha + Q + M + nk] + d^m (a + b (Q + nk))$$

ſeyn, mithin wird

16. $$Q (r + e\lambda + d^m b) = P(R \sin.\alpha - e\lambda \cos.\alpha) - rnk - e\lambda (M + nk) - d^m (a + bnk)$$

$$Q = \frac{P(R \sin.\alpha - e\lambda \cos.\alpha) - rnk - e\lambda(M + nk) - d^m (a + bnk)}{r + e\lambda + d^m b}$$

I. Zuſaz. Aus der Gleichung Nr. 15. ergiebt ſich, daß, obgleich der Arbeiter im Trettrad ſein natürliches Gewicht P nicht verändern kann, er doch durch die Veränderung der Stelle, wenn er nemlich eine höhere Stufe beſteigt, wodurch alſo α mithin auch sin. α zu- und dagegen cos. α abnimmt, ſeine Kraftäuſſerung vermehren kann.

II. Zuſaz. Auf ähnliche Art läßt ſich die Anwendung auf das äuſſere Trettrad machen, welches aber für den arbeitenden Menſchen ſowohl, als ein arbeitendes Thier viel unbequemer, und eben darum weniger brauchbar iſt.

III. Zuſaz. Das Waſſerrad, und die Welle mit Windflügeln gehören zwar auch zu den Haſpeln im weitern Sinne, aber ihre Theorie läßt ſich erſt in der Hydraulik vertragen.

II. Abſchnitt.

Von dem Göpel.

§. 180.

Erklärungen.

Modificationen des Göpels (§. 172. b.) ſind:

a. Der gemeine Göpel, wo, ſtatt dem Rade, Zugſtangen durch die Welle geſteckt ſind, und das Seil, an welchem die Laſt befeſtiget iſt, ſich oberhalb um die Welle windet;

b. die Erdwinde (Fig. 73.), wenn bey eben dieſer Vorrichtung das Seil, an welchem die Laſt angebracht iſt, unterhalb den Zugſtangen ſich aufwindet;

c. die horizontale Trettſcheibe (Fig. 77.), wenn an der Welle eine Kreisſcheibe ſenkrecht auf ihre Axe durch den Mittelpunct befeſtiget iſt.

I. Zuſaz. Der gemeine Göpel, und die Erdwinde, werden dadurch in Bewegung geſezet, daß entweder Menſchen, die Zugſtangen an ihren Enden ergreiffen, oder Thiere daran geſpannet werden, dann im Kreiſe herumgehen, und dadurch die Welle um ihre Axe drehen.

II. Zuſaz. Bey der wagrechten Trettſcheibe (Fig. 77) ſteht der Arbeiter auf der wagrechten Ebene in gebogener Stellung, und hält ſich dabey mit den Händen an einem auſſerhalb dem Rade befeſtigten Nagel, wo alſo unter ſeinen bewegenden Füſſen ſich ſtets die Scheibe drehet.

III. Zuſaz. Soll durch eine dieſer Vorrichtungen die Laſt ſenkrecht aufwärts gezogen werden, ſo muß das Seil, welches an der Welle eine wagrechte Richtung hat, erſt noch über eine unbewegliche Rolle W wie Fig 77. gelegt werden.

IV. Zuſaz. Der Halbmeſſer des Rades muß bey dem gemeinen Göpel und der Erdwinde von der Axe der Welle an bis zu jener Stelle der Zugſtangen, an welchen ſie von den arbeitenden Menſchen oder Thieren ergriffen werden, bey der horizontalen Trettſcheibe bis an jene Stellen gerechnet werden, welche der Arbeiter mit ſeinen Füßen berührt.

§. 181.

Aufgabe. (Fig. 73.)

Bey einem gemeinen Göpel oder Erdwinde, wenn die bisherigen Bezeichnungen beybehalten werden, fer-

ner λ den Reibungscoefficienten bey gleitender, und λ' jenen bey umdrehender Bewegung ausdrücken, das Verhältniß der Kraft P zur Laſt Q für den Zuſtand des Gleichgewichtes anzugeben, ſo daß bey der Zunahme der Kraft nach ihrer Richtung eine Bewegung erfolgt.

Auflöſung.

1. Die ſenkrecht ſtehende Vorrichtung drückt mit ihrem ganzen Gewicht $M+nk$ gegen die kreisrunde Grundfläche A des untern Zapfenlagers, auf welcher ſie ruhet,

2. dieſer Druck iſt über die ganze Kreisfläche gleichförmig vertheilet, mithin läßt ſich ſolcher in einem Kreisringe vereiniget vorſtellen, deſſen Halbmeſſer $= \frac{2}{3} c$ iſt, (Reine Mechan. §. 104. III. Zuſ.) mithin iſt

3. das Moment der aus dieſem Drucke entſpringenden Reibung $= \frac{2}{3} c\lambda\,(M+nk)$.

4. Das Moment der Laſt am Umfange der Welle iſt $= rQ$, und jenes der Kraft, wenn ihre Richtung jedesmal auf die Zugſtange ſenkrecht iſt $= P.R$.

5. Die Laſt Q zieht nun immer in wagrechter Richtung nach eben derſelben Seite der Welle; hingegen die Kraft P verändert bey dem Umhergehen des arbeitenden Menſchen oder Thieres immer ihre Lage.

6. Durch P und Q zuſammen werden nun die beyden Zapfen der Welle gegen die Seitenflächen ihrer Pfannen gedrückt, aber dieſer Druck iſt veränderlich; er iſt nemlich am größten, wenn die Richtungen von P und Q auf eine Seite zuſammentreffen; am kleinſten, wenn ſie einander entgegengeſezt ſind.

7. Nimmt man für das Mittel jenen Druck, wo ihre Richtungen einen rechten Winkel einſchließen, ſo iſt ſolcher für beyde Zapfen zuſammen

$= \sqrt{(P^2+Q^2)}$ (Reine Mechan. §. 53. IX. Zuſ.) mithin iſt

8. das Moment der von dieſem Druck an dem Umfange der Zapfen entſtehenden Reibung

$= e\lambda' \sqrt{(P^2+Q^2)}$

9. Dazu kömmt noch am Umfange der Welle das Moment der Seilsſteife $= d^m\,(a+bQ)$.

10. Für den Zuſtand des Gleichgewichtes der Kraft P mit der Geſammtlaſt iſt alſo

11. $P.R = r\,Q + \frac{2}{3}\,e\lambda(M+nk) + e\lambda'\sqrt{(P^2+Q^2)}$
$+ d^m(a+bQ)$

Aus dieſer quadratiſchen Gleichung läßt ſich nun für jeden gegebenen Fall allemal P berechnen.

I. Zuſaz. Da eine genaue Beſtimmung ohnehin nie ganz möglich iſt, ſo kann man zur Vereinfachung der Formel $\lambda' = \lambda$ ſezen, alſo beydesmal den Reibungscoefficienten für die gleitende Bewegung nehmen.

II. Zuſaz. Ohne Berückſichtigung der Nebenlaſt würde die erforderliche Kraft $= \frac{r}{R}\,Q$ ſeyn (§. 171. III. Zuſaz), dieſer Werth iſt nun offenbar kleiner als der Nr. 11. beſtimmte, das iſt, $P > \frac{r}{R}\,Q$, mithin auch

$$\sqrt{(P^2+Q^2)} > \sqrt{\left[\frac{r^2}{R^2}\,Q^2 + Q^2\right]}$$
$$> Q\sqrt{\frac{r^2+R^2}{R^2}}$$

III. Zuſaz. Wenn man nun nach den beyden Zuſäzen die Subſtitution in der Gleichung Nr. 11. wirk-

lich vornimmt, ſo entſteht zwar ein etwas unrichtiger Werth, indeſſen da dieſer Fehler nie beträchtlich iſt, und die Formel eine viel bequemere Geſtalt erhält, ſo ſezet man

$$P.R = rQ + \tfrac{2}{3}e\lambda(M + nk) + e\lambda Q\sqrt{\left(\frac{r^2 + R^2}{R^2}\right)} + d^m(a + bQ)$$

$$= Q\left[r + e\lambda\sqrt{\left(\frac{r^2 + R^2}{R^2}\right)} + d^m b\right] + \tfrac{2}{3}e\lambda(M + nk) + d^m a$$

IV. Zuſaz. Für den Anfang der Bewegung muß P gröſſer ſeyn, mithin muß ſich der Arbeiter mehr anſtrengen. Bey arbeitenden Menſchen muß die zweckmäßige Anwendung ihrer Kräfte aus §. 104 - 108., und für Thiere §. 115 - 117. beſtimmt werden.

§. 182.

Aufgabe. (Fig. 77.)

Für den Zuſtand des Gleichgewichtes bey der horizontalen Trettſcheibe das Verhältniß der Kraft P anzugeben, wenn ſonſt alle bisher angenommenen Beſtimmungen beybehalten werden.

Auflöſung.

1. Der Arbeiter muß eine geneigte Stellung annehmen, dabey hält er ſich an dem auſſerhalb befindlichen Zapfen feſt, und ſtemmet ſich mit den Füſſen gegen die wagrechte Scheibe, es verhält ſich alſo

2. alles wie §. 104., wenn ein Arbeiter eine Laſt auf wagrechtem Boden vor ſich her ſchiebet, es ſtellet nemlich gegenwärtig die Stelle I (Fig 45.) den auſſerhalb der Trettſcheibe befeſtigten Nagel, und der wagrechte Boden NAB die bewegliche Trettſcheibe vor.

3. Behält man daher die oben angenommenen Bezeichnungen, ſo daß G das Gewicht des Arbeiters, ferner φ den Winkel ECe bezeichnet, ſo drückt

4. der Arbeiter gegen den Nagel I mit einer Kraft $= f = \frac{AC}{AH} G \tan g. \varphi$ nach der horizontalen Richtung HI, und

5. gegen die wagrechte Scheibe NAB nach der ſchiefen Richtung CA mit der Kraft $= G \sec. \varphi = \frac{G}{\cos. \varphi}$ (§. 104. Nr. 6 und 7.)

6. Erſtere Gewalt wird nun gegenwärtig durch die Feſtigkeit des auſſerhalb der Trettſcheibe angebrachten unbeweglichen Nagels I aufgehoben.

7. Leztere Kraft hingegen läßt ſich (Reine Mech. §. 53. IX. Zuſ.) in zwey Seitenkräfte zerlegen, nemlich (Fig. 45.)

8. in die verticale nach $A\gamma = \frac{G}{\cos. \varphi} \cos. a A\gamma$
$$= \frac{G}{\cos. \varphi} \cos. \varphi = G$$ und

9. in die wagrechte nach $AN = \frac{G}{\cos. \varphi} \sin. a A\gamma$
$$= \frac{G}{\cos. \varphi} \sin. \varphi = G \tan g. \varphi.$$

10. Die Kraft G (Nr. 8.), ſo wie das Gewicht M der Trettſcheibe, des aufgewickelten Seils nk drücken zuſammen den untern Zapfen O gegen ſeine Unterlage, und da dieſer Druck wieder gleichförmig auf der kreisrunden Fläche vertheilt iſt, ſo fallen die Mittelpuncte deſſelben in einen Ring, deſſen Halbmeſſer $= \frac{2}{3} e$ (Reine Mech. §. 104. III. Zuſ.), folglich

11. iſt das Moment der verurſachten Reibung $= \frac{2}{3} e\lambda [G + M + nk]$.

12. Die Richtung AN (Nr. 8.) der Kraft G tang. φ fällt zwar in die Umdrehungsebene der Scheibe, wird aber auf den Halbmeſſer im Berührungspuncte nicht immer ſenkrecht bleiben, indeſſen kann man doch dieſe ſenkrechte Richtung als die mittlere annehmen, folglich wird das Moment der umdrehenden Kraft, oder

13. $P.R = G.R.\ \text{tang.}\ \varphi$.

14. Durch eben dieſe Kraft P ſowohl, als durch die Laſt Q, entſteht aber noch an den Seiten der Zapfen der Welle eine Reibung, deren Moment man wie §. 181. I-III. Zuſ. $= c\lambda Q \sqrt{\left(\frac{r^2+R^2}{R^2}\right)}$ ſezen kann.

15. Endlich kömmt noch das Moment der Seilsſteife am Umfange der Welle in Anſchlag $= d^m(a+bQ)$

16. Für den Zuſtand des Gleichgewichtes iſt alſo

$$P.R = G.R\ \text{tang.}\varphi.$$

$$= Qr + \tfrac{3}{8}e\lambda\,[G+M+nk] + c\lambda Q\sqrt{\left[\frac{r^2+R^2}{R^2}\right]} + d^m(a+bQ)$$

$$= Q\left[r + c\lambda\sqrt{\left(\frac{r^2+R^2}{R^2}\right)} + d^m b\right] + \tfrac{3}{8}e\lambda(G+M+nk) + d^m a$$

I. Zuſaz. Will man ſtatt dem Winkel ECc $=\varphi$ (Fig. 45.) den Winkel CAB $=\beta$, das iſt, die Neigung des Arbeiters gegen die wagrechte Scheibe in die Rechnung bringen, ſo iſt $\beta = 90^\circ - \varphi$ (§. 104. III. Zuſ.), mithin tang. $\varphi = \cot.\beta$, folglich $P.R = G.R\ \cot.\beta$.

II. Zuſaz. Der Arbeiter kann ſein natürliches Gewicht G zwar nicht verändern, aber doch ſeine Kraft $P = G\ \text{tang.}\ \varphi = G\ \cot.\beta$ um etwas vermehren oder

ver-

vermindern, denn je größer φ, und daher je kleiner β; je mehr ſich nemlich der Arbeiter neigt, deſto größer wird die Kraft P, hingegen deſto unbeträchtlicher wird die Geſchwindigkeit, welche der Arbeiter anwenden kann (§. 105. II. Zuſ.).

III. Zuſaz. Nimmt man noch über dieſes auf die Dauer der Arbeit, bis nemlich die Kräfte erſchöpft ſind, Rückſicht, ſo ergiebt ſich aus §. 108., daß die Stellung des Arbeiters am vortheilhafteſten, wenn $\varphi = 22° 58'$, alſo $\beta = 67° 2'$ iſt. Nimmt man nun im Mittel das Gewicht eines Mannes oder G = 125 lb.; (§. 92. III. Zuſ.), ſo ergiebt ſich

$$P = G \text{ tang. } \varphi = 125 \times 0{,}4237884 = 52{,}974 \text{ lb.},$$

als die vortheilhafteſte Kraftäuſſerung.

IV. Zuſaz. Arbeiten mehrere Menſchen zugleich, welches gewöhnlich der Fall iſt, ſo muß ſtatt G die Summe der Gewichte aller Arbeiter geſezet werden.

V. Zuſaz. Läuft endlich das Seil noch (Fig. 77.) über eine unbewegliche Rolle W, ſo muß nach §. 153. ihr Einfluß in die Rechnung aufgenommen werden.

§. 183.

Erklärung. (Fig. 78.)

Wenn mit einer Welle eine kreisrunde Scheibe, auf welcher die Axe durch ihren Mittelpunct ſenkrecht ſteht, verbunden wird, die Vorrichtung aber in ſo einer Lage befeſtiget wird, daß die Axe der Welle gegen den wagrechten Boden unter einem ſchiefen Winkel geneigt iſt, ſo heißt die Vorrichtung eine ſchiefe Trettſcheibe, oder weil ſie viel gewöhnlicher als die vorhergehende iſt, eine Trettſcheibe ohne Beyſaz.

I. Zuſaz. Die ſchief geſtellte Ebene der Trettſcheibe wird mit Stuffen verſehen, befindet ſich nun auf ihr ein Laſtthier, ſo wird es durch ſein Gewicht gegen die Ebene drücken und die Scheibe um die befeſtigte Axe der Welle zu drehen ſtreben.

II. Zuſaz. Der Halbmeſſer des Trettrades, oder R wird von der Axe bis an jene Stelle der Scheibe gerichtet, wo ſie die vom Schwerpunct des Thieres gezogene Verticallinie ſchneidet.

III. Zuſaz. Errichtet man durch den Punct C, wo die Axe der Welle auf dem wagrechten Boden ruhet, einen Perpendikel CD, und legt durch CD und die Axe CE eine Ebene, ſo iſt ſie eine Axenebene (Reine Mechan. §. 79. b.), welche zugleich auf dem Boden und der Ebene der Scheibe ſenkrecht ſteht (Geometr. §. 170.), verlängert man nun ihre Durchſchnittslinien CF, AB mit dieſen beyden Ebenen, bis ſie in O zuſammenſtoßen, ſo iſt der Winkel AOC $= \alpha$ der Neigungswinkel der geneigten Ebene der Scheibe gegen den wagrechten Boden (Geometr. §. 171. II. Zuſ.).

IV. Zuſaz. Die Axe CE ſteht auf der Ebene der Radſcheibe, mithin auf der Linie AB ſenkrecht, alſo iſt CLO $= 90°$, und die Neigung der Axe gegen den Boden, oder ECO $=$ LCO $= 90° - \alpha$.

V. Zuſaz. Legt man durch den tiefſten Punct B der Scheibe zum wagrechten Boden eine Parallelebene, ſo iſt BI parallel mit OC (Geometr. §. 172. II. Zuſ.), folglich der Winkel ABI $= \alpha$.

VI. Zuſaz. Errichtet man in der Mitte von AB auf die Axenebene DCE einen Perpendikel, ſo liegt ſolcher ganz in der Ebene des Rades (Geom. §. 170.

II. Zuſ.), iſt folglich ein Halbmeſſer der Trettſcheibe, in der Figur zeigt L einen Punct deſſelben an, zieht man alſo durch L ein Parallele zur Linie AB, ſo ſteht ſie auf dem Halbmeſſer ſenkrecht.

VII. Zuſaz. Bey der ſchiefen Trettſcheibe wird die Laſt mit der Welle nur ſehr ſelten mittels eines umgelegten Seils verbunden ſeyn, ſondern gewöhnlich iſt die Vorrichtung ſo beſchaffen, daß das Trettrad erſt noch ein anderes Rad in Bewegung ſezet, und mit leztern dann die eigentliche Nuzlaſt in Verbindung ſteht; gegenwärtig bezeichnet alſo r die Entfernung des Eingriffes von der Axe der Welle, und Q überhaupt das Hinderniß, welches an dieſer Stelle die Nuzlaſt nebſt der mit ihr auſſer der Trettſcheibe verbundenen Vorrichtung der bewegenden Kraft entgegenſezet.

§. 184.

Aufgabe. (Fig. 78.)

Auf der ſchiefen Trettſcheibe iſt ein Laſtthier, deſſen Gewicht G, ſo geſtellet, daß die vom Schwerpuncte des Thieres gezogene Verticallinie die Ebene der Scheibe in L, das iſt, in einem Punct des Halbmeſſers, welcher auf AB ſenkrecht ſteht (§. 183. VI. Zuſ.), ſchneidet; dieſes Laſtthier halte nun mit einer Laſt Q in der Entfernung r (§. 183. VII. Zuſ.) ſo das Gleichgewicht, daß bey der Zunahme von G vom Laſtthier die Scheibe um ihre Axe gedreht würde, man ſucht das Verhältniß, wenn überdieß der Halbmeſſer R von der Trettſcheibe (§. 183. II. Zuſ.), und der Halbmeſſer e der beyden Zapfen der Welle, das Gewicht M des ganzen Trettrades, und die Neigung α derſelben gegen den wagrechten Boden gegeben ſind.

Aufloͤſung.

1. Auf der ſchiefen Ebene der Scheibe zerlegt ſich in L die Kraft G in 2 Seitenkraͤfte (Reine Mechan. §. 154.), nemlich

2. nach der auf die ſchiefe Ebene ſenkrechten Richtung $= G \cos. \alpha$, und

3. nach der zu AB parallelen Richtung $= G \sin. \alpha$.

4. Erſtere Kraft wird durch die feſte Scheibe aufgehoben.

5. Leztere Kraft hingegen wirkt auf den Halbmeſſer der Scheibe in L ſenkrecht (§. 183. VI. Zuſ.), und ſtrebt alſo, die Scheibe um ihre Axe zu drehen,

6. das Moment dieſer Kraft iſt alſo $= G.R \sin. \alpha$.

7. Nach der entgegengeſezten Richtung iſt der Aufgabe gemaͤß das Moment der Laſt $= Q.r$

8. Noch koͤmmt die Reibung an den beyden Zapfen als Hinderniß in Betrachtung zu ziehen.

9. Auf der untern Unterlage in C ruhet nun die ganze Vorrichtung, mithin leidet ſolche einen verticalen Druck $= G + M$.

10. Dieſer Druck aber iſt gegen das Zapfenlager, welches nothwendig zur Scheibe parallel, alſo gegen den wagrechten Boden unter dem Winkel α geneigt ſeyn muß, ſchief, mithin laͤßt ſich ſolche

11. in einen zu dieſer Ebene parallelen $= (G + M) \sin. \alpha$ und

12. den andern auf dieſe Ebene ſenkrechten Drucke $= (G + M) \cos. \alpha$ zerlegen.

13. Lezterer Druck iſt wieder uͤber die ganze Grundflaͤche des Zapfens gleichfoͤrmig verbreitet, mithin wird,

wie §. 182. Nr. 10 und 11., das Moment der daraus entſtehenden Reibung

$$= \frac{2}{3}\, c\,\lambda \cos.\alpha\,(G+M)$$

14. Der zur Fläche parallele Druck (Nr. 11.) und jener von der Laſt Q erzeugte, drücken die beyden Zapfen gegen die Seitenfläche ihrer Unterlagen, mithin iſt das Moment dieſer Seitenreibung $= c\lambda[Q+(G+M)\sin.\alpha]$ wo man nemlich für den Reibungscoefficienten der umdrehenden Bewegung ohne merklichen Fehler jenen der gleitenden Bewegung ſezen kann.

15. Für den Zuſtand des Gleichgewichtes iſt folglich

$$G.R\sin.\alpha = Q.r + \tfrac{2}{3}\, c\lambda\cos.\alpha(G+M) + c\lambda[Q+(G+M)\sin.\alpha]$$

Zuſaz. Da jedesmal G, das Gewicht des Laſtthieres, eine gegebene unveränderliche Größe iſt, ſo läßt ſich die Wirkſamkeit deſſelben nur dadurch vermehren, daß man den Halbmeſſer R der Trettſcheibe und ihre Neigung gegen den wagrechten Boden vergrößert, indeſſen je ſteiler die Ebene wird, deſto beſchwerlicher iſt die Arbeit für das Laſtthier.

III. Abſchnitt.

Von dem Schwungrade.

§. 185.

Erklärungen.

Ein Schwungrad beſtehet entweder

a. aus einem beſondern Rade (Fig. 72.), Scheibe, Ringe, Kolben u. ſ. w., welche an der Welle angebracht ſind, und ſich mit ihr um die Axe drehen, oder

b. es wird nur die Maſſe eines ſchon vorhandenen Rades oder Scheibe vermehret.

I. Zuſaz. Beſteht das Schwungrad aus einem zylindriſchen Ringe (Fig. 72), ſo bezeichnet r = os den Halbmeſſer des innern, R = ol den Halbmeſſer des äuſſern Umfanges, mithin R - r = ts iſt die Breite, ſo wie x = uw die Dicke des Schwungringes.

II Zuſaz. Die Ungleichförmigkeit der periodiſchen Bewegung einer Maſchine hat ihren Grund in der Ungleichförmigkeit der ſtatiſchen Momente, entweder der Laſt oder der Kraft.

III. Zuſaz. Die Ungleichförmigkeit der ſtatiſchen Momente der Laſt kömmt gewöhnlich daher, daß die Maſſe, welche periodiſch in Bewegung geſezt werden ſoll, nicht immer dieſelbe bleibt wie §. 18.

IV. Zuſaz. Die Ungleichförmigkeit der ſtatiſchen Momente der Kraft hat entweder in der Veränderlichkeit der Kraft ſelbſt, oder ihrer Richtung gegen den Halbmeſſer des Rades, an welchem ſie wirkſam iſt, ihren Grund.

§. 186.

Aufgabe.

Für eine Maſchine, an welcher die Welle periodiſch die Maſſe N + O in Bewegung ſezen, und ſolche am Ende der Zeit t wieder verlaſſen, und in der nächſtfolgenden Zeit t eben dieſe Verrichtung wiederholen muß, und dadurch nothwendig einen ungleichförmigen Gang bekömmt, ſoll man die Dicke x eines zweckmäßigen Schwungringes angeben, von welchem das Material, mithin auch das Gewicht p deſſelben für das gebrauchte Körpermaaß, z. B. eines Cubikzolls ſowohl,

als die Halbmeſſer $\mathfrak{R}$, r des äuſſern und innern Umfanges, folglich auch die Breite $\mathfrak{R}$ - r gegeben ſind.

Auflöſung.

1. Wenn R den Halbmeſſer des Kraftpunctes, r jenen des Laſtpunctes, c den Halbmeſſer der beyden Wellenzapfen, woran der Ring feſtgemacht wird, ferner B, b die gleichzeitigen Räume des Kraft- und Laſtpunctes bezeichnen, wozu n Umdrehungen, weil alle an der Axe befeſtigten Theile einerley Winkelgeſchwindigkeit haben, erfoderlich ſind, ſo iſt

2. $b = 2nr\pi$.

3. Bey n Umdrehungen, während alſo der Laſtpunct den Raum $b = 2nr\pi$ durchläuft, wird jeder Punct am äuſſern Umfange des Schwungrades den Raum $= 2n\mathfrak{R}\pi$, und jeder Punct am Umfange der Wellzapfen den Weg $= 2nc\pi$ hinterlegen, mithin iſt

4. $b : 2n\mathfrak{R}\pi = r : \mathfrak{R}$, folglich

5. $r = \frac{b}{2n\pi}$, und $r^2 = \frac{b}{4n^2\pi^2}$.

6. Eben ſo iſt: $b : 2nc\pi = r : c$, alſo

7. $\frac{c}{r} = \frac{2nc\pi}{b}$

8. Bezeichnet nun M″ die auf den Laſtpunct reducirte Maſſe des Schwungringes, und M′ die auf dieſen Punct reducirte Maſſe der übrigen an der Welle feſtgemachten Theile, ſo iſt $M = M' + M''$ die Maſſe, welche beſtändig in Bewegung bleibt, während N + O periodiſch mit Ruhe und Bewegung abwechſelt.

9. Da nun die Maſſe des Schwungringes von der Dicke x deſſelben abhängt, ſo M″ eine veränderliche Größe.

10. Sobald ſich aber M″ verändert, ſo iſt auch dadurch der Druck gegen die Zapfen, mithin auch die verurſachte Reibung, alſo auch die Totallaſt veränderlich;

11. Bezeichnet Q″ dieſen veränderlichen, und Q′ den unveränderlichen Theil, ſo iſt die Totallaſt
$Q = Q' + Q''$.

12. Gegenwärtig verhält ſich nun alles wie §. 18., nur muß man daſelbſt im I. Zuſ. ſtatt M und Q ihre Werthe M′+M″, und Q′+Q″ ſezen; dadurch wird alſo

$$13.\ P.\frac{B}{b} = Q'+Q''+\frac{(N+O)(M'+M''+N+O)\,b}{g\,t^2(2M'+2M''+N+O)}$$

$$= Q'+Q''+\frac{(N+O)M''b+(N+O)(M'+N+O)b}{2\,g\,t^2M''+g\,t^2\,(2M'+N+O)}$$

14. Soll das Schwungrad zweckmäßig ſeyn, ſo muß es die Ungleichförmigkeit der Bewegung verhindern, ohne dadurch die Nebenlaſt auf unnüze Weiſe zu vermehren, mithin ſo beſchaffen ſeyn, daß die vorhergehende Function ein minimum iſt.

15. Das Gewicht des Schwungringes iſt
$= \pi p\,(\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{r}^2)\,x$ (Geometr. §. 260. VI. Zuſ.)

16. Dieſe Maſſe verurſachet an den beyden Zapfen der Welle zuſammen eine Reibung
$= \lambda\pi p\,(\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{r}^2)\,x$.

17. Reduciret man dieſe Nebenlaſt am Umfange der Zapfen auf den Laſtpunct, das iſt, auf die Entfernung r von der Axe, ſo erhält man Q″ (Nr. 11.), es iſt nemlich

$$Q'' = \frac{c}{r}\,\lambda\pi p\,(\mathfrak{R}^2-\mathfrak{r}^2)x \text{ (§. 171. III. Zuſ.)}$$

$$= \frac{2nc\pi}{b}\,\lambda\pi p\,(\mathfrak{R}^2-\mathfrak{r}^2)x \text{ (Nr. 7.)}.$$

18. Da nur x veränderlich, alle übrigen hingegen beſtändige Größen ſind, ſo kann man in der vorhergehenden lezten Gleichung der Kürze wegen den beſtändigen Factor $= \alpha$, alſo

19. $Q'' = \alpha x$ ſezen.

20. Der Schwungring beſteht aus der Differenz zweyer ſenkrechter Cylinder, welche die gemeinſchaftliche Wellenaxe, und Höhe x haben, und wo $\mathfrak{R}$, r die Halbmeſſer ihrer Grundflächen ſind, folglich beſteht auch für die Wellenaxe das Moment der Trägheit des Ringes aus dem Unterſchiede der einzelnen Momente dieſer Cylinder für eben dieſe Wellenaxe.

21. Nun iſt für den größern Cylinder das Moment der Trägheit in Beziehung ſeiner geometriſchen Axe $= \frac{1}{2}\mathfrak{R}^2 \pi x p . \mathfrak{R}^2$ (Reine Mechan. §. 187. I. Zuſaz) $= \frac{1}{2}\pi p \mathfrak{R}^4 x$

Für den kleinern iſt dieſes Moment eben ſo $= \frac{1}{2}\pi p r^4 x$, mithin

22. Für den Schwungring $= \frac{1}{2}\pi p (\mathfrak{R}^4 - r^4) x$

23. Nun bezeichnet M″ die auf den Laſtpunct reducirte Maſſe des Schwungringes (Nr. 8.), folglich iſt in Beziehung auf die Wellenaxe ihr Moment der Trägheit $= r^2 M''$ (Reine Mechan. 172.), mithin

24. $r^2 M'' = \frac{1}{2}\pi p (\mathfrak{R}^4 - r^4) x$, und

$$M'' = \frac{\frac{1}{2}\pi p (\mathfrak{R}^4 - r^4) x}{r^2} = \frac{\pi p (\mathfrak{R}^4 - r^4) x}{2} \times \frac{4 n^2 \pi^2}{b^2} \text{ (Nr. 5.)}$$

$$= \frac{2\pi^3 p n^2 (\mathfrak{R}^4 - r^4) x}{b^2}, \text{ folglich}$$

25. $$(N+O) M'' b = (N+O) \frac{2 p n^2 \pi^3 (\mathfrak{R}^4 - r^4)}{b} x$$
$$= \beta x$$

26. $2gt^2 M'' = \frac{4gt^2 pn^2 \pi^3 (\mathfrak{R}^4 - r^4)}{b^2} x$

$= \delta x$

indem in beyden Gleichungen nur x allein eine veränderliche Größe iſt.

27. Sezet man endlich eben ſo die beſtändigen Größen und zwar $gt^2(2M' + N + O) = \gamma$, und

28. $(N+O)(M'+N+O)\, b = \varepsilon$

29. Subſtituirt dieſe abgekürzten Werthe (Nr. 19; 25 bis 28.) in die Gleichung Nr. 13., ſo wird

30. $P.\frac{B}{b} = Q' + \alpha x + \frac{\beta x + \varepsilon}{\delta x + \gamma}$

Nun ſoll die veränderliche Größe x ſo beſtimmet werden, daß die Function ein minimum wird, man ſeze daher den ganzen Werth derſelben $= y$, oder

31. $y = Q' + \alpha x + \frac{\beta x + \varepsilon}{\delta x + \gamma}$, ſo iſt

$$dy = \alpha dx + \frac{(\delta x + \gamma)\beta dx - (\beta x + \varepsilon)\delta dx}{(\delta x + \gamma)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 = \alpha + \frac{\beta(\delta x + \gamma) - \delta(\beta x + \varepsilon)}{(\delta x + \gamma)^2}$$

$$= \frac{\alpha\delta^2 x^2 + 2\alpha\delta\gamma x + \alpha\gamma^2 + \beta\delta x + \beta\gamma - \beta\delta x - \delta\varepsilon}{(\delta x + \gamma)^2}$$

oder

32. $\frac{dy}{dx} = 0 = \alpha\delta^2 x^2 + 2\alpha\gamma\delta x + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma - \delta\varepsilon$, alſo

33. $\alpha\delta^2 x^2 + 2\alpha\gamma\delta x = \delta\varepsilon - \alpha\gamma^2 - \beta\gamma$

$x^2 + \frac{2\gamma}{\delta} x = \frac{\delta\varepsilon - \alpha\gamma^2 - \beta\gamma}{\alpha\delta^2}$, und

34. $x = -\frac{\gamma}{\delta} + \sqrt{\left[\frac{\delta\varepsilon - \alpha\gamma^2 - \beta\gamma}{\alpha\delta^2} + \frac{\gamma^2}{\delta^2}\right]}$ (Arith. §. 159.)

$$= -\frac{\gamma}{\delta} + \sqrt{\left[\frac{\delta\varepsilon - \alpha\gamma^2 - \beta\gamma + \alpha\gamma^2}{\alpha\delta^2}\right]}$$

$$= -\frac{\gamma}{\delta} + \sqrt{\left(\frac{\delta\varepsilon - \beta\gamma}{\alpha\delta^2}\right)}$$

35. Das 2te Differential von Nr. 32. wird

$$d^2y = 2\alpha\delta x dx^2 + 2\alpha\gamma\delta dx^2,\ \text{alſo}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a\delta x + 2\alpha\gamma\delta$$

So daß alſo für den Nr. 34. beſtimmten Werth von x die Function Nr. 31., oder was eben daſſelbe iſt, Nr. 13. ein minimum iſt. (Arithm. §. 320.)

I. Zuſaz. Sollte die Gleichung Nr. 34. für x einen negativen Werth geben, wenn nemlich $\frac{\gamma}{\delta} > \sqrt{\left(\frac{\delta\varepsilon - \beta\gamma}{\alpha\delta^2}\right)}$ seyn ſollte, ſo zeigt dieſes an, daß die ſchon vorhandene Maſſe der Maſchine zu vermindern ſey, welches aber dem Zwecke des Schwungrades gemäß nicht geſchehen kann.

II. Zuſaz. Da in größerer Entfernung von der Axe eine geringere Maſſe einer größern bey geringerer Entfernung gleichgeltend iſt, indem ſich die Trägheitsmomente, wie die Maſſen, in die Quadrate ihrer Entfernungen verhalten (Reine Mech. §. 172.), und wenige Maſſe die Maſchine auch weniger beſchweret, und daher keine ſo beträchtliche Reibung verurſachet, ſo muß R ſo groß als möglich, dagegen die Breite R−r an dem Ringe klein genommen werden.

§. 187.

Aufgabe. (Fig. 72.)

Bey einem Hornhaſpel wie §. 176., wo alſo alle oben angegebene Beſtimmungen und Bezeichnungen beybehalten werden, ſoll die Beſchaffenheit eines Schwungrades angegeben werden, damit der Haſpel, wenn der Arbeiter mit der Geſchwindigkeit c den Griff der Kurbel verläßt, noch N Umdrehungen vollendet.

Für das Schwungrad iſt das Material, mithin alſo das Gewicht p des gebrauchten Körpermaaßes, z. B. eines Cubikfußes gegeben, ferner bezeichnen $\mathfrak{R}$, r den äuſſern und innern Halbmeſſer, mithin $\mathfrak{R}$-r deſſen Breite, ſo wie f deſſen Dicke.

Aufloͤſung.

1. Vermög §. 186. II. Zuſ. müſſen die Halbmeſſer $\mathfrak{R}$, r ſo beſtimmt werden, daß ſie eine beträchtliche Größe haben, hingegen $\mathfrak{R}$-r nicht größer iſt, als es die Feſtigkeit des Ringes erfodert, mithin ſoll gegenwärtig nur noch die Dicke des Kranzes oder f angegeben werden, ſo daß alſo f, ſobald $\mathfrak{R}$, r angenommen ſind, durch die Bedingung der Aufgabe vollkommen beſtimmt, mithin zwar eine noch unbekannte, aber keine veränderliche Größe ausdrückt.

2. Nach dem vorhergehenden §. Nr. 15. iſt das Gewicht des Schwungringes $= \pi p (\mathfrak{R}^2 - r^2) f$.

3. Ferner nach Nr. 22. für die Umdrehungs- oder Wellenaxe das Trägheitsmoment dieſes Schwungringes

$$= \tfrac{1}{2} \pi p (\mathfrak{R}^4 - r^4) f$$

4. Wenn nun der Arbeiter den Hornhaſpel in Bewegung ſezet, und dann die Handhabe der Kurbel verläßt, wenn jeder Punct dieſes Griffes ſich mit der Geſchwindigkeit c beweget, ſo würde die Maſchine die Bewegung vermög ihrer Trägheit gleichförmig fortſezen (Reine Mechan. § 5. b.), wenn nicht Hinderniſſe ſolche hemmen, und endlich aufheben würden.

5. Gegen die Fortſezung dieſer Bewegung ſtemmet ſich nun die Laſt Q, und das Gewicht nk des abgewickelten Seils, hingegen kommen die beyden Kübel, da ſie gegen einander gehen, nicht in Anſchlag.

6. Dieſes Hinderniß am Umfange der Welle iſt daher $= Q + nk$

7. Der Druck auf die beyden Zapfenlager durch die Laſt und den Haſpel ſelbſt iſt $= Q+q+M+(n+s)k$ (§. 176. Nr. 5), gegenwärtig kömmt P, indem der Arbeiter bereits die Kurbel verlaſſen hat, nicht mehr vor.

8. Dadurch entſteht am Umfange der beyden Zapfen eine Reibung, welche auf den Umfang der Welle reducirt $= \frac{e}{r}\lambda[Q+q+M+(n+s)k]$ iſt.

9. Das Schwungrad ſelbſt vermehrt durch ſein Gewicht den Druck auf die Zapfenlager, verurſacht alſo ebenfalls am Umfange der Zapfen eine Reibung, reducirt man ſolche auf den Umfang der Welle, ſo iſt ſie $= \frac{e}{r}\lambda\pi p(\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{r}^2) f$

10. Endlich iſt das von der Seilsſteife herrührende Hinderniß am Umfange der Welle

$$= \frac{d^m}{r}(a + b(Q + \tfrac{1}{2}q + nk)) \text{ (§. 176. Nr. 7.)}$$

11. Da nun alle Größen auſſer f bekannt ſind, ſo ſeze man der Kürze wegen die bekannten Größen Nr. 6, 8 und 10.

$$Q + nk + \frac{e}{r}\lambda(Q+q+M+(n+s)k) + \frac{d^m}{r}(a+b(Q+\tfrac{1}{2}q+nk))$$

$= \alpha$, und $\frac{e}{r}\lambda\pi p(\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{r}^2) f$ (Nr. 9.) $= \beta f$ ſo iſt

12. Am Umfange der Welle das Totalhinderniß $= \alpha + \beta f$, mithin

13. das Moment deſſelben $= r(\alpha + \beta f)$.

14. Für die Umdrehungs- oder Wellenaxe ſind die Momente der Trägheit, und zwar

jenes der Laſt $= r^2 (Q + q + nk)$ (Reine Mech. §. 172.)
" " " des Haſpels $= \frac{1}{2} r^2 (M + sk)$ (R. Mech. §. 187. I Zuſ.)
" " " des Schwungrades $= \frac{1}{2} \pi p (\mathfrak{R}^4 - r^4) f$ (Nr. 3.)

$$= r^2 . \frac{\frac{1}{2} \pi p}{r^2} (\mathfrak{R}^4 - r^4) f$$

15. Sezet man wieder der Kürze wegen die bekannten Größen:

$$Q + q + nk + \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} sk = \varepsilon.$$

$$\frac{1}{2} \frac{\pi p}{r^2} (\mathfrak{R}^4 - r^4) f = \delta f, \text{ ſo iſt}$$

16. die Summe obiger Trägheitsmomente, das iſt, das Trägheitsmoment der ganzen Vorrichtung $= r^2 (\varepsilon + \delta f)$

17. Die angeführten Hinderniſſe, in wie ferne ſie die Bewegung hemmen, und endlich am Ende der Zeit t ganz aufheben, leiſten alſo eben das, was Kräfte thun würden von eben dieſer Größe und an eben dieſer Stelle, man kann alſo nun beſtimmen, wenn dieſe Kräfte für ſich wirkſam ſeyn würden, während dieſer Zeit t, welche Bewegung würden ſie der ganzen Vorrichtung ertheilen.

18. Bezeichnet γ die Winkelgeſchwindigkeit, und u die wahre Geſchwindigkeit eines Punctes am äuſſern Umfange des Schwungrades, s den während t hinterlegten Weg eben dieſes Punctes, ſo iſt:

$u = \mathfrak{R} \gamma$ (Reine Mechan. §. 169. II. Zuſ.), mithin

19. $du = \mathfrak{R} d\gamma$

20. Ferner iſt:

$$d\gamma = \frac{2gr(\alpha + \beta f) dt}{r^2 (\varepsilon + \delta f)} \text{ (Reine Mech. §. 177. III. Zuſ.)}$$

$$= \frac{2g dt (\alpha + \beta f)}{r (\varepsilon + \delta f)}, \text{ mithin}$$

21. $du = 2gdt. \frac{\mathfrak{R}(\alpha+\beta f)}{r(\varepsilon+\delta f)}$ (Nr. 9.), und

22. $u = 2gt \frac{\mathfrak{R}(\alpha+\beta f)}{r(\varepsilon+\delta f)}$, wo keine Const. dazu kömmt, weil für $t=o$, auch nothwendig $u=o$ iſt.

23. $ds = udt$ (Reine Mechan. §. 38.)

$$= 2gtdt \frac{\mathfrak{R}(\alpha+\beta f)}{r(\varepsilon+\delta f)}, \text{ folglich}$$

24. $s = gt^2 \frac{\mathfrak{R}(\alpha+\beta f)}{r(\varepsilon+\delta f)}$, wo wieder keine Const. addirt werden darf, weil ebenfalls für $t=o$, auch $s=o$ iſt.

25. Nun ſoll der Haſpel durch die erlangte Geſchwindigkeit, mit welcher der Arbeiter denſelben ſich ſelbſt überläßt, noch N Umdrehungen vollenden, mithin muß ein Punct am äuſſern Umfange des Schwungrades während der Zeit t (Nr. 17.) einen Weg $= 2N\mathfrak{R}\pi$ hinterlegen.

26. Jeder Punct am Griffe der Kurbel hat in dem Augenblicke, wo ſie der Arbeiter verläßt, die Geſchwindigkeit c, bezeichnet nun C die entſprechende Geſchwindigkeit eines Punctes am äuſſern Rande des Ringes, ſo iſt:

$$c : C = R : \mathfrak{R}, \text{ mithin}$$

27. $C = \frac{c.\mathfrak{R}}{R}$

28. Dieſe Geſchwindigkeit C wird nun während N Umdrehungen, das iſt, während der Zeit t (Nr. 17.) durch die erlangte entgegengeſezte Geſchwindigkeit u (Nr. 22.) aufgehoben, mithin iſt

$$C - u = o, \text{ oder } \frac{c\mathfrak{R}}{R} - u = o, \text{ folglich}$$

29. $u = \frac{c.\,\mathfrak{R}}{R}$.

30. Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 22., ſo wird:

$$\frac{c.\,\mathfrak{R}}{R} = \frac{2g\mathfrak{R}(\alpha+\beta f)}{r(\varepsilon+\delta f)}\,t,\text{ oder}$$

$$\frac{c}{R} = \frac{2g(\alpha+\beta f)}{r(\varepsilon+\delta f)}\,t,\text{ mithin}$$

31. $t = \frac{cr(\varepsilon+\delta f)}{2gR(\alpha+\beta f)}$, und

32. $t^2 = \frac{c^2 r^2(\varepsilon+\delta f)^2}{4g^2 R^2(\alpha+\beta f)^2}$

33. Leztern Werth in die Gleichung Nr. 24. geſezet, giebt:

$$s = \frac{g\mathfrak{R}(\alpha+\beta f)}{r(\varepsilon+\delta f)} \times \frac{c^2 r^2(\varepsilon+\delta f)^2}{4g^2 R^2(\alpha+\beta f)^2}$$

$$= \frac{c^2 r\mathfrak{R}(\varepsilon+\delta f)}{4g R^2(\alpha+\beta f)}.$$

34. Mit der anfänglichen Geſchwindigkeit C würde jeder Punct am äuſſern Umfange des Rades, wenn ſich nicht Hinderniſſe vorfänden, während der Zeit t gleichförmig den Weg Ct (Reine Mech. §. 36. III. Zuſ.) hinterlegen, ſezet man aus Nr. 27 und 31. für C und t die Werthe, ſo iſt dieſer hinterlegte Weg, oder

$$Ct = \frac{c\,\mathfrak{R}}{R} \cdot \frac{cr(\varepsilon+\delta f)}{2gR(\alpha+\beta f)} = \frac{c^2 r\mathfrak{R}(\varepsilon+\delta f)}{2gR^2(\alpha+\beta f)}.$$

35. Durch die vorhandenen Hinderniſſe aber läßt ſich der wahre Weg Nr. 25. aus den beyden vorhergehenden Nr. 33 und 34., nach entgegengeſezten Richtungen zuſammengeſezt, vorſtellen, es iſt daher

c² r

$$\frac{c^2 r \mathfrak{R}(\varepsilon+\delta f)}{2gR^2(\alpha+\beta f)} - \frac{c^2 r \mathfrak{R}(\varepsilon+\delta f)}{4gR^2(\alpha+\beta f)} = 2N\mathfrak{R}\pi, \text{ oder}$$

$$\frac{2c^2 r(\varepsilon+\delta f)}{4gR^2(\alpha+\beta f)} - \frac{c^2 r(\varepsilon+\delta f)}{4gR^2(\alpha+\beta f)} = 2N\pi$$

$$\frac{c^2 r(\varepsilon+\delta f)}{4gR^2(\alpha+\beta f)} = 2N\pi$$

$$c^2 r\varepsilon + c^2 r\delta f = 8gNR^2\pi\alpha + 8gNR^2\pi\beta f$$

$$f(c^2 r\delta - 8gNR^2\pi\beta) = 8gNR^2\pi\alpha - c^2 r\varepsilon$$

folglich

$$36. \quad f = \frac{8gNR^2\pi\alpha - c^2 r\varepsilon}{c^2 r\delta - 8gNR^2\pi\beta}$$

wodurch alſo die Aufgabe vermög Nr. 1. aufgelöſet iſt.

I. Zuſaz. Für einen ein= oder zweymänniſchen Hornhaſpel iſt zur Verhütung der ungleichförmigen Bewegung (§. 175. II. Zuſ.) ein zweckmäßig angebrachtes Schwungrad ſehr vortheilhaft.

II. Zuſaz. Um die Ungleichheit der ſtatiſchen Momente der Kraft bey dem ein= oder zweymänniſchen Haſpel zu vermindern, iſt's alſo vortheilhaft $N = \frac{1}{2}$ Umdrehung zu ſezen, damit bey dem Aufwärtsziehen der Mangel an Kraft durch die Geſchwindigkeit des Schwungrades erſezt wird.

§. 188.

Aufgabe. (Fig. 72.)

Für einen Hornhaſpel, für welchen alle §. 177. angegebene Dimenſionen und Bezeichnungen gelten, ſoll vom Eichenholz ein Schwungring, deſſen äuſſerer Halbmeſſer $\mathfrak{R} = 3$ Fuß $= 36$ Zoll, und der innere Halbmeſſer $r = 1$ Fuß $= 12$ Zoll gegeben ſind, ange=

bracht werden, damit der Haſpel, wenn die Arbeiter mit der Geſchwindigkeit $c = 2{,}5$ Fuß $= 30$ Zoll plözlich die Kurbel verlaſſen, noch eine halbe Umdrehung vollendet, man ſuchet die Dicke f des Schwungringes.

Auflöſung.

Da dieſe Aufgabe ein Beyſpiel zur vorhergehenden Aufgabe iſt, ſo werden die Nr. fortgeſezet.

37. Vermög 177 §. Nr. 11, 13 und 15 iſt

$$Q + nk = 99{,}5$$
$$\frac{e}{r}\lambda[Q+q+M+(n+s)k] = 4{,}82$$
$$\frac{d^m}{r}[a+b(Q+\tfrac{1}{2}q+nk)] = 6{,}2, \text{ mithin}$$

38. $$\alpha = 110{,}52 \text{ (Nr. 11.)}$$

39. Eben ſo iſt nach §. 177.:
$$Q+q+nk+\tfrac{1}{2}sk+\tfrac{1}{2}M = 77+52+22{,}5+7{,}5+76{,}5$$
mithin

40. $\varepsilon = 235{,}5$ (Nr. 15.)

41. Bey trockenem Eichenholz ſezt Hr. Langsdorf deſſen ſpecifiſche Schwere $= 0{,}615$; nun wiegt eine baieriſche Maaß Waſſer 14560 Gran, und die baieriſche Maaß hält 74,304 Duodec. Cubikzoll, ferner hält ein ℔. 7680 Gran, folglich iſt das Gewicht eines Cubikzolles Eichenholz, oder

42. $$p = \frac{14560 \times 0{,}615}{74{,}304 \times 7680} = 0{,}015691 \text{ ℔.}$$

43. Ferner iſt
$$\mathfrak{R}^2 = 1296$$
$$\mathfrak{r}^2 = 144$$
$$\mathfrak{R}^2 - \mathfrak{r}^2 = 1152$$

44. $\mathfrak{R}^4 = 1680216$
$r^4 = 20736$
$\mathfrak{R}^4 - r^4 = 1659480$

45. log. e = 0,7958800 - 1
log. λ = 0,1238516 - 1 } §. 177.
log. π = 0,4971499
log. p = 0,1956631 - 2 (Nr. 42.)
log. $(\mathfrak{R}^2 - r^2)$ = 3,0614525
c. dec. log. r = 9,2596373 - 10
log. β = 0,9336344 - 1 (Nr. 11.)

46. log. r = 0,7403627
2 = 2
log. r^2 = 1,4807254
log. 2 = 0,3010300
log. $2r^2$ = 1,7817554

47. log. π = 0,4971499
log. p = 0,1956631 - 2
log. $(\mathfrak{R}^4 - r^4)$ = 6,2199721
c. dec. log. $2r^2$ = 8,2182446 - 10
folglich log. δ = 3,1310297 (Nr. 15.)

48. log. 8. = 0,9030900
log. g (g in Zollen) = 2,3045292
log. N = log. $\frac{1}{2}$ = 0,6989700 - 1
log. R^2 = 2,6848454
log. π = 0,4971499
log. $8gNR^2\pi$ = 6,0885845

49. log. c = 1,4771213
2 = 2
log. c^2 = 2,9542426
log. r = 0,7403627
log. $c^2 r$ = 3,6946053

50. $\log.\ 8gNR^2\pi = 6{,}0885845$ (Nr. 48.)
$\log.\ \alpha = 2{,}0434409$ (Nr. 38.)

$\log.\ 8gNR^2\pi\alpha = 8{,}1320254$, folglich

51. $8gNR^2\pi\alpha = 135526844$

52. $\log.\ c^2r = 3{,}6946053$ (Nr. 49.)
$\log.\ \varepsilon = 2{,}3719909$ (Nr. 40.)

$\log.\ c^2r\varepsilon = 6{,}0665962$, mithin

53. $c^2r\varepsilon = 1165725$

54. $\log.\ c^2r = 3{,}6946053$ (Nr. 49.)
$\log.\ \delta = 3{,}1310297$ (Nr. 47.)

$\log.\ c^2r\delta = 6{,}8256350$, alſo

55. $c^2r\delta = 6693220$

56. $\log.\ 8gNR^2\pi = 6{,}0885845$ (Nr. 48.)
$\log.\ \beta = 0{,}9336344-1$ (Nr. 45.)

$\log.\ 8gNR^2\pi\beta = 6{,}0222189$, daher

57. $8gNR^2\pi\beta = 1052492$

58. Sezet man dieſe Werthe (Nr. 51, 53, 55 und 57.) in die Gleichung Nr. 36, ſo iſt die geſuchte Dicke, oder

59. $$f = \frac{135526844 - 1165725}{6693220 - 1052492} = \frac{134361119}{5640728}$$
$$= 23{,}8 \text{ Zoll.}$$

Zuſaz. Obgleich der Schwungring die Breite $R - r = 2$ Fuß hat, ſo ſollte man nun demſelben die Dicke $f = 23{,}8$ alſo ebenfalls beynahe 2 Schuhe geben, wodurch aber dieſer Ring bey dem Umdrehen von der Luft ein neues großes Hinderniß leidet; man belegt

daher, um dieſe unförmliche Dicke und Breite zu vermeiden, den äuſſern Rand des Schwungrades mit einem Ringe von Bley, durch deſſen beträchtliche Schwere das Umdrehungsmoment zweckmäßig verſtärkt wird.

V. Hauptſtück.

Von der Verbindung mehrerer einfacher Maſchinen.

§. 189.

Erklärung.

Um entweder die Wirkung einer gegebenen Kraft zu verſtärken, oder eine beſtimmte Geſchwindigkeit zu erhalten, werden mehrere einfache Maſchinen miteinander verbunden, das iſt, zuſammengeſezte Maſchinen gebraucht (§. 1. c.).

Zuſaz. Die große Mannigfaltigkeit ſolcher Verbindungen hat nothwendig eine Einſchränkung ihrer Unterſuchungen zur Folge, ſo daß man nur die gewöhnlichſten ausheben, und ihre Theorie vortragen kann. Schon im III. Hauptſt. II. Abſchnitt wurde des Zuſammenhanges wegen die Theorie mehrerer verbundener Rollen eingeſchaltet. Andere Verbindungen ſind manchmal ſchon durch die Theorie der einfachen Maſchinen, ihrer Beſtandtheile, ganz verſtändlich, und bedürfen alſo keiner eigenen Unterſuchung, z. B. wenn zur Fortſchaffung einer Laſt auf ebenem oder ſchiefem Boden nicht nur Walzen §. 134. untergelegt werden, ſondern zur Bewegung der Laſt noch Hebelsſtangen (§. 120. IV. Zuſ.) gebraucht werden.

I. Abſchnitt.

Vom Räderwerke überhaupt.

§. 190.

Erklärungen.

a. Wenn mehrere Räder, welche keine gemeinſchaftliche Axe haben, ſo miteinander verbunden werden, daß ſie einander in Bewegung ſezen, ſo heißt eine ſolche Verbindung ein Räderwerk (systema rotarum),

b. die zu dieſem Behuſe an dem Umfange der Räder und Wellen angebrachten wechſelweiſen Erhöhungen, und Vertieſungen heiſſen überhaupt Zähne; aber im engern Sinne nennet man ſie

α. Zähne (dentes), wenn ſie mit dem Rade nur ein Stück ausmachen,

β. Kämme (paxilli), wenn ſie beſonders verfertiget, und eingeſezet ſind.

§. 191.

Erklärungen.

a. Ein Rad A (Fig. 79 und 80), auf deſſen Ebene die Kämme ſenkrecht, oder ſchief eingeſezet ſind, heißt ein Kron- oder Kammrad (rota coronaria, pectinata);

b. liegen hingegen die Zähne des Rades B (Fig. 79.) in der Richtung der Halbmeſſer, ſo heißt ein ſolches Rad ein Stirn- oder Sternrad (rota stellata), und insbeſondere

α. ein Getrieb (rotula), wenn es wie C (Fig. 79.) in Beziehung eines andern unmittelbar damit verbundenen Rades A oder B ſehr klein iſt,

β. ein Trilling, wenn das Rad B (Fig. 80.) aus zwey Scheiben a b, c d beſteht, zwiſchen welchen am Umfange mehrere Stäbe befeſtiget ſind, die man Triebſtöcke nennet.

§. 192.

Erklärungen.

a. Wird ein Getrieb, oder Trilling durch ein Rad unmittelbar in Bewegung geſezet, ſo ſagt man, das Getrieb, oder der Trilling wird vom Rade ergriffen, und das Rad greiffet in das Getrieb oder den Trilling;

b. entſteht hingegen aus der Bewegung des Getriebes oder Trillings die Bewegung des Rades, ſo wird das Rad ergriffen, und erſtere greiffen in lezteres ein.

§. 193.

Aufgabe. (Fig. 81.)

Bey einem Räderwerke von 3 Rädern A, B, C, iſt am Umfange der Welle a die Laſt Q befeſtiget, und am Umfange des Rades C hält ihr die Kraft P das Gleichgewicht, man ſuchet ihr Verhältniß, wenn die Halbmeſſer der Räder ſowohl, als der Getriebe, und der Welle a gegeben ſind, ferner die Richtungen der Kraft und Laſt an ihren Berührungspuncten auf den Halbmeſſern ſenkrecht ſind, und dabey von aller Nebenlaſt noch abſtrahirt wird.

Aufløſung.

1. Wenn R', R'', R''' der Ordnung nach die Halbmeſſer der Räder A, B, C, und eben ſo r', r'', r''' der Ordnung nach die Halbmeſſer der Welle a, und der Getriebe b, c bezeichnen, ſo iſt

2. der Laſt Q, am Umfange der Welle a, die Kraft $p' = \frac{r'}{R'} Q$, am Umfange des Rades A gleichgeltend (§. 171. III. Zuſ.).

3. Mit dieſer Gewalt p' drückt das eingreiffende Rad A auf den ergriffenen Zahn des Getriebes b;

4. Soll nun wieder dieſem Druck p', am Umfange des Rades B die Kraft p'' das Gleichgewicht halten, ſo muß $p'' = \frac{r''}{R''} p' = \frac{r' . r''}{R' . R''} Q$ (Nr. 2.) ſeyn.

5. Das Rad B drückt wieder mit dieſer Gewalt p'' auf den Zahn des ergriffenen Getriebes c, mithin iſt

6. die am Umfange des Rades C gleichgeltende Kraft, oder

$$P = \frac{r'''}{R'''} p'' = \frac{r' . r'' . r'''}{R' . R'' . R'''} Q$$

wodurch alſo das geſuchte Verhältniß beſtimmt iſt.

I. Zuſaz. Das Verhältniß der Kraft zur Laſt läßt ſich auf ähnliche Art für jede beliebige Anzahl von Rädern beſtimmen, es iſt nemlich allemal:

$$P = \frac{r' . r'' . r''' \ldots\ldots r^{(n)}}{R' . R'' . R''' \ldots\ldots R^{(n)}} Q, \text{ das iſt:}$$

die Kraft verhält ſich allemal zur Laſt wie das Product der Radien aller Getriebe, zum Producte der Radien aller Räder.

II. Zuſaz. Sind alſo bey einem Räderwerke die ſämmtlichen Radien der Räder, Getriebe und der Welle, an welcher die Laſt hängt, gegeben, ſo läßt ſich zur gegebenen Laſt Q die erfoderliche Kraft P, und umgekehrt für eine gegebene Kraft P, die Laſt Q beſtimmen, welcher ſie das Gleichgewicht hält.

III. Zuſaz. Soll man hingegen bey der gegebenen Laſt Q und Kraft P, für den Zuſtand des Gleichgewichts, das Räderwerk anordnen, ſo iſt
$\frac{P}{Q} = \frac{r'.r''.r'''......}{R'.R''.R'''......}$, man muß daher die Radien der Räder, und jene der Getriebe ſo beſtimmen, daß das Product der leztern, durch jenes der erſtern dividirt, den Quotienten $\frac{P}{Q}$ giebt, das iſt: man muß den Zähler und Nenner des gegebenen Bruches $\frac{P}{Q}$ in ſo viele Factoren zerlegen, als man Räder nehmen will, und dann jedesmal die Halbmeſſer der Getriebe und Räder dieſem Verhältniſſe gemäß beſtimmen, z. B. wenn $\frac{P}{Q} = \frac{21}{100}$ ſo wird

a. für das Rad an der Welle $\frac{r'}{R'} = \frac{21}{100}$, bekömmt alſo die Welle einen Halbmeſſer $= 21$ Zoll, ſo muß jener des Rades $= 100$ Zoll ſeyn.

b. für 2 Räder $\frac{r'.\,r''}{R'.\,R''} = \frac{3.\,7}{5.\,20}$

c. für 3 Räder $\frac{r'.\,r''.\,r'''}{R'.\,R''.\,R'''} = \frac{1.\,3.\,7}{2.\,5.\,10}$

IV. Zuſaz. Durch die Formel $\frac{P}{Q} = \frac{r'.r''.r'''....}{R'.R''.R'''...}$ iſt weder die Anzahl der Räder und Getriebe, noch die wahre Größe ihrer Halbmeſſer, ſondern nur ihre relative Größe gegeneinander beſtimmt, ſo daß die nä

here Beſtimmung willkürlich zu ſeyn ſcheint, allein bey der wirklichen Anordnung eines Räderwerkes, wo man hinlängliche Feſtigkeit der Maſchine, und dabey Vermeidung aller unnüzen Nebenlaſt ſtets berückſichtigen muß (§. 20. II. Zuſ.), iſt's anders; nicht ſelten ſezet ſchon das Local ſowohl für die Anzahl der Räder, als die Größe ihrer Radien gewiſſe Gränzen, ſo daß alſo nach Verſchiedenheit des Materials ſich aus den Unterſuchung des II und IIIten Hauptſtückes erſt jedesmal eine zweckmäßige Anordnung eines Räderwerkes für eine gegebene Laſt und Kraft beſtimmen läßt.

§. 194.

Aufgabe. (Fig. 81.)

Bey einem Räderwerk wird durch eine Kraft P das Rad C, mithin auch das daran befeſtigte Getrieb c in Bewegung geſezt, lezteres ergreiffet das Rad B, und deſſen Getrieb b ſezet wieder ein Rad A in Bewegung, man ſuchet die Anzahl n der Umdrehungen dieſes Rades A, während das erſte eingreiffende Getrieb c N Umdrehungen vollendet.

Auflöſung.

1. Man bezeichne die Anzahl der Zähne des erſten eingreiffenden Getriebes c mit m', und die Anzahl der Zähne des dadurch ergriffenen Rades B mit M'; eben ſo die Anzahl der Zähne des zweyten eingreiffenden Getriebes b mit m'', und des ergriffenen Rades A mit M''.

2. Während ſich nun das Rad C, alſo auch deſſen Getrieb c, einmal um ſeine Axe drehet, werden vom Rade B m' Zähne ergriffen, und fortgeſchoben; nun vollendet aber das Rad B erſt eine ganze Umdrehung, wenn alle ſeine Zähne, das iſt, M' Zähne nach

und nach ergriffen, und fortgeſchoben ſind, mithin entſpricht

3. einer Umdrehung des Getriebes c nur $\frac{m'}{M'}$ Umdrehung des ergriffenen Rades B, folglich gehören zu N Umdrehungen des Getriebes c, $\frac{m'}{M'}$ N Umdrehungen des Rades B; ſezet man dieſe Anzahl $= n'$, ſo iſt

4. $n' = \frac{m'}{M'} N.$

5. Das Getrieb b hat mit dem Rade B eben dieſelbe Axe, mithin bezeichnet auch n' die Anzahl der Umdrehungen des Getriebes b, während das Getrieb c N Umdrehungen vollendet.

6. Wenn nun wieder das Getrieb b eine Umdrehung vollendet, ſo ergreiffet es vom Rade A m'' Zähne, und dadurch macht dieſes Rad $\frac{m''}{M''}$ einer Umdrehung, alſo

7. Bey n' Umdrehungen des Getriebes b, folglich bey N Umdrehungen des Getriebes c (Nr. 5.) iſt

8. die Anzahl der Umdrehungen des Rades A, oder

$$n = \frac{m''}{M''} n' = \frac{m'.m''}{M'.M''} N.$$

I. Zuſaz. Auf ähnliche Weiſe erhellet, daß für eine beliebige Anzahl von Getrieben und Rädern allemal

$$n = \frac{m'.m''.m'''\ldots\ldots m^{(v)}}{M'.M''.M'''\ldots\ldots M^{(v)}} N$$ iſt, mithin

II. Zuſaz. Wenn bey einem Räderwerke von einem Getriebe die Bewegung anfängt, ſo verhalten ſich die gleichzeitigen Umdrehungen des erſten eingreiffenden Getriebes zu jenen des zulezt ergriffenen Ra-

des, wie das Product aller Zähne der ergriffenen Räder, zum Product aller Zähne der eingreiffenden Getriebe, oder

$N : n = M'.M''.M'''.....M^{(v)} : m'.m''.m^{(''')}.....m^{(v)}$

III. Zuſaz. Wenn für das erſte Getrieb $m' = 10$, für das zweyte $m'' = 12$, und die Anzahl der Zähne des erſten ergriffenen Rades, oder $M' = 80$, und jene des zweyten $M'' = 90$, ſo iſt:

$$n = \frac{10 . 12}{80 . 90} N = \frac{1 . 2}{8 . 15} N = \frac{1}{4 . 15} N = \frac{1}{60} N$$

Für $N = 60$, wird $n = 1$, das iſt, während das erſte eingreiffende Getriebe 60 Umdrehungen vollendet, würde das 2te Rad erſt eine Umdrehung vollenden.

IV. Zuſaz. Werden umgekehrt die Getriebe von den Rädern in Bewegung geſezet, ſo verhält ſich die Anzahl der Umdrehungen des erſten eingreiffenden Rades zur gleichzeitigen Anzahl der Umdrehungen des zulezt ergriffenen Getriebes wie das Product der Zähne aller ergriffenen Getriebe zur Anzahl der Zähne aller eingreiffenden Räder.

§. 195.

Aufgabe.

Bey einem Räderwerk, wo bereits die umdrehende Bewegung gleichförmig fortgeht, vollendet das erſte eingreiffende Getrieb eine Umdrehung in t Secunden, man ſucht die Anzahl T der Secunden, während welchen das zulezt ergriffene Rad eine ganze Umdrehung vollendet, wenn ſowohl die Anzahl der Räder und Getriebe, als ihrer Zähne gegeben ſind.

Auflöſung.

1. Wenn während T Secunden das erſte eingreiffende Getriebe N Umdrehungen, und das zulezt ergriffene Rad n Umdrehungen vollendet, ſo iſt

2. $N : n = M'.M''.M'''.... : m'.m''.m'''....$ (§. 194. II. Zuſ.), wo alſo eben dieſe Bezeichnungen gelten.

3. Ferner iſt die zu einer Umdrehung des erſten Getriebes erfoderliche Zeit, oder

$t = \frac{T}{N}$ (Reine Mechan. §. 35. IV. Zuſ.)

4. Eben ſo iſt die zu einer Umdrehung des zulezt ergriffenen Rades erfoderliche Zeit:

$T = \frac{T}{n}$, mithin

5. $T : t = \frac{T}{n} : \frac{T}{N}$

$= N : n$, alſo

6. $T : t = M'.M''.M'''.... : m'.m''.m'''....$ (N. 2.)

I. Zuſaz. Die Umdrehungszeit des zulezt ergriffenen Rades verhält ſich alſo zur Umdrehungszeit des erſten eingreiffenden Getriebes, wie das Product aller Zähne der ergriffenen Räder zum Producte aller Zähne der eingreiffenden Getriebe.

II. Zuſaz. $\frac{T}{t} = \frac{M'.M''.M'''....}{m'.m''.m'''....}$ und

$T = \frac{M'.M''M'''....}{m'.m'.m'''...} t$, wo es alſo einerley iſt, ob die Zeiten in Secunden, oder einem andern Zeitmaaße beſtimmt ſind, wenn nur für beyde Zeiten eben daſſelbe Maaß genommen wird.

III. Zuſaz. Wenn bey einem Räderwerke von 4 Getrieben und Rädern der Ordnung nach bey den eingreiffenden Getrieben die Anzahl der Zähne 10, 12, 12, 16, und bey den Rädern ebenfalls der Ordnung nach 80, 90, 96, 96 gegeben ſind, ferner T', T'', T''', T''''

die Umdrehungszeiten dieſer Räder bezeichnen, und das erſte eingreiffende Getrieb ſich während einer Minute um ſeine Axe dreht, mithin $t = 1$ Minute, ſo iſt

$$T' = \frac{80}{10} t = 8 \text{ Minuten},$$

$$T'' = \frac{80.90}{10.12} t = 60 \text{ Minuten} = 1 \text{ Stunde},$$

$$T''' = \frac{80.90.96}{10.12.12} t = 8 \text{ Stunden},$$

$$T'''' = \frac{80.90.96.96}{10.12.12.16} t = 48 \text{ Stunden} = 2 \text{ Tagen}.$$

III. Zuſaz. Sind die Umdrehungszeiten t, T des erſten eingreiffenden Getriebes, und des zulezt ergriffenen Rades beſtimmt, und man ſoll nun das Räderwerk anordnen, ſo muß man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{t}{T}$ in ſo viele Factoren zerlegen, als man Getriebe und Räder nehmen will, und nun dieſem Verhältniſſe gemäß die Anzahl der Zähne bey jedem Getriebe und dem ergriffenen Rade beſtimmen, wo aber alles wieder wie §. 193. IV. Zuſ. berückſichtiget werden muß.

V. Zuſaz. Werden die Getriebe von den Rädern ergriffen, ſo gilt ebenfalls die Nr. 6. aufgeſtellte Proportion, ſo daß in dieſem Falle T die Umdrehungszeit des erſten eingreiffenden Rades, und t die Umdrehungszeit des zulezt ergriffenen Getriebes ausdrücken.

Anmerk. Aus den Säzen des gegenwärtigen §. läßt ſich die Einrichtung des Räderwerkes bey einer Uhr gröſtentheils beurtheilen, eine detaillirte Auseinanderſezung überſteiget die Gränzen eines mathematiſchen Lehrbuches.

§. 196.

Erklärungen.

a. Die Zähne der Sternräder bilden prismenartige Körper, und die Kämme der Kronräder ſind abgekürzte Conoiden, man muß daher bey jedem Zahne überhaupt die beyden Grundflächen, die freyſtehenden Seitenflächen, und endlich jene Seitenfläche, welche ſie mit dem Rade gemein, und wodurch der Zahn mit dem Rade zuſammenhängt, unterſcheiden.

b. Bey den Zähnen eines Stirnrades ſind die beyden Grundflächen einander gleich, Fig. 81. ſtellet die eine Grundfläche der Zähne bey Sternrädern und Getrieben vor.

c. Bey Kammrädern ſind die Grundflächen eines Zahnes ungleich, bey A Fig. 79 und 80. ſieht man bey jedem Zahn die größere dieſer beyden Grundflächen.

d. Bey einem Zahne überhaupt heißt die Fläche, wodurch der Zahn mit dem Rade verbunden iſt, das iſt, die dem Rade zunächſtliegende Stelle des Zahns, der Fuß, die am weiteſten entfernte Stelle der Kopf oder die Scheitel, und endlich die mittlere Stelle die Bruſt des Zahns, ſo iſt (Fig. 82.) für den Radzahn DFE, DIE der Fuß, und F der Scheitel deſſelben, eben ſo bildet bey dem Getriebszahne DHKL, KL den Fuß, und DH den Kopf.

e. Ferner nennet man die Entfernung der Scheitel vom Fuße, oder FI die Höhe, die Linie DE die Breite, und endlich die Enfernung der beyden Grundflächen die Dicke des Zahns; für ein Stirnrad ſtellet B (Fig. 79.) die Dicke der Zähne dar.

I. Zuſaz. Wenn ein Rad, welches ſich um ſeine Axe drehet, in ein anderes eingreiffet, und ſolches dadurch ebenfalls in Bewegung ſezet, ſo berühret der eingreifſende Zahn des erſtern mit einer ſeiner Seitenflächen eine Seitenfläche des Zahns vom zweyten Rade, und ſchiebt ſie vor ſich her, dadurch berühren ſich dieſe Flächen der beyden Zähne nach und nach an verſchiedenen Stellen, mithin entſteht nothwendig zwiſchen den Zähnen eine neue Reibung, und die angegriffenen Stellen erhalten immer andere Entfernungen von den Umdrehungsaxen der Räder.

II. Zuſaz. Soll alſo die Bewegung nicht ſtotternd, ſondern ſanft und gleichförmig ſeyn, ſo müſſen die Zähne, vorzüglich die Seitenflächen derſelben, nicht nur mit gehörigem Fleiße rein ausgearbeitet ſeyn, und die erforderliche Schmier zur Verminderung der Reibung angewendet werden, ſondern es müſſen die Seitenflächen eine ſolche Form erhalten, daß während dem Eingriffe die ſtatiſchen Momente unverändert bleiben.

III. Zuſaz. Aus der Construction eines Stirn- und eines Kronrades (§. 191.) erhellet, daß der Eingriff zwiſchen Sternrädern, von jenem eines Sternrades und Kammrades ganz verſchieden iſt, mithin muß man bey der Unterſuchung nothwendig zwey Fälle unterſcheiden, es kann nemlich ein Stirnrad mit einem Getriebe, oder Trilling in Verbindung geſezt werden, oder eines der leztern beyden wird mit einem Kammrade in Verbindung geſezet.

II. Ab-

II. Abſchnitt.

Von der Verbindung eines Stirnrades mit einem Getriebe.

§. 197.

Bedingungen bey einer Verbindung eines Stirnrades mit einem Getriebe.

a, Das Sternrad bildet ohne die Zähne einen ſenkrechten Cylinder, auf deſſen beyden Grundflächen alſo die Axe des Rades ſenkrecht ſteht;

b. Für jeden Zahn liegen deſſen Grundflächen in den verlängerten Grundflächen des Rades (§. 191. b.), mithin ſteht auf ihren Ebenen ebenfalls die Axe des Rades ſenkrecht.

c. Das Stirnrad und das Getrieb oder Trilling erhalten bey ihrer Verbindung allemal eine ſolche Lage, daß ihre Axen ſtets zu einander parallel bleiben.

d. Bey dieſer Lage der eingreiffenden Räder erheiſchet es offenbar die Natur des Eingreiffens, daß die Zähne die Form eines ſenkrechten Priſma erhalten, ſo daß alſo die beyden Grundflächen eines jeden Zahns einander congruent und parallel ſind, und die Seitenflächen auf ſelben ſenkrecht ſtehen.

I. Zuſaz. Jede Seite des Zahns, das iſt, jede gerade Linie, welche durch einen Punct des Umfanges einer Grundfläche des Zahns auf ihr ſenkrecht ſteht, fällt vermög d ganz in eine Seitenfläche, und iſt

vermög b zur Axe des Rades parallel, und der Dicke des Zahnes gleich (§. 196. c).

II. Zuſaz. Während alſo zwey Zähne ineinander eingreiffen, und einander fortſchieben, berühren ſie ſich nach und nach immer in andern Stellen ihrer Seitenflächen, und der Druck vertreitet ſich allemal auf ihre ganze Länge, das iſt, auf die ganze Dicke des Zahnes vermög c gleichförmig, mithin fallt jedesmal in ihre Mitte der Schwerpunct des Druckes (Reine Mechan. §. 105. VI. Zuſ.).

III. Zuſaz. Man kann daher die Dicke des Zahns, folglich auch die des Rades auſſer Acht laſſen, und nur jenen Querſchnitt betrachten, welcher zur Grundfläche parallel durch den Mittel- oder Schwerpunct des Druckes geht.

IV. Zuſaz. Da alle Querſchnitte, welche zur Grundfläche parallel gemacht werden, derſelben congruent ſind, (Geom. §. 235.), ſo iſt durch jeden ſolchen Querſchnitt zugleich die Form für die Seitenflächen, oder wie man ſich der Kürze wegen ausdrückt, die Form des Zahns gegeben.

V. Zuſaz. Wenn ſich die Zähne an jeder Stelle ihres Eingriffes in unendlich ſchmalen Flächen, alſo in Linien berühren, ſo ſind ſolche wegen der parallelen Lage der beyden Axen zu eben dieſen Axen ſtets parallel; in dieſem Falle wird daher die Bewegung der Zähne gegeneinander wälzend (§. 56. III. Zuſ.), und auf einen zu den Grundflächen parallelen Querſchnitt fällt allemal nur ein Berührungspunct.

VI. Zuſaz. Umgekehrt, wenn für jede Stelle des Eingriffes zweyer Zähne immer nur ein Punct in ei-

nen zu den Grundflächen parallelen Querſchnitt fällt, ſo berühren ſich die Zähne immer nur in geraden Linien, welche zu den beyden Axen der Räder parallel ſind, und ihre Bewegung iſt folglich wälzend.

§. 198.

Aufgabe. (Fig. 82.)

Ein Sternrad, deſſen Halbmeſſer AD = R gegeben iſt, ſoll ein Getrieb, deſſen Halbmeſſer BD = r ebenfalls gegeben iſt, in Bewegung ſezen, der Eingriff des Rades in das Getrieb ſoll in einem Puncte D anfangen, welcher in der Centrallinie AB liegt, man ſuchet die zweckmäßige Form der Zähne für das Rad und das Getrieb, vorausgeſezt, daß für beyde die Anzahl der Zähne ſchon bekannt iſt.

Auflöſung.

1. Man nehme zur Baſis den Umfang des Rades YDZ, und einen Kreis DMBD, deſſen Halbmeſſer CD die Hälfte des Halbmeſſers vom Getriebe iſt, mithin deſſen Durchmeſſer dem Halbmeſſer BD des Getriebes gleich iſt, zu einem Erzeugungskreis, und verzeichne eine äuſſere Epicycloide (höhere Geom. §. 360.).

2. Nun gebe man dem Zahn des Rades eine ſolche Form, daß auf jeder Seite die Krümmungen DF, EF Stücke dieſer äuſſern Epicycloide ſind.

3. Dieſe Zähne befeſtige man auf dem Umfange des Rades ſo, daß ſie mit ihrer ganzen Höhe über denſelben hervorragen, mithin der Fuß des Zahns DIE mit dem Umfange des Rades zuſammenfällt, und die Höhe IF über ſolchen hervorragt.

4. Vom Mittelpuncte B des Getriebes ziehe man nach den Abtheilungen des Randes, welche der Vorausſezung gemäß ſchon bekannt ſind, gerade Linien BD, BH, Bα, Bγ u.ſ.w., und nehme die Höhe DL eines jeden Zahns des Getriebes der Höhe IF des Radzahnes gleich, ſo bildet DLKH, $\alpha\beta\delta\gamma$, jedes einen Zahn des Getriebes, wenn die zwiſchen denſelben gelegene Maſſe HK$\beta\alpha$ jedesmal herausgenommen wird, ſo daß alſo der Kopf DH des Zahns in den Umfang des Getriebes fällt, hingegen der Fuß KL innerhalb dem Umfange liegt.

5. Befeſtiget man nun das Rad und Getrieb ſo, daß ſie in eine Ebene zu liegen kommen, ferner die Centrallinie AB der Summe ihrer Halbmeſſer AD + DB gleich iſt, und

6. giebt ihnen eine ſolche Lage, daß ſich die Zähne zuerſt in dieſer Centrallinie berühren, ſo wird

7. die Bewegung jeder zwey ineinander eingreiffender Zähne gegeneinander wälzend, mithin bey gehöriger reiner Ausarbeitung der Theile die Reibung am geringſten, und

8. für jede Stelle ihrer Berührung bleibt das ſtatiſche Moment unverändert, folglich entſpricht die Auflöſung den Bedingungen (§. 196. II. Zuſ.), mithin der Aufgabe.

Beweis.

9. Es kömmt alſo darauf an, daß bey der angegebenen Form die Bedingungen Nr. 7 und 8. wirklich vorhanden ſind.

10. Da der Halbmeſſer BD vom Getriebe noch einmal ſo groß als der Halbmeſſer CD des erzeugen-

den Kreiſes iſt (Nr. 1.), ſo bilden die Radien BD, BH; mithin auch die geraden Linien oder Seiten LD, KH bey jedem Getriebzahn Stücke einer innern Epicycloide, welche der Kreis DMBD beſchreibt, indem er ſich auf der innern Seite des Umfanges VDX vom Getriebe fortwälzet (höhere Geometr. §. 362. II. Zuſ.).

11. Berühren ſich nun anfänglich zwey Zähne in dem Puncte D, ſo daß D der Berührungspunct vom Umfange des Rades und Getriebes iſt (Nr. 5 und 6.), und das Rad bewegt ſich nach der Richtung DY, ſo ſchiebt der Zahn DFE den Zahn LDHK des Getriebes vor ſich her, kömmt nun dadurch

12. erſterer in die Lage NOS, und lezterer in die Stelle $\alpha\beta\delta\gamma$, ſo iſt's gerade ſo viel, als bewegte ſich der erzeugende Kreis auf der äuſſern Seite des Bogens YDZ von N bis D, nimmt man alſo auf dem erzeugenden Kreis den Bogen DM = dem Bogen DN der Baſis, ſo iſt M die Stelle des beſchreibenden Punctes, mithin ein Punct von der Seite des Radzahns NOS (höhere Geometr. § 358. II. Zuſ.).

13. Nimmt man noch am Umfange des Getriebes den Bogen Dα = DM vom erzeugenden Kreiſe, ſo iſt auch M ein Punct der innern Epicyloide $\alpha\beta$, folglich

14. iſt der Punct M der gemeinſchaftliche Berührungspunct beyder Zähne, und die Sehne DM iſt für beyde Epicycloiden NO und $\alpha\beta$ in M die Normal, ſo wie $\beta\alpha$ die gemeinſchaftliche Tangens (höhere Geom. §. 364. V-VII. Zuſ.), das iſt

15. die beyden Zähne berühren ſich ſtets nur immer in einem Puncte, folglich iſt die Bewegung wälzend (§ 197. VI Zuſ.), und dadurch die erſte Bedingung oder Nr. 7. erwieſen.

16. Wenn der Eingriff des Rades in das Getrieb in dem Puncte D der Centrallinie anfängt, und P die Größe der unveränderlichen Kraft, auf den Endespunct D des Halbmeſſers AD des Rades reducirt, bezeichnet, ſo iſt ihr Moment in Beziehung auf das Rad $= P . R$ (§. 171. II. Zuſ.).

17. Mit dieſer Kraft P drückt nun der Radzahn DFE auf den Zahn DLKH des Getriebes in D, nach der Richtung der gemeinſchaftlichen Tangens beyder Räder (Geometr. §. 111. II. Zuſ.), mithin iſt

18. das Moment dieſer Kraft in D auf das Getrieb $= P . r$.

19. Kommen nun während der Umdrehung des Rades und Getriebes dieſe Zähne in eine ſolche Lage, daß ſie ſich nun in dem Puncte M berühren (Nr. 12–14.) ſo iſt

20. die auf den Punct M reducirte Kraft des Rades $= \frac{P . R}{AM}$ (§. 171. III Zuſ.), das iſt, leztere Kraft in M iſt der Kraft P in D (Nr. 16.) gleichgeltend.

21. Der Zahn des Rades drückt alſo in M auf den Zahn des Getriebes nach der auf AM ſenkrechten Richtung MG mit der Kraft $\frac{P . R}{AM}$.

22. Die Richtung MG iſt auf die Seite $\alpha\beta$, mithin auch auf den Halbmeſſer $B\alpha$ des Getriebes ſchief.

23. Man verlängere die Richtung DM der gemeinſchaftlichen Normal beyder Zähne (Nr. 14.), und zerlege obige Kraft in zwey Seitenkräfte, nach der Richtung MA und der Normal Md, ſo iſt

24. die Kraft nach der Richtung $MA = \frac{P.R\sin.dMG}{AM\sin.AMd}$ (Reine Mechan. §. 53. VII. Zuſ.), welche aber in A durch die befeſtigte Axe des Rades aufgehoben wird.

25. Eben ſo wird die Kraft nach der Richtung der Normal $Md = \frac{P.R.\sin.AMG}{AM.\sin.AMd} =$

$= \frac{P.R}{AM.\sin.AMd}$, indem $AMG = 90°$ (Nr. 21.)

$= \frac{P.R}{AM\sin.AMD}$ (Trigon. §. 291.)

26. Im Dreyecke AMD iſt nun:

$AM : AD = \sin.ADM : \sin.AMD$, alſo

$AM.\sin.AMD = AD\sin.ADM = R.\sin.ADM = R\sin.BDM$

mithin

27. wenn man dieſen Werth ſtatt dem Nenner in die lezte Gleichung Nr. 25. ſezet, ſo wird

28. die Kraft nach $Md = \frac{P.R}{R\sin.BDM} = \frac{P}{\sin.BDM}$

29. Dieſe Kraft drückt nun auf die Fläche des Getriebzahnes in M ſenkrecht, mithin iſt ihr Moment

$= \frac{P.BM}{\sin.BDM}$.

30. Im Dreyecke BMD iſt nun dieſer genannte Winkel $= 90°$ (Geom. §. 72. III. Zuſ.), mithin:

$BD : BM = 1 : \sin.BDM$, alſo

$\frac{BM}{\sin.BDM} = BD = r$

31. Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 29., ſo iſt

$\frac{P.BM}{\sin.BDM} = P.r$, das iſt, in M wird das Getrieb mit eben der Gewalt wie in D (Nr. 18.) alſo allent-

halben gleichförmig ergriffen, wodurch alſo die Bedingungen Nr. 8., und nach Nr. 15. auch jene Nr. 7. erfüllet ſind, mithin die Aufgabe aufgelöſet iſt.

I. Zuſaz. Aus dem Beweiſe Nr. 10 erhellet, daß die Zähne des ergriffenen Getriebes die Form einer innern Epicycloide erhalten, deren Baſis die Peripherie des Getriebes iſt; die Beſtimmung der Größe des Halbmeſſers CD des Erzeugungskreiſes iſt an ſich beliebig, aber die Beſtimmung (Nr. 1.), daß ſolcher dem halben Radius des Getriebes gleich genommen werden ſoll, gewähret den Vortheil, daß nun auf beiden Seiten die Getriebzähne geradlinigt werden, und in die Richtungen der Halbmeſſer des Getriebes fallen, alſo ſehr leicht conſtruirt werden können. Nimmt man aber einen Erzeugungskreis, deſſen Halbmeſſer größer oder kleiner als $\frac{1}{2}$BD, ſo muß die Form der Getriebzähne als Bögen einer Hypocycloide nach der eigenen Anleitung (höhere Geom. §. 360.) verzeichnet werden.

II. Zuſaz. Für den Fall, daß der Halbmeſſer des Rades unendlich groß iſt, mithin für AD = ∞, verwandelt ſich die äußere Epicycloide (Nr. 1 und 2.) in eine Cycloide (höhere Geom. §. 358. I. Zuſ.) (und der Umfang des Rades geht in eine gerade Linie über, auf welcher die Centrallinie, mithin auch der Halbmeſſer BD des Getriebes im Berührungspunct D ſenkrecht ſteht; ſoll daher (Fig. 83) eine gerade gezähnte Stange YZ in ein Getrieb eingreiffen, und ſolches in Bewegung ſezen, ſoll ferner der Anfang des Eingriffes im Puncte D der Centrallinie BD, d. i., wo BD auf YZ ſenkrecht ſteht (Geom. §. 111.), erfolgen, ſo erhalten nun (Nr. 1–3.) die Zähne dieſer Stange die Form einer Cycloide (höhere Geom. §. 360. II. Zuſ.), ſonſt bleibt alles unverändert.

III. Zuſaz. (Fig 82.) Stellet man ſich vor, die Bewegung der beyden Räder erhalte nun eine entgegengeſezte Richtung, ſo, daß ſich nun das Getrieb von D nach X, und das Rad von D gegen Z zu, drehen würde, ſo würde der Zahn $\alpha\beta\delta\gamma$ des Getriebes in M auf den Zahn NOS des Rades nach der gemeinſchaftlichen Normal MD drücken, und ſolchen vor ſich herſchieben, und bey D in der Centrallinie wieder verlaſſen, übrigens würde die Bewegung wälzend, und die ſtatiſchen Momente ebenfalls unverändert bleiben, ſo daß alſo für den Fall, wenn von einem Getriebe das Rad in Bewegung geſezet werden ſoll, und der Eingriff vor der Centrallinie anfängt, und in derſelben wieder aufhöret, die Zähne vom Getriebe und Rade eben die Form erhalten, wie in dem Falle, wenn das Getrieb vom Rade in Bewegung geſezet wird, der Eingriff in der Centrallinie anfängt, und hinter derſelben aufhöret.

IV Zuſaz. Wenn der Zahn $\beta\alpha\gamma\delta$ des Getriebes den Zahn NOS des Rades von N bis D vor ſich her ſchiebet, ſo wälzet ſich erſterer Zahn auf leztern von M bis N, alſo bey einem hölzernen Radzahn gegen die Holzfaſern, dadurch entſteht eine ſtärkere Reibung, und ſehr leicht eine Stemmung, beydes findet auch, wiewohl nicht ſo ſtark, bey metallenen Zähnen ſtatt, man ſuchet daher das Eingreiffen vor der Centrallinie ſo viel als möglich zu vermeiden.

V. Zuſaz. Soll der Eingriff des Radzahns NOS in den Getriebszahn $\beta\alpha\gamma\delta$ nur ſo lange dauern, bis der nächſtfolgende Radzahn DFE den nächſten Getriebszahn LDHK im Punct D der Centrallinie berühret, ſo iſt am Radzahn das Stückchen MO überflüſſig, man nimmt daher ſolches weg, und giebt dem Scheitel des

Zahns zur Vermeidung der ſcharfen Ecke eine beliebig abgerundete Geſtalt.

VI. Zuſaz. Eben ſo giebt man den Getriebszähnen zur Vermeidung der ſcharfen Ecke an ihrem Scheitel einen abgerundeten Zuſaz, z. B. mn, und macht zwiſchen den Radzähnen zur Aufnahme die Ausſchnitte z. B. $\mu\nu$ deſto tiefer, damit ſich die Getriebzähne am Umfange des Rades nicht ſtemmen oder reiben.

VII. Zuſaz. Da der Radzahn DFE nur immer mit der einen Seite DF und eben ſo der Zahn NOS nur mit der Seite NMO den Getriebzahn berühret, ſo könnte die andere Seite EF, SO jede beliebige Form haben, indeſſen iſt's gewöhnlich, daß man den Zähnen auf jeder Seite nach Nr. 2. einerley Form giebt.

§. 199.

Aufgabe. (Fig. 84.)

Ein Getrieb, deſſen Halbmeſſer AD = r gegeben iſt, ſoll in ein Sternrad, deſſen Halbmeſſer BD = R ebenfalls gegeben iſt, im Berührungspuncte D beyder Umfänge eingreiffen, man ſuchet die Form der Zähne für Getrieb und Rad, wenn ihre Anzahl ſchon anderswoher beſtimmt iſt.

Auflöſung.

1. Man nehme den Umfang YDZ des Getriebes zur Baſis, und einen Kreis DMBD, deſſen Halbmeſſer CD die Hälfte vom Halbmeſſer des Rades, alſo deſſen Durchmeſſer dem Halbmeſſer BD des Rades gleich iſt, zu einem Erzeugungskreis, und verzeichne eine äuſſere Epicycloide (höhere Geometr. §. 360.).

2. Jedem Zahn des Getriebes gebe man eine ſol⸗che Form, daß auf jeder Seite die Krümmungen EF, DF, und eben ſo SO, NO Stücke dieſer äuſſern Epi⸗cycloide ſind.

3. Dieſe Zähne verbinde man in der Ebene des Getriebes ſo, daß ſie über den Umfang ganz hervor⸗ragen, alſo ihr Fuß jedesmal in den Umfang fällt.

4. Vom Mittelpunct B des Rades ziehe man nach allen gegebenen Abtheilungen des Randes, wel⸗che durch die beſtimmte Anzahl der Zähne bekannt ſind, gerade Linien BH, BD, $B\alpha$, $B\gamma$ u. ſ. w., und nehme die Höhe eines jeden Radzahnes jener des Getrieb⸗zahns gleich, ſo bilden DLKH, $\alpha\beta\delta\gamma$ Zähne des Rades, wenn die dazwiſchen liegende Maſſe vom Rade herausgenommen wird, ſo daß der Scheitel eines je⸗den Zahns in den Umfang, und der Fuß innerhalb dem Umfang des Rades fällt.

5. Befeſtiget man das Getrieb und Rad ſo, daß ſie in eine Ebene liegen, und die Centrallinie AB der Summe ihrer Halbmeſſer gleich iſt, folglich ſich beyde Umfänge in D berühren, und giebt endlich

6. beyden eine ſolche Lage, daß ſich die Zähne zu⸗erſt in der Centrallinie in D berühren, ſo wird

7. die Bewegung der Zähne gegeneinander ſtets wälzend, und

8. die ſtatiſchen Momente bleiben für jede Stelle ihrer Berührung unverändert, folglich entſpricht die angegebene Form nach §. 196. II. Zuſ. der Aufgabe.

Beweis.

9. Es iſt wieder darum zu thun, die Wirklichkeit der beyden Angaben Nr. 7 und 8. zu beweiſen.

10. Der Halbmeſſer BD des Rades iſt dem Durchmeſſer des erzeugenden Kreiſes gleich (Nr. 1.), mithin ſind am Rade die geraden Linien LD, KH, $\beta\alpha$, $\delta\gamma$ u. ſ. w., Stücke einer innern Epicycloide, welche der Kreis BDMB beſchreibt, wenn er ſich auf der hohlen Seite des Radbogens XV fortwälzet (höhere Geometr. §. 362. II. Zuſ.).

11. Berühren ſich anfänglich die beyden Zähne in dem Puncte D (Nr. 6.), und das Getrieb drehet ſich um ſeine Axe nach der Seite DY zu, ſo ſchiebt deſſen Zahn EFD den Radzahn DLKH vor ſich her.

12. Kömmt dadurch erſterer in die Lage SON, und lezterer in die Stelle $\alpha\beta\delta\gamma$, ſo iſt's gerade ſo viel, als wälzte ſich der erzeugende Kreis nach der entgegengeſezten Richtung von N bis D auf der erhabenen Seite des Bogens YND, nimmt man alſo auf dem erzeugenden Kreis den Bogen DM = dem Bogen DN der Baſis, ſo iſt M die Stelle des beſchreibenden Punctes, mithin ein Punct der Epicycloide NO, das iſt, des Getriebzahnes (höhere Geometr. §. 358. II. Zuſ.).

13. Nimmt man ferner auf dem Umfange des Rades den Bogen $D\alpha$ = eben dem Bogen DM des Erzeugungskreiſes, ſo iſt M auch ein Punct der innern Epicycloide $\beta\alpha$, das iſt, des Radzahnes, folglich

14. iſt M der gemeinſchaftliche Berührungspunct beyder Zähne, die im Erzeugungskreiſe gezogene Sehne DM iſt für dieſen Punct die gemeinſchaftliche Richtung der Normal, und BM alſo auch $\beta\alpha$ (Nr. 4.) jene der gemeinſchaftlichen Tangens für die beyden Zähne (höhere Geometr. §. 364. V-VII. Zuſ.); folglich

15. berühren ſich die eingreiffenden Zähne für jede Lage immer nur in einem Puncte, und die Bewegung iſt alſo wälzend (§. 197. VI. Zuſ.).

16. Wenn Q die auf den Endpunct des Halbmeſſers r reducirte Kraft ausdrückt, womit ſich das Getrieb um ſeine Axe dreht, ſo iſt ihr Moment in Rückſicht des Getriebes $= Q.r.$

17. Mit dieſer Kraft Q drückt nun der Zahn EFD des Getriebes auf den Radzahn DLKH in D nach der gemeinſchaftlichen Tangens beyder Räder (Geometr. §. 111. II. Zuſ.), mithin iſt

18. in Beziehung auf das Rad in D ihr Moment: $= Q.BD = Q.R.$

19. Kommen durch die Umdrehung die beyden Räder in die Lage, daß ſich nun dieſe Zähne in dem Puncte M berühren (Nr. 12-14.), ſo iſt

20. die auf den Punct M des Getriebes reducirte Kraft $= \frac{Q.r}{AM}$ (§. 171. III. Zuſ.), das iſt, dieſe Kraft in M nach der Richtung MG, welche auf AM ſenkrecht ſteht, iſt der Kraft Q in D gleichgeltend.

21. Der Zahn des Getriebes drückt alſo in M nach dieſer Richtung MG auf den Radzahn $\alpha\beta\delta\gamma$ mit der Kraft $\frac{Q.r}{AM}$.

22. Da die Richtung MG auf die Seite $\alpha\beta$ des Radzahnes, alſo auch auf den Halbmeſſer $B\alpha$ des Rades ſchief ſteht, ſo verlängere man

23. die Richtung der Normal DM, und zerlege die Kraft in zwey Seitenkräfte nach MA und Md, ſo iſt erſtere, oder

24. Nach der Richtung $MA = \frac{Q.r.\sin.dMG}{AM.\sin.AMd}$ (Reine Mech. §. 53. VII. Zuſ.), dieſe Seitenkraft wird durch die befeſtigte Axe des Getriebes in A aufgehoben.

25. Die Seitenkraft nach der Richtung der Normal, das iſt, nach $Md = \frac{Q.r\sin.AMG}{AM.\sin.AMd} = \frac{Q.r}{AM.\sin.AMd}$ weil $AMG = 90^\circ$ (Nr. 20.) $= \frac{Q.r}{AM\sin.AMD}$ (Trigonometr. §. 291.).

26. Im Dreyecke AMD iſt nun:
$AM : AD = \sin.ADM : \sin.AMD$, mithin
$AM\sin.AMD = AD.\sin.ADM = r\sin.BDM$.

27. Sezet man dieſen Werth in die lezte Gleichung Nr. 25., ſo wird die Seitenkraft nach Md

$$= \frac{Q.r}{r.\sin.BDM} = \frac{Q}{\sin.BDM}.$$

28. Leztere Kraft hat nun in Beziehung auf das Rad ein Moment $= \frac{Q.BM}{\sin.BDM}$, indem ihre Richtung auf BM ſenkrecht iſt (Nr. 14.).

29. Der Winkel $BMD = 90^\circ$ (Geom. §. 72. III. Zuſ.), mithin iſt

30. in eben dieſem Dreyecke:
$BD : BM = 1 : \sin.BDM$, alſo iſt
$\frac{BM}{\sin.BDM} = BD = R$;

31. Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 28., ſo iſt das Moment der umdrehenden Kraft in M auf das Rad $= \frac{Q.BM}{\sin.BDM} = Q.R$ wie N. 18. im Anfange bey D, das iſt: das Moment bleibt für

jede Stelle unverändert, ſo daß alſo nebſt Nr. 15. die Bedingungen Nr. 7 und 8. vorhanden ſind, und dadurch die Richtigkeit der Auflöſung erwieſen iſt.

I. Zuſaz. Vermög Nr. 10. erhellet, daß die Zähne des ergriffenen Rades auf jeder Seite die Form einer innern Epicycloide erhalten ſollen, welche aber für den Fall, wenn der Halbmeſſer des erzeugenden Kreiſes dem halben Radius des Rades gleich genommen wird (Nr 1.), gerade Linien werden, und in die Richtungen der Radien des Rades fallen, nimmt man hingegen den Halbmeſſer CD des Erzeugungskreiſes größer oder kleiner als $\frac{1}{2}$ BD, ſo muß man den Zähnen des Rades auf jeder Seite die Form einer innern Epicycloide geben, (höhere Geometr. §. 360.)

II. Zuſaz. Wird der Halbmeſſer des Rades unendlich groß, ſo wird die innere Epicycloide, bey einem beliebigen Erzeugungskreis, deſſen Radius nicht ſelbſt unendlich iſt, eine Cycloide (höhere Geometr. §. 362. IV. Zuſ.), und der Umfang des Rades iſt dann eine gerade Linie, auf welcher im Berührungspuncte D des Getrieb-Umfanges deſſen Halbmeſſer AD ſenkrecht ſteht. Soll alſo von dem Getriebe eine gerade gezähnte Stange in Bewegung geſezet werden, und in D der Eingriff anfangen, ſo erhalten die Zähne der Stange die Form einer Cycloide (höhere Geometr. §. 360. II. Zuſ.), ſonſt bleibt alles unverändert wie in der Auflöſung, wenn vom Getriebe ein Rad in Bewegung geſezet werden, und der erſte Eingriff in der Centrallinie geſchehen ſoll.

III. Zuſaz. Will man (Fig. 85.) bey einer geraden Stangen, das iſt, für BD $= \infty$ auch wie Nr. 1. den Halbmeſſer des erzeugenden Kreiſes CD $= \frac{1}{2}$ BD

alſo ebenfalls unendlich nehmen, ſo werden die Seiten der Zähne für die Stange wieder geradlinigt, und ſtehen, da ſie in die Richtungen der Radien des Rades fallen, auf ihrem Umfange, das iſt, auf der Stange ſenkrecht; die Zähne des Getriebes erhalten dagegen die Form einer äuſſern Epicycloide NM, welche der erzeugende Kreis, das iſt, eine gerade Linie erzeugt, indem ſie ſich auf dem Umfang des Getriebes fortwälzet, oder, was eben daſſelbe iſt, die Curve NM eines Getriebzahns iſt eine durch Abwicklung des Getriebumfangs erzeugte Linie (höhere Geometr. §. 355.), ſo iſt der Theil NM dadurch erzeugt, indem ſich das Stück ND des Umfanges abwickelt.

IV. Zuſaz. Stellet man ſich vor (Fig. 84.), die Bewegung der beyden Räder erhalte nun eine entgegengeſezte Richtung, ſo daß die Umdrehung des Rades nach der Richtung DX, und jene des Getriebes nach DZ erfolge, ſo drückt der Radzahn $\alpha\beta\delta\gamma$ in M auf den Getriebzahn NMOS, und ſchiebt ſolchen vor ſich her, verläßt ihn dann in der Centrallinie bey D wieder, die Bewegung bleibt wälzend, und die Momente der Kraft an jeder Stelle unverändert; ſoll daher das Getrieb von einem Rade in Bewegung geſezt werden, und der Eingriff jedes Zahns vor der Centrallinie anfangen, und in der Centrallinie aufhören, ſo erhalten die Zähne am Rade und Getriebe eben die Form, wie für den Fall, wenn das Rad vom Getriebe ergriffen wird, der Anfang des Eingriffes in D iſt, und hinter der Centrallinie wieder aufhört.

V. Zuſaz. Da im leztern Falle wieder die Bewegung gegen die Richtung der Fibern erfolgt, mithin

die

die Reibung vermehrt wird, und leicht eine Stemmung entſtehen kann wie (§. 198 IV. Zuſ.), ſo ſuchet man das Eingreiffen vor der Centrallinie zu verhüten.

VI. Zuſatz. In Beziehung auf die Länge, und gehörige Abrundung der Zähne gilt wieder was §. 198. in V bis VII. Zuſ. bemerkt wurde.

§. 200.

Erklärungen. (Fig. 82. 84.)

a. Da bey der gehörigen Form der Zähne ſich dieſelben ſtets nur in einem Puncte berühren, und der Druck, welchen der eingreiffende Zahn in dem Berührungspuncte D der Centrallinie auf den ergriffenen Zahn äuſſert, für jede andere Stelle M des Berührungspunctes unverändert bleibt (§. 198 und §. 199.) ſo nennet man die von den beyden Mittelpuncten nach D gezogenen geraden Linien AD, BD die Halbmeſſer des Rades und Getriebes, ſo wie die damit beſchriebenen Kreiſe YDZ, VDX ihre Umfänge, ſo iſt (Fig. 82) AD der Halbmeſſer, und YDZ ein Stück vom Umfange des Rades, und BD der Halbmeſſer des Getriebes, VDX ein Theil ſeines Umfanges; hingegen (Fig. 84.) iſt BD der Halbmeſſer des ergriffenen Rades, VDX ein Stück ſeines Umfanges; AD der Halbmeſſer des eingreiffenden Getriebes, und YDZ ein Stück ſeines Umfanges.

b. Zieht man vom Mittelpuncte bis an den Fuß eines Zahns eine gerade Linie, ſo heißt ſolche der urſprüngliche Halbmeſſer, und der damit verzeichnete Kreis die Stirn des Rades oder Getriebes, ſo ſind AD, BL die urſprünglichen Halbmeſſer, und die

Bögen YZ, xLv Stücke von der Stirn des Rades und Getriebes.

c. Zieht man endlich vom Mittelpuncte bis an die Scheitel eines Zahns eine gerade Linie; so heißt ſie der Totalhalbmeſſer, ſo ſind AF, BD die Totalhalbmeſſer des Rades und Getriebes.

I. Zuſaz. Wenn von einem Stirnrade (Fig. 82.) ein Getrieb in dem Puncte D der Centrallinie ergriffen wird, ſo iſt bey dem Rade deſſen Halbmeſſer AD zugleich der urſprüngliche Halbmeſſer deſſelben, die Zähne ragen alſo über den Umfang des Rades hervor: hingegen fällt bey dem Getriebe deſſen Halbmeſſer BD mit dem Totalhalbmeſſer zuſammen, und die Zähne liegen innerhalb dem Umfange des Getriebes.

II. Zuſaz. Wird ein Stirnrad (Fig. 84.) vom Getriebe in dem Puncte D der Centrallinie ergriffen, ſo iſt der Halbmeſſer BD des Rades zugleich deſſen Totalhalbmeſſer, und die Zähne liegen ganz innerhalb dem Umfange des Rades; der Halbmeſſer AD des Getriebes fällt mit deſſen urſprünglichen Halbmeſſer zuſammen, und die Zähne ragen ganz über den Umfang des Getriebes hervor.

§. 201.

Aufgabe. (Fig. 86.)

Ein Getrieb ſoll von einem Stirnrade in Bewegung geſezt werden, der Radzahn ſoll jedesmal den Getriebzahn vor der Centrallinie in M ergreifen, und hinter derſelben in m wieder verlaſſen, man ſoll für Rad und Getrieb die Form der Zähne beſtimmen, wenn der Halbmeſſer AD des Rades, und jener BD des Getriebes gegeben ſind.

Auflöſung.

1. Jedem Zahn am Rade ſowohl als am Getrie⸗be gebe man eine ſolche Construction, daß ſein oberer Theil über den Umfang hervorraget, und der untere Theil innerhalb dem Umfang zu liegen kömmt.

2. Am Getriebe gebe man dem obern Theil eines jeden Zahns eine ſolche Form, daß die Krümmungen $\beta\gamma$, $\delta\gamma$ Stücke einer äuſſern Epicycloide ſind, welche der erzeugende Kreis, deſſen Halbmeſſer $CD = \frac{1}{2}AD$ auf dem Umfang des Getriebes VDX als Baſis be⸗ſchreibet; für den untern Theil eines Radzahnes ziehe man vom Mittelpuncte A aus die geraden Linien EM, FN.

3. Dem obern Theile des Radzahnes gebe man auf jeder Seite MO, NO die Krümmung einer äuſſern Epicytloide, welche der Kreis, deſſen Halbmeſſer $GD = \frac{1}{2}BD$, auf dem Umfange YDZ als Baſis er⸗zeugt, und ziehe vom Mittelpuncte B für die untere Seiten des Getriebzahns die geraden Linien $\alpha\beta$, $\varepsilon\delta$.

4. Vermög der Construction Nr. 2. wird der Rad⸗zahn, wenn er das Getrieb in M ergreifet, mithin der untere Theil des Radzahns mit dem obern Theil des Getriebzahns in Berührung kömmt, ſolches bis nach D der Centrallinie ſo fortſchieben, daß die Bewegung der Zähne wälzend, und die Momente unverändert bleiben, (§. 199. IV. Zuſ.)

5. Vermög der Construction (Nr. 3.) wird ferner von D an, wo der obere Theil des Radzahnes mit dem untern Theil des Getriebzahns in Berührung kömmt, auf die nemliche Art die Bewegung fortdauern, (§. 198.) folglich die angegebene Form den Bedingun⸗gen eines guten Eingriffes entſprechen.

Zuſaz. Da von M bis D die Bewegung gegen die Faſern geſchieht (§. 199. V. Zuſ.), ſo muß M immer dem Puncte D ſo nahe als möglich angenommen werden, ſo daß ſtets m weiter von D entfernt iſt als M.

§. 202.

Aufgabe. (Fig. 87.)

Von einem Getriebe ſoll ein Stirnrad in Bewegung geſezet werden, der Eingriff ſoll vor der Centrallinie in M erfolgen, und hinter derſelben in m wieder aufhören, man ſuchet die beſtimmte Form der Zähne am Getriebe und Rade, wenn ihre Halbmeſſer BD, AD gegeben ſind.

Auflöſung.

1. Jeder Zahn muß wieder aus einem obern Theile, welcher über dem Umfang hervorragt, und einem untern Theile beſtehen, welcher innerhalb dem Umfang liegt.

2. Dem obern Theile eines Radzahns, gebe man auf jeder Seite MO, NO die Krümmung einer äuſſern Epicycloide, welche ein Kreis, deſſen Halbmeſſer $GD = \frac{1}{2} BD$ auf dem Umfange YDZ des Rades als Baſis beſchreibt, und für den untern Theil eines Getriebzahns ziehe man die geraden Linien $\alpha\beta$, $\varepsilon\delta$;

3. dem obern Theile eines jeden Getriebzahns gebe man auf jeder Seite $\beta\gamma$, $\delta\gamma$ die Krümmung einer äuſſern Epicycloide, welche der Kreis, deſſen Halbmeſſer $CD = \frac{1}{2} AD$ auf dem Umfange XDV des Getriebes als Baſis beſchreibet, und ziehe für den untern Theil des Radzahns vom Mittelpunct A, an die Theilungspuncte M, N die geraden Linien EM, FN.

4. Ergreiffet nun der Getriebzahn das Rad in M; ſo kömmt der untere Theil des Getriebzahns mit dem obern Theile des Radzahns in Berührung bis in den Punct D der Centrallinie; die Bewegung iſt wälzend, und die Momente bleiben unverändert (§. 198. III. Zuſ.).

5. Von D bis m kömmt endlich der obere Theil des Getriebzahns mit dem untern Theile des Radzahns in Berührung, alſo bleibt ebenfalls die Bewegung wälzend, und das Moment an jeder Stelle unverändert (§. 199.), folglich entſpricht die Einrichtung den Foderungen eines guten Eingriffes.

Zuſaz. Da die Bewegung von M bis D gegen die Richtung der Fibern erfolget (§. 198. IV. Zuſ.), ſo nimmt man den Punct des Eingriffes ſo nahe als möglich an der Centrallinie, hingegen giebt man dem Puncte m, wo die Zähne einander verlaſſen, eine gröſſere Entfernung vom Mittelpuncte.

§. 203.

Lehrſaz.

Wenn ein Getrieb, deſſen Halbmeſſer r, und Anzahl der Zähne m iſt, mit einem Stirnrade, deſſen Halbmeſſer R, und Anzahl der Zähne M iſt, in Verbindung geſezt wird, ſo verhalten ſich die Anzahl der Zähne am Getriebe und Rade, wie die Halbmeſſer derſelben, oder: $m : M = r : R$.

Beweis.

1. Es leuchtet für ſich ein, daß der Theil des Umfanges, welchen jedesmal ein Zahn ſammt ſeiner Zwiſchenweite faßt, allenthalben gleich groß ſeyn muß, ſo daß alſo

2. am Getriebe der für einen Zahn ſammt ſeiner Zwiſchenweite entſprechende Theil $= \frac{2r\pi}{m}$, und

3. für jeden Radzahn ſammt ſeiner Zwiſchenweite der Theil $\frac{2R\pi}{M}$ des Radumfanges gehört.

4. Wenn nun der Eingriff in einem Puncte D der Centrallinie anfängt, und hinter derſelben in M aufhöret, (Fig 82 und 84.) ſo beſchreibet gleichzeitig der Punct D am ergriffenen Getriebe oder Rade den Bogen Dα, während eben dieſer Punct am eingreiffenden Rade oder Getriebe den Bogen DN hinterlegt, ſo daß jedesmal Dα und DN dem Bogen DM des erzeugenden Kreiſes, alſo unter ſich gleich ſind (§. 198 und §. 199. Nr. 12 und 13.).

5. Kommen alſo, ſobald der Eingriff in M aufhöret, zwey neue Zähne in der Centrallinie miteinander in Berührung, ſo ſind Dα, DN die auf einen Zahn ſammt ſeiner Zwiſchenweite treffende Theile (Nr. 2 u. 3.) am Umfange des Getriebes und Rades, mithin

6. $\frac{2r\pi}{m} = \frac{2R\pi}{M}$

7. Eben dieſes folgt auf die nemliche bey jener Einrichtung des Rades und Getriebes, wo der Eingriff in einem Puncte M vor der Centrallinie anfängt, und im Puncte D der Centrallinie aufhöret (§. 198. III. Zuſ. und §. 199. IV. Zuſ.).

8. Iſt endlich die Vorrichtung ſo beſchaffen, daß (Fig. 86, 87.) der Eingriff in einem Puncte M vor der Centrallinie anfängt, und hinter derſelben in einem Puncte m wieder aufhöret, ſo folgt ebenfalls die Gleichung Nr. 6., weil doch die gegenwärtige Vorrichtung

nur eine Verbindung der beyden vorigen iſt (§. 201 und §. 202.), mithin iſt auch

9. $\frac{r}{m} = \frac{R}{M}$, alſo

$m : M = r : R$.

I. Zuſaz. Sind für ein Stirnrad und Getriebe von den 4 Größen: m, M, r, R drey gegeben, ſo läßt ſich die vierte durch Rechnung beſtimmen.

II. Zuſaz. Sind für Getrieb und Rad die Anzahl der Zähne m, M gegeben, ſo iſt zwar dadurch das Verhältniß der Halbmeſſer $\frac{r}{R} = \frac{m}{M}$, aber nicht ihre abſolute oder wahre Größe gegeben, leztere läßt ſich nur aus der Vergleichung des Druckes, welchem die eingreiffenden Zähne ausgeſezt ſind, und der Feſtigkeit des Materials, woraus ſie verfertiget werden, beſtimmen; überdieſes muß noch die gehörige Feſtigkeit der Axen, und ihrer Zapfen berückſichtiget werden. (§. 193. IV. Zuſ.)

III. Zuſaz. Aus der bekannten Anzahl der Zähne, und den Halbmeſſern ſind für die Zähne und ihre Zwiſchenweiten zuſammen für Getrieb und Rad, nemlich $\frac{2r\pi}{m} = \frac{2R\pi}{M}$ (Nr. 6.) gegeben, aber das Verhältniß eines Zahns zu ſeiner Zwiſchenweite iſt dadurch noch nicht beſtimmt; indeſſen leuchtet für ſich ein,

a. daß am Getriebe und Rade ihre Zähne und Zwiſchenweiten in einem ſolchen Verhältniſſe genommen werden müſſen, daß die Zähne des einen in die Zwiſchenweiten des andern, ohne ſich zu ſtemmen oder zu reiben, paſſen müſſen, daß

b. der Getriebzahn öfter als ein Radzahn in Berührung kömmt (§. 194.), mithin mehr zu leiden hat.

IV. Zuſaz. In dieſer doppelten Beziehung muß daher

a. der Zwiſchenraum am Getriebe etwas weiter als die Breite eines Radzahns, und eben ſo die Zwiſchenweite zwiſchen 2 Radzähnen größer als die Breite eines Getriebzahns ſeyn.

b. Giebt man den beyden Zähnen am Rade und Getriebe gleiche Breite, ſo muß ein Zahn am Getriebe $< \frac{2r\pi}{m}$, und eben ſo ein Zahn am Rade $< \frac{2R\pi}{M}$ ſeyn, dagegen muß das Getrieb aus einem feſtern Material beſtehen.

c. Beſtehen Rad und Getrieb aus einerley Material, ſo muß der Getriebzahn ſtärker als der Radzahn ſeyn; bey großen Maſchinen kann ſich nach Vega am Getriebe der Zahn zu ſeiner Zwiſchenweite $= 8 : 7$ am Rade hingegen $= 6\frac{1}{2} : 8\frac{1}{2} = 13 : 17$ verhalten. Langsdorf giebt für das Verhältniß des Zahns zu ſeiner Zwiſchenweite am Getriebe $= 8 : 8$ und am Rade $= 7 : 9$ an. Bey der ſo großen Mannigfaltigkeit

α. des Materials, woraus Rad und Getrieb verfertiget,

β. des Druckes, den die Zähne gegen einander äuſſern,

γ. der Größe ihrer Halbmeſſer, läßt ſich wohl nie eine allgemeine beſtimmte Regel angeben.

§. 204.

Aufgabe. (Fig. 82.)

Ein Getrieb, deſſen Halbmeſſer $BD = r$, und Anzahl der Zähne m gegeben iſt, ſoll von einem Sternrade, deſſen Halbmeſſer $AC = R$ ebenfalls gegeben iſt, in Bewegung geſezet werden, man ſucht die Einrichtung für die Zähne am Rade und Getriebe.

Aufloſung.

1. Durch die gegebenen Halbmeſſer r, R, und Anzahl der Zähne des Getriebes oder m, iſt nun auch die Anzahl der Radzähne $M = \frac{m. R}{r}$ beſtimmt (§ 203)

2. Theilet man nun den Umfang des Getriebes in m Theile, ſo iſt $\frac{2 r \pi}{m}$ = dem Bogen $D\alpha$, das iſt, der Zahnbreite, ſammt der Zwiſchenweite gleich, woraus ſich nach §. 203. IV. Zuſ. die Breite D H eines Getriebzahns, und die Zwiſchenweite $H\alpha$ ergiebt.

3. Ferner iſt der Centriwinkel $DB\alpha = \varphi = \frac{360^\circ}{m}$ alſo bekannt.

4. Theilet man den Umfang des Rades in M Theile, ſo giebt $\frac{2 r \pi}{M}$ die Größe des Bogens D N, alſo am Umfange des Rades die Breite eines Zahns ſammt ſeiner Zwiſchenweite, wo ſich wieder erſtere N S, und die zweyte D S aus §. 203. IV. Zuſ. ergiebt.

5. Der Centriwinkel $DAN = \psi = \frac{860^\circ}{M}$ iſt ebenfalls bekannt.

6. Da es nun am vortheilhafteſten iſt, wenn der Angriff im Puncte D der Centrallinie erfolgt, und die Berührung der beyden Zähne hinter der Centrallinie ſo lange fortdauert, bis die beyden nächſtfolgenden Zähne wieder in D einander berühren, mithin M die Stelle iſt, wo die lezte Berührung ſtatt hat, ſo

7. beſtimme man die Krümmungen der Radzähne nach §. 198.

8. Zieht man nach M die gerade Linie AM, ſo iſt die nothwendige Höhe eines Zahns $a = AM - R$, alſo $AM = a + R$.

9. Zieht man nebſt der Centrallinie AB, die gerade Linie BM, und im erzeugenden Kreiſe die Sehne DM, ſo iſt

10. der Winkel $BMD = 90^\circ$ (§. 198. Nr. 30.), mithin

$$ADM = BMD + DBM = 90^\circ + \varphi \text{ (Nr. 3.), alſo}$$
$$\cos. ADM = -\sin. \varphi$$

11. Ferner iſt im rechtwinklichten Dreyecke BMD:
$$BD : DM = 1 : \sin. DBM, \text{ oder}$$
$$r : DM = 1 : \sin. \varphi; \text{ alſo}$$

12. $DM = r \sin. \varphi$

13. Im Dreyecke ADM iſt endlich
$$AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2 AD.DM.\cos.ADM \text{ (Trigon. §. 338. II.)}$$

14. Sezet man aus Nr. 8, 10 und 12. die Werthe, ſo wird leztere Gleichung:
$$(a+R)^2 = R^2 + r^2 \sin. \varphi^2 + 2 R r \sin. \varphi^2, \text{ oder}$$
$$a^2 + 2Ra + R^2 = R^2 + r(r+2R) \sin. \varphi^2$$
$$a^2 + 2Ra = r(r+2R) \sin. \varphi^2, \text{ mithin}$$

15. $a = -R + \sqrt{[R^2 + r(r+2R)\sin. \varphi^2]}$ (Arithm. §. 159.) die nothwendige Höhe des Zahns, wenn die Berührung ſo lang dauern ſoll, bis der folgende Zahn des Rades den folgenden Zahn des Getriebes in der Centrallinie wieder ergreifet.

16. Durch die Länge des Radzahns iſt nun auch die gleiche Länge der Getriebzähne, ſo wie aus §. 198. ihre Form beſtimmt, mithin die Aufgabe aufgelöſet.

Anmerk. Da die 82ſte Figur zur Erklärung der Auflöſung hinreichet, ſo wurde keine neue verzeichnet, obgleich die Dicke und Länge der Zähne nicht gehörig vorgeſtellt ſind.

§. 205.

Aufgabe.

Ein Stirnrad, deſſen Halbmeſſer R gegeben iſt, ſoll von einem Getriebe, deſſen Halbmeſſer r, und Anzahl der Zähne m ebenfalls gegeben ſind, in Bewegung geſezet werden, man ſoll die Einrichtung am Rade und Getriebe beſtimmen.

Auflöſung.

1. Zur Erklärung iſt die 84ſte Figur hinreichend, obgleich das gehörige Verhältniß der Breite und Länge nicht dargeſtellt werden konnte.

2. Durch R, r und m iſt auch die Anzahl M der Radzähne beſtimmt (§. 203.).

3. Man theile alſo den Umfang des Rades in M gleiche Theile, ſo giebt eine Abtheilung $\frac{2R\pi}{M}$ allemal die Weite $D\alpha$, das iſt, die Breite des Zahnes ſammt ſeiner Zwiſchenweite, man theile ſolche

4. nach dem §. 203. IV. Zuſ. angegebenen Verhältniſſe, ſo iſt die Breite des Radzahnes DH, und die Zwiſchenweite $H\alpha$ beſtimmt, ſo wie nun

5. der Winkel $DB\alpha = \psi = \frac{360^\circ}{M}$ gegeben iſt.

6. Eben ſo theile man den Umfang des Getriebes in m gleiche Theile, ſo giebt eine Abtheilung $\frac{2r\pi}{m}$ die Gröſſe eines Getriebzahns ſammt ſeiner Zwiſchenweite oder DN,

7. Leztere theile man abermal nach dem Verhältniſſe (§. 203. IV. Zuſ.), ſo bekömmt man die Breite NS des Zahns, und deſſen Zwiſchenweite DS, und

8. der Centriwinkel $NAD = \varphi = \frac{360^\circ}{m}$ iſt ebenfalls gegeben.

9. Da es am vortheilhafteſten iſt, wenn der Eingriff in dem Puncte D der Centrallinie geſchieht, und die Berührung ſo lang hinter der Centrallinie dauert, bis die nächſtfolgenden Zähne ſich wieder in der Centrallinie berühren, ſo gebe man

10. den Zähnen am Rade und Getriebe die Form nach §. 199.

11. Iſt nun M die Stelle, wo die lezte Berührung ſtatt finden ſoll, und drückt b die nothwendige Höhe eines Getriebzahns aus, ſo iſt

12. $AM = r + b$

13. Zieht man noch die Centrallinie AB, die gerade BM, und im erzeugenden Kreiſe die Sehne DM, ſo iſt

14. im rechtwinklichten Dreyecke BMD:
$BD : DM = 1 : \sin. DBM$, oder
$R : DM = 1 : \sin. \psi$, alſo

15. $DM = R \sin. \psi$.

16. Ferner iſt der Winkel $ADM = BMD + DBM$
$= 90^\circ + \psi$ (Nr. 5.)
mithin

17. $\cos. ADM = - \sin. \psi$.

18. Im Dreyecke ADM iſt endlich
$AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2 AD . DM \cos. ADM$ (Trigon. §. 338. II.).

19. Sezet man in dieſe Gleichung aus Nr. 12, 15, 17, die Werthe, ſo wird:
$(r+b)^2 = r^2 + R^2 \sin. \psi^2 + 2 r R \sin. \psi^2$
$r^2 + 2br + b^2 = r^2 + R[R + 2r] \sin. \psi^2$
$b^2 + 2rb = R(R + 2r) \sin. \psi^2$, alſo die Höhe des Getriebzahns, oder

20. $b = -r + \sqrt{[r^2 + R(R+2r)\sin.\psi^2]}$ (Arithm. §. 159.), wodurch auch die gleiche Höhe des Radzahns beſtimmt, mithin die Aufgabe aufgelöſet iſt.

Zuſaz. Die Annahme §. 204. Nr. 6., und §. 205. Nr. 9. findet in der Ausführung nicht allemal ſtatt, die eingreiffenden Zähne würden länger genommen werden müſſen, als es der §. 203. III. Zuſ. beſtimmte Raum ſammt ſeiner Zwiſchenweite geſtattet, es würde nemlich entweder der Zahn nicht die gehörige Breite, alſo Stärke erhalten, oder die zur Aufnahme des Getriebzahns nothwendige Zwiſchenweite zu klein werden; in dieſem Falle müſſen daher die Zähne ſo conſtruirt werden, daß der Eingriff ſchon vor der Centrallinie geſchieht, und hinter der Centrallinie die Berührung erſt wieder aufhöret, die Anordnung muß daher nach §. 201 - 203. geſchehen.

§. 206.

Aufgabe. (Fig. 82.)

Ein Getrieb wird von einem Stirnrade in Bewegung geſezet, der Eingriff erfolgt in dem Puncte D der Centrallinie, und dauert ſo lange fort, bis ſich die nächſten Zähne wieder im Puncte D der Centrallinie berühren, man ſucht die Größe F der Reibung auf den Endespunct des Radhalbmeſſers reducirt.

Auflöſung.

1. Wenn P′ die auf den Punct D des Rades reducirte Kraft bezeichnet, welche auf die Umdrehung des Getriebes, und F jene Kraft ausdrückt, die zur Ueberwindung der zwiſchen den Zähnen vorhandenen Reibung verwendet wird, ſo iſt die geſammte erfoderliche Kraft $P = P' + F$.

2. Berühren ſich nun die Zähne in dem beliebigen Puncte M hinter der Centrallinie, und man zieht die gerade Linien BM, AM, die Sehne DM, ſo iſt leztere die gemeinſchaftliche Normal, als $BMD = 90°$;

3. Sezet man den veränderlichen Winkel $DBM = \omega$; ſo iſt $BDM = 90° - \omega$, mithin $\sin. BDM = \cos. \omega$.

4. Die Geſammtkraft P äuſſert nun in M nach der Richtung der Normal Md den Druck $= \frac{P}{\sin. BDM}$ (§. 198. Nr. 28.) $= \frac{P}{\cos. \omega}$

5. Bezeichnet μ den Reibungscoefficienten, ſo drückt $\frac{\mu P}{\cos. \omega}$ die in M erzeugte Reibung aus.

6. Die umdrehende Bewegung des Rades, das iſt, die Bewegung der Linie AM nach der Richtung der Tangens MG läßt ſich nach den beyden Richtungen der den Zähnen gemeinſchaftlichen Normal Md, und der gemeinſchaftlichen Tangens $M\alpha$ zerlegen (Reine Mechan. §. 61.).

7. Gegen die leztere Bewegung ſtemmt ſich nun die Reibung, folglich wirkt ſolche nach der Richtung $M\beta$ (§. 56. I. Zuſ.).

8. Man zerlege ſie alſo nach den Richtungen $M\alpha$; und der auf leztere ſenkrechten Mg, ſo wird

9. erſtere durch die Feſtigkeit der Axe in A aufgehoben, leztere aber wirket der Richtung MG der Kraft entgegen, und muß alſo überwunden werden, ſie iſt aber

10. $= \frac{\mu P}{\cos. \omega} \cos. \beta Mg$ (Reine Mech. §. 53. IX. Zuſ.)

11. Nun iſt $\beta Mg + gMD = BMD = 90°$ (N. 2.) $= gMD + DMA$ (Nr. 8.), alſo $\beta Mg = DMA$.

12. $DMA = AMB - BMD = AMB - 90°$, folglich

13. $\cos. DMA = \sin. AMB = \cos. \beta Mg$ (Nr. 11.).

14. Im Dreyecke AMB iſt nun

$$AM : AB = \sin.\ ABM : \sin.\ AMB.$$

15. Sezet man wieder den Halbmeſſer des Rades $AD = R$, jenen des Getriebes $BD = r$, und dann aus Nr. 3 und 13. ſtatt den Sinus ihre Werthe in die voranſtehende Proportion, ſo wird

16. $AM : R + r = \sin. \omega : \cos. \beta Mg$, mithin

$$\cos. \beta Mg = \frac{(R+r) \sin. \omega}{AM}, \text{ folglich}$$

17. $$\frac{\mu P}{\cos. \omega} \cos. \beta Mg = \frac{\mu (R+r) P}{AM} \cdot \frac{\sin. \omega}{\cos. \omega} \text{(N. 10.)}$$

$$= \frac{\mu (R+r) P \,\text{tang.}\, \omega}{AM}$$

18. Soll nun am Umfange des Rades die Kraft F dieſer Reibung das Gleichgewicht halten (Nr. 1.); ſo muß für die Stelle M das Moment

$$F.R = AM. \frac{\mu (R+r) P \,\text{tang.}\, \omega}{AM} = \mu (R+r) P \,\text{tang.}\, \omega, \text{ alſo}$$

19. $F.R = \mu (R+r)(P' + F) \,\text{tang.}\, \omega$ ſeyn (Nr. 1.)

20. $F.R = \mu (R+r) P' \,\text{tang.}\, \omega + F \mu (R+r) \,\text{tang.}\, \omega$

$F.[R - \mu (R+r) \,\text{tang.}\, \omega] = \mu (R+r) P' \,\text{tang.}\, \omega$, und

21. $$F = \frac{\mu (R+r) P' \,\text{tang.}\, \omega}{R - \mu (R+r) \,\text{tang.}\, \omega},$$ welches die auf den Umfang des Rades geſuchte Größe der zur Ueberwindung der Reibung nothwendigen Kraft iſt.

I. Zuſaz. Bezeichnen M, m die Anzahl der Zähne am Rade und Getriebe, ſo iſt $m : M = r : R$ (§. 203.), mithin $R = \frac{r}{m} M$.

Ferner $M + m : R + r = m : r$ (Arithm. §. 214. I. Zuſ.), mithin $R + r = (M + m) \frac{r}{m}$.

Sezet man dieſe Werthe in die Gleichung Nr. 21. ſo wird

$$F = \frac{\mu (M+m) \frac{r}{m} \text{tang.} \omega}{M \frac{r}{m} - \mu (M+m) \frac{r}{m} \text{tang.} \omega} P' = \frac{\mu (M+m) \text{tang.} \omega}{M - \mu (M+m) \text{tang.} \omega} P'$$

II. Zuſaz. Die Reibung, welche zwiſchen dem eingreiffenden Radzahn und ergriffenen Getriebzahn während ihrer Berührung ſtatt hat, iſt um ſo größer, je größer die am Getriebe zu überwältigende Laſt P′, und je größer der Halbmeſſer des Getriebes r, oder die Anzahl m der Getriebzähne in Beziehung auf den Halbmeſſer des Rades R, oder Anzahl der Zähne M iſt.

III. Zuſaz. Die Reibung während der Berührung zweyer Zähne wächst mit dem Winkel ω, oder mit der Entfernung der Zähne von der Centrallinie; ſie iſt für $\omega = 0$, oder im Puncte D der Centrallinie $= 0$; wächst dann bis $\omega = \varphi = \frac{360^\circ}{m}$ (§. 204. Nr. 3.) wird, wo wieder in der Centrallinie eine neue Berührung der nächſtfolgenden Zähne anfängt.

IV. Zuſaz. Wenn $M = 52$, $m = 6$, $P' = 100$ ℔., und $\mu = \frac{1}{6}$ (für die Reibung der Zähne gegeneinander fehlet es noch zur Beſtimmung des Reibungscoefficienten μ an den nothwendigen Verſuchen), ſo iſt $\varphi = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, mithin

log. (M + m)	= log. 58	= 1,7634280
log. tang. φ	= log. tang. 60°	= 0,2385606
log. (M + m) tang. φ		= 2,0019886
log. μ	= log. ⅙	= − 0,7781513
log. μ (M + m) tang. φ		= 1,2238373

mithin

mithin $\mu\,(M+m)\,\mathrm{tang.}\,\varphi = 16{,}743$, und

$M - \mu\,(M+m)\,\mathrm{tang.}\,\varphi = 35{,}257$, folglich

$$F = \frac{16{,}743}{35{,}257}\,P' = 0{,}4749 = 47{,}49 \text{ ℔.},$$

welche Reibung am Ende ſtatt hat, wenn $\omega = \varphi$ iſt, und nun ein neuer Eingriff in der Centrallinie anfängt.

V. Zuſaz. Wird das Rad vom Getriebe in Bewegung geſezet (Fig. 84.), ſo erhält auf eben dieſelbe Art, wenn man den veränderlichen Winkel am Mittelpuncte des Rades $DBM = \zeta$ ſezet:

$$F = \frac{\mu\,(R+r)\,\mathrm{tang}\,\zeta}{r - \mu(R+r)\,\mathrm{tang}\,\zeta}\,P' = \frac{\mu\,(M+m)\,\mathrm{tang.}\,\zeta}{m\,.\,\mu\,(M+m)\,\mathrm{tang.}\,\zeta}\,P' \text{(I Zuſ.)}$$

Die Reibung wächst alſo mit der Laſt P', welche vom Getriebe am Rade überwältiget werden muß, und iſt noch auſſer dieſem um ſo größer, je größer der Halbmeſſer R des Rades, oder die Anzahl M der Radzähne in Rückſicht des Halbmeſſers r des Getriebes oder der Anzahl m der Getriebzähne iſt. In der Centrallinie iſt endlich während der Berührung $\zeta = 0$, alſo auch $F = 0$, dann wächst die Reibung mit eben dieſem Winkel ζ, und iſt für $\zeta = \psi = \frac{360^\circ}{M}$ (§. 205. Nr. 5.), wo hinter der Centrallinie die Berührung aufhört, und von den nächſtfolgenden eine neue in der Centrallinie anfängt, am größten.

VI. Zuſaz. Wird ein Rad vom Getriebe in Bewegung geſezet, und es iſt $M = 52$, $m = 6$, $P' = 100$, $\mu = \frac{1}{6}$, ſo iſt $\psi = \frac{360^\circ}{52} = 6^\circ\,55'\,23''$, ferner

$$\begin{array}{lcl}
\log.\,(M+m) & = & 1{,}7634280 \\
\log.\,\mathrm{tang.}\,\zeta & = & 9{,}0842958 - 10 \\
\hline
\log.\,(M+m)\,\mathrm{tang.}\,\zeta & = & 0{,}8477238 \\
\log.\,\mu & = & -\,0{,}7781513 \\
\hline
\log.\,\mu\,(M+m)\,\mathrm{tang.}\,\zeta & = & 0{,}0695725,
\end{array}$$

mithin

$\mu\,(M+m)\,\text{tang.}\,\zeta = 1{,}17374$

$m - \mu\,(M+m)\,\text{tang.}\,\zeta = 4{,}82626$, folglich

$F = \frac{1{,}17374}{4{,}82626}\,P' = 0{,}2432\ P' = 24{,}32$ ℔., das maximum der Reibung.

VII. Zuſaz. Wird das Getrieb vom Rade in Bewegung geſezet (Fig. 82.), ſo entſteht durch die Seitenkraft nach $MA = \frac{P.R.\sin.dMG}{AM.\sin.AMd} = \frac{P.\sin.dMG}{\sin.BDM}$ (§. 198. Nr. 24-26.) ein Druck gegen die Axe des Rades, folglich eine Zapfenreibung.

Sezet man wieder die veränderlichen Winkel $DBM = \omega$ und $DAM = \zeta$, ſo iſt:

$dMG + aMd = 90^\circ = aMd + aMB$, mithin

$dMG = aMB = ABM + BAM$ (Geom. §. 47. VII. Zuſ.)

$= \omega + \zeta$, alſo $\sin.dMG = \sin.(\omega+\zeta)$

Ferner $\sin.BDM = \cos.\omega$ (Nr. 3.), folglich

$\frac{P.\sin.dMG}{\sin.BDM} = \frac{P.\sin.(\omega+\zeta)}{\cos.\omega}$, und die dadurch verurſachte Zapfenreibung am Rade $= \frac{\lambda.P\sin.(\omega+\zeta)}{\cos.\omega}$ welche alſo ebenfalls eine veränderliche Größe iſt, und mit der Entfernung des Angriffes von der Centrallinie wächst.

VIII. Zuſaz. Wird das Rad vom Getriebe ergriffen (Fig. 84.), ſo iſt die Seitenkraft nach der Richtung MA ebenfalls $= \frac{P.r.\sin.dMG}{AM\sin.AMd} = \frac{P\sin.dMG}{\sin.BDM}$ (§. 199. Nr. 24-26.). Sezet man die veränderlichen Winkel $DAM = \omega$, und $DBM = \zeta$, ſo iſt wieder

$dMG + dMa = 90^\circ = dMa + aMB$, alſo

$dMG = aMB = MBA + BAM = \zeta + \omega$, mithin

$\sin.dMG = \sin.(\zeta+\omega)$

Ferner BDM $= 90^\circ - \zeta$, alſo sin. BDM $=$ cos. ζ, folglich $\frac{P \sin. dMG}{\sin. BDM} = \frac{P \sin. (\zeta + \omega)}{\cos. \zeta}$, und die dadurch erzeugte Reibung des Getriebszapfen $= \frac{\lambda P \sin. (\zeta + \omega)}{\cos. \zeta}$; welche wieder veränderlich iſt, und mit der Entfernung der Berührungspunct von der Centrallinie zunimmt.

IX. Zuſaz. Wird alſo ein Rad mit einem Getriebe in Verbindung geſezet, ſo muß auſſer der gewöhnlichen Zapfenreibung, welche durch das Gewicht des Rades, des Getriebes und der Laſt in ihren Zapfenlagern entſteht, noch die aus der bewegenden Kraft P verurſachte Reibung an den Zapfen und zwiſchen den berührenden Zähnen in Anſchlag gebracht werden.

§. 207.

Erklärung. (Fig. 89.)

Wird die gezähnte eiſerne Stange AB, auf deren Gabel CD eine Laſt Q zur Stange parallel drückt, durch ein Getrieb E vermittels der Kurbel FG, welche ein Mann umdrehet, in Bewegung geſezet, mithin die auf der Gabel ruhende Laſt gehoben, ſo heißt die Vorrichtung die gemeine, oder einfache Fuhrmannswinde (Pancratium).

I. Zuſaz. Damit die Laſt Q in jeder beliebigen Höhe erhalten werden kann, wenn auch der Arbeiter die Handhebe der Kurbel verläßt, ſo iſt noch an der Axe des Getriebes ein kleines, ſägeartig eingeſchnittenes Rad $\alpha\beta$, (rota serrata, ein Strebrad) angebracht, in welches ein Sperrhacken, oder die Taze HI eingreift, und dadurch das Zurücktretten der Stange verhindert.

II. Zuſaz. Wenn ſowohl die Laſt Q nach der Richtung der Stange BA, als die Kraft P auf die Handhebe der Kurbel ſenkrecht wirket, ſo verhält ſich für den Zuſtand des Gleichgewichtes, wenn man noch von aller Nebenlaſt abſtrahirt, die Kraft zur Laſt, wie der Halbmeſſer des Getriebes zum Halbmeſſer der Kurbel (§. 171. II. Zuſ.) wie bey dem Rade an der Welle.

III. Zuſaz. Die Form der Zähne für die Stange ſowohl als für das Getrieb ſind §. 199. III. Zuſ. beſtimmt; — zur Nebenlaſt gehört die Reibung der Stange in ihrer Einfaſſung, die Reibung der beyden Zapfen des Getriebes, und endlich noch die Reibung zwiſchen den eingreiffenden Zähnen.

§. 208.

Erklärungen. (Fig. 90.)

Wenn durch eine horizontale Welle, einer, oder mehrere ſenkrechte Balken nach und nach bis zu einer gewiſſen Höhe gehoben werden, und dann durch ihre eigene Schwere von dieſer Höhe wieder herabfallen, ſo heiſſen

a. die Balken die Stampfer, oder Stempel,

b. die an denſelben befeſtigten Zapfen CD, EF, wodurch ſie gehoben werden, die Heblatten,

c. die bey M und N angebrachten Einfaſſungen, mittels welchen die Stampfer ſtets in lothrechter Lage erhalten werden, die Leitungen, oder Scheidelatten,

d. die an der Welle hervorſtehenden Zapfen HF, DO, die Daumen, und

e. die ganze Vorrichtung zuſammen eine Stampfmühle.

I. Zuſaz. Für die Welle iſt daher BD = Bf der wahre, Bd = Bc der urſprüngliche, und BF der Total-Halbmeſſer (§. 200.), mithin der Bogen HfD ein Bogen vom Umfange der Welle.

II. Zuſaz. Da man den Stampfer als ein Stück vom Umfange eines Rades, deſſen Halbmeſſer unendlich groß iſt, betrachten kann, ſo liegt jede wagrechte Linie DC in der Richtung des Halbmeſſers dieſes Bogens, folglich fällt die durch den Mittelpunct B der Welle gezogene wagrechte Linie BC in die Richtung der Centrallinie der Welle und des Stampfers (als Bogen betrachtet), ſoll daher der Anfang des Eingriffes zwiſchen der Heblatte und dem Daumen in dieſer Centrallinie ſtatt haben, ſo müſſen ſich in D dieſelben berühren, alſo die Heblatte CD vom Stampfer bis zu den Umfang der Welle reichen, und den Daumen in D berühren.

III. Zuſaz. Damit die Bewegung wälzend, und die Momente unverändert bleiben, ſo kann man den Heblatten auf ihrer untern Seite die Richtungen CD, EF gerader wagrechter Linien geben, dagegen erhalten die Daumen auf jener Seite, mit welcher ſie die Heblatten ergreifen, die Krümmungen DO, HF, welche entſtehen, wenn ſich ein Theil des Umfanges der Welle abwickelt, ſo iſt HF die durch Abwickelung des Bogens HD erzeugte Linie. (§. 199. III. Zuſ.).

IV. Zuſaz. Die Länge CD, EF einer jeden Heblatte iſt durch die Entfernung des Stampfers vom Umfange der Welle gegeben (II. Zuſ.).

V. Zuſaz. Wenn nebſt dem Halbmeſſer BD der Welle, die Höhe DF, zu welcher ein Stampfer geho-

ben werden ſoll, gegeben iſt, ſo iſt auch der Total-halbmeſſer der Welle, oder $BF = \sqrt{(BD^2 + DF^2)}$, mithin auch die Länge des Daumens $Ff = BF - Bf$ beſtimmt.

VI. Zuſaz. Wenn ein Daumen der Welle die Heblatte des Stampfers im Puncte D der Centrallinie ergreifet, und nun, während ſich die Welle um ihre Axe drehet, dieſelbe vor ſich herſchiebt, ſo berühren ſich beyde immer nur in einem Puncte (III. Zuſ.), mithin iſt für jeden Punct F dieſer Berührung (Fig. 91.) die Seite EF der Heblatte ſtets die Richtung der Tangens für die Curve HF des Daumens; zieht man alſo von D nach dem Berührungspuncte F die gerade Linie DF, ſo iſt ſolche der Evolute DH gleich, und ſteht zugleich als Krümmungshalbmeſſer in F auf der Curve HF ſenkrecht, höhere Geometr. §. 355. I und II. Zuſ.) mithin auch auf der Tangens FE.

VII. Zuſaz. Da jeder Stampfer ſtets die verticale Lage behalten muß (Erklär. c.), ſo bleibt ſtets EF wagrecht, mithin iſt DF lothrecht, und daher die Höhe, zu welcher der Stampfer gehoben wird, während jeder Punct vom Umfang der Welle einen Bogen = DH beſchreibt.

VIII. Zuſaz. Ferner iſt CD parallel zu EF; DF parallel zu CE, mithin EF = CD, das iſt, nur der Endespunct F der Heblatte kömmt immer mit dem Daumen der Welle in Berührung.

IX. Zuſaz. Um jede Stemmung zu verhüten, wird an der Welle noch ein Theil weggenommen, zwiſchen den Daumen, wodurch alſo die Stirn fd der Welle innerhalb den Umfang DH fällt.

§. 209.

Aufgabe. (Fig. 91.)

Bey einer Stampfmühle iſt das Gewicht Q eines Stampfers, ferner deſſen halbe Dicke EA = a, ferner die Länge der Heblatte EF = b, endlich die Entfernung MN = c der beyden Scheidelatten gegeben; man ſuchet die Kraft P, welche am Umfange der Welle der geſammten Laſt das Gleichgewicht hält.

Auflöſung.

1. Der Schwerpunct G des Stampfers, als eines ſenkrechten prismatiſchen Balkens, fällt in die Mitte deſſelben (Reine Mechan. §. 105. VI. Zuſ.), ſo daß die durch die Mitte des Stampfers gezogene ſenkrechte Linie WV die Directionslinie der Schwere iſt (Reine Mechan. §. 93.).

2. Die Kraft P drückt in F auf die Heblatte FE nach der verticalen Richtung FL, alſo parallel zur Directionslinie VW in der Entfernung FE + EA = b + a, weil das Moment der auf den Umfang reducirten Kraft für jede Stelle unveränderlich iſt. (§. 208. III. Zuſ.).

3. Durch dieſe Kraft entſteht demnach auf die obere Scheidelatten in M nach der wagrechten Richtung Mm ein Druck $= \frac{AF}{MN} P$ (Reine Mech. §. 85. III. Zuſaz)

$$= \frac{a+b}{c} P.$$

4. Eben ſo entſteht gegen die untere Scheidelatten nach der Richtung Nn ein Druck $= \frac{a+b}{c}$ P.

5. Durch den ſenkrechten Druck P des Daumens gegen die Heblatte entſteht an dem Berührungspunct F zwiſchen ihnen eine Reibung = μ P, ſo daß alſo μ

den Reibungscoefficienten für die wälzende Bewegung bezeichnet.

6. Dieſe Reibung ſtemmet ſich gegen die Richtung der Bewegung des Daumens nach der Tangens FO.

7. Zur Ueberwindung derſelben muß daher nach dieſer Richtung FO ein Theil der Kraft $= \mu P$ verwendet werden;

8. Dieſe leztere Kraft ſtrebt alſo die Heblatte nach der Richtung FO fortzuziehen, mithin drückt ſolche den Stampfer gegen die Scheldelatten M, N, nach den Richtungen Mm′, Nn.

9. Bezeichnet p den auf N, und p′ den auf M treffenden Antheil, und ſezet man $EN = x$, ſo iſt $EM = c - x$, mithin nach rein. Mechan. §. 15. III. Zuſ.)

10. $p + p' = \mu P$, alſo
$p = \mu P - p'$, und

11. $p' : p = x : c - x$
$p' + p : c = p' : x$ (Arithm. §. 214. I. Zuſ.)
$\mu P : c = p' : x$, alſo

12. $p' = \frac{\mu x P}{c}$, und

13. $p = \mu P - \frac{\mu x P}{c} = \frac{\mu (c-x) P}{c}$ (Nr. 10.)

14. Bezeichnet ferner λ den Reibungscoefficienten für die gleitende Bewegung, ſo entſteht bey M aus dem Druck nach Mm Nr. 3., und dem entgegengeſezten nach Mm′ Nr. 12. eine Reibung

$$= \lambda \left[\frac{a+b}{c} P - \frac{\mu x}{c} P\right]$$

15. Eben ſo entſteht durch den Druck nach eben derſelben Richtung Nn; Nr. 4 und 13. bey N die Reibung

$$\lambda \left[\frac{a+b}{c} P + \frac{\mu (c-x)}{c} P\right]$$

16. Die zur Ueberwindung der Reibung μP zwiſchen der Heblatte und dem Daumen nothwendige Kraft (Nr. 7.) läßt ſich in zwey Seitenkräfte zerlegen nach der Richtung FB, und der auf FO ſenkrechten FL.

17. Erſtere Kraft $= \frac{\mu P \sin. LFO}{\sin. BFL}$ (Reine Mech. §. 53. VII. Zuſ.), wird durch die befeſtigte Wellenaxe in B aufgehoben, vermehret aber die Zapfenreibung der Welle.

18. Leztere Kraft nach FL $= \frac{\mu P. \sin. BFO}{\sin. BFL}$ bleibt.

19. Man ſeze den während der Bewegung veränderlichen Winkel $FBD = \varphi$, ſo iſt, da ſtets FO parallel zu BD, alſo $BFO = FBD = \varphi$,

$$\sin. BFO = \sin. \varphi$$

20. Ferner $BFL = BFO + OFL = BFO + 90^\circ$ (N. 16.)

$$= \varphi + 90^\circ, \text{ mithin}$$

$$\sin. BFL = \cos. \varphi .$$

21. Sezet man dieſe Werthe in die Gleichung N. 18. ſo iſt die nach der Richtung FL nothwendige Seitenkraft $= \frac{\mu. P. \sin. \varphi}{\cos \varphi} = \mu. P \text{ tang. } \varphi$

22. Soll nun P die auf den Umfang der Welle reducirte Geſammtkraft ausdrücken, ſo muß ſolche dem Gewichte Q des Stempels, den Reibungen an den Scheidelatten Nr. 14 und 15., und der Kraft Nr. 21. zuſammen das Gleichgewicht halten, mithin wird

$$23.\ P = Q + \lambda \left[\frac{a+b}{c} - \frac{\mu x}{c}\right] P + \lambda \left[\frac{a+b}{c} + \frac{\mu (c-x)}{c}\right] P + \mu P \text{tang.} \varphi$$

$$= Q + \lambda \left[\frac{2(a+b) + \mu (c-2x)}{c} + \mu \text{ tang.} \varphi\right] P$$

$$P \left[1 - \lambda \frac{2(a+b) + \mu (c-2x)}{c} - \mu \text{ tang.} \varphi\right] = Q, \text{ und}$$

$$24.\ P = Q : \left[1 - \lambda \frac{2(a+b) + \mu(c-2x)}{c} - \mu \tang.\varphi\right]$$

I. Zuſaz. Bezeichnet F die Größe der Reibung auf den Umfang der Welle reducirt, ſo iſt:

$$F = P - Q = \frac{Q}{1 - \lambda \frac{2(a+b) + \mu(c-2x)}{c} - \mu \tang.\varphi} - Q$$

$$= \left[\lambda \frac{2(a+b) + \mu(c-2x)}{c} - \mu \tang.\varphi\right] Q$$

II. Zuſaz. Die Reibung nimmt alſo mit $a+b$ ab, man muß daher die Heblatte b ſo kurz als möglich machen, alſo den Stampfer an die Welle ſo nahe bringen (§. 208, IV. Zuſ.) als es angeht.

III. Zuſaz. Je größer c, und je kleiner dagegen $c-2x$ iſt, deſto geringer wird die Reibung, man muß daher die Entfernung c, der beyden Scheidelatten, und die Entfernung CN. (Fig. 90.) der untern Scheidelatte von der Heblatte, wenn der Stampfer in Ruhe iſt, ſo groß annehmen, als es angeht, ohne daß bey der Erhebung des Stampfers die Heblatte an der obern anſtößt und dadurch im Steigen gehindert wird.

IV. Zuſaz. Während der Stampfer gehoben wird, bleibt die Reibung nicht unveränderlich, ſie nimmt nemlich ab, wenn die Größe x, und der Winkel φ wächst, und iſt am kleinſten, wenn der Stampfer ſeine größte Höhe erreichet hat.

V. Zuſaz. Werden mehrere Stampfer nach einander von der Daumenwelle ſo ergriffen, daß bis zur erfolgten Auslöſung des zuerſt ergriffenen Stampfers bereits n Stampfer in Bewegung geſezet ſind, und allemal bey Auslöſung eines Stampfers ſogleich ein

anderer dafür ergriffen wird, ſo ſind immer gleichzeitig n Stampfer in Bewegung, die für jeden einzelnen Stampfer am Umfange der Welle nothwendige Kraft iſt Nr. 24. beſtimmt, alſo eine veränderliche Größe, indeſſen je größer die Anzahl n iſt, deſto mehr gleichen ſich dieſe Werthe gegeneinander aus, ſo daß ſich die Totalkraft, das iſt, die Summe aller dieſer Kräfte als eine beſtändige Größe betrachten läßt, die man erhält, wenn man die mittlern Werthe von x und φ ſezet, und dann die Totalkraft

$$P = nQ : \left[1 - \lambda \frac{2(b+c) - \mu(c-2x)}{c} - \mu \tan g.\, \varphi\right]$$ ſezet.

VI. Zuſaz. Da ſich der Reibungscoefficent μ (§ 78. VI. Zuſ.) für die Reibung zwiſchen den Heblatten und Daumen nicht zuverläßig angeben läßt, ſo kann man dafür den Reibungscoefficienten der gleitenden Bewegung ſezen.

§. 210.

Erklärung. (Fig. 92.)

Wenn ein wagrechter Hammer GBD um ſeine Unterlage B ſich drehen läßt, und eine wagrechte mit Daumen verſehene Welle (§. 208. d.) bey ihrem Umdrehen denſelben in D ergreifet, mithin auf der einen Seite BD abwärts drückt, alſo dadurch auf der andern Seite BG den Hammer zu einer gewiſſen Höhe erhebet, von welcher er dann mittels ſeiner eigenen Schwere in ſeine erſte wagrechte Lage wieder herabfällt, ſo heißt die Vorrichtung ein Hammerwerk.

I. Zuſaz. Wenn ſich der Hammer um ſeine Unterlage B drehet, beſchreibet BD einen Kreisbogen; man kann daher BD als den Halbmeſſer eines Rades

betrachten, welches in der Centrallinie AB bey D, wo ihr Umfang jenen der Welle berührt, vom leztern ergriffen wird; giebt man alſo nach §. 199. dem Arm des Hammers die Form einer geraden Linie BD, hingegen der Seite des Daumens, welche damit in Berührung kömmt, die Form einer äuſſern Epicycloide DF, welche der aus C mit CD $=\frac{1}{2}$BD gezogene Kreis beſchreibet, indem er ſich auf dem Umfange der Welle fortwälzet, ſo iſt das Moment der Kraft während der Berührung ſtets unveränderlich, und die Bewegung ſelbſt wälzend.

II. Zuſaz. In der Zwiſchenzeit, wo nemlich der Hammer herabfällt, und die Welle mit keinem Hammer in Berührung iſt, alſo keine Laſt zu heben hat, wird nothwendig die Bewegung beſchleunigt, alſo der Gang der Maſchine ungleichförmig, dieſe Ungleichförmigkeit zu vermindern muß man mit der Welle ein Schwungrad verbinden (§. 19.).

III. Abſchnitt.

Von der Verbindung eines Stirnrades mit einem Trilling.

§. 211.

Aufgabe. (Fig. 93.)

Ein Sternrad, deſſen Halbmeſſer AD $=$ R gegeben iſt, ſoll einen Trilling, deſſen Halbmeſſer BD $=$ r ebenfalls gegeben iſt, in Bewegung ſezen, der Eingriff ſoll ferner in dem Punct D, wo der Umfang des Rades jenen des Trillings berühret, alſo in der Central-

linie AB anfangen, man ſucht die Beſchaffenheit eines jeden Radzahns, damit das Moment für jede Stelle des Eingriffes unverändert bleibt, wenn man indeſſen von der Dicke der Triebſtöcke vollkommen abſtrahirt, und ſolche als gerade Linien betrachtet, welche an dem Umfange des Trillings zur Axe deſſelben parallel in gleichen Abſtänden vertheilet ſind.

Auflöſung.

Man gebe der Seite des Radzahns, welche den Triebſtock ergreifet, die Krümmung DF einer äuſſern Epicycloide (höhere Geom. §. 360.), welche ein Kreis, deſſen Halbmeſſer BD jenem des Trillings gleich iſt, dadurch beſchreibt, daß er ſich auf der äuſſern Seite des Umfanges YZ vom Rade wälzet, verbinde jeden ſolchen Zahn mit dem Rade ſo, daß er in deſſen Ebene liegt, aber ganz über deſſen Umfang hervorraget, ſo entſpricht er der gegebenen Bedingung, daß nemlich die Momente für jede Stelle der Berührung unverändert bleiben.

Beweis.

1. Die Axen des Rades und Trillings ſind parallel (§. 197. c.), es kömmt alſo von beyden nur wieder ein Querſchnitt in Betrachtung (§. 197. III und IV. Zuſ.) und daher ſind in einem ſolchen Querſchnitte die Triebſtöcke nur Puncte, alſo innere Epicycloiden, welche obiger Erzeugungskreis beſchreibet, in dem er ſich auf der innern oder hohlen Seite des Umfanges vom Trilling wälzet (höhere Geometr. §. 362. III. Zuſ.).

2. Bezeichnet P die auf den Umfang des Rades reducirte Kraft, ſo iſt PR ihr Moment, mit welcher

ſie das Rad in D um ſeine Axe A, alſo nach der Richtung der Tangens zu drehen ſtrebt.

3. Nun enſpricht im Berührungspunct D dem Rade und Trilling einerlei Tangens (Geom. §. 111. II. Zuſ.), mithin

4. drückt der Radzahn DF in D auf den Triebſtecken nach der auf BD ſenkrechten Richtung mit der Kraft P, folglich iſt

5. das Moment dieſer Kraft in Beziehung auf den Trilling $= P.BD = P.r$

6. Kömmt nun durch die Umdrehung des Rades der Zahn DF in die Lage NO, ſo wird nothwendig auch der Triebſtock mit fortgeſchoben;

7. Nimmt man am Trilling, welcher zugleich der erzeugende Kreis iſt (Auflöſ.), den Bogen $DM =$ dem Bogen DN des Rades, ſo iſt M ein Punct des Radzahns (höhere Geom. §. 358. III. Zuſ.), alſo die Stelle des ergriffenen Triebſtockes.

8. Man ziehe die gerade Linien AM, BM, DM, ſo iſt leztere die Richtung der Normal der Curve NO in M (höhere Geometr. §. 364.).

9. Man verlängere BM und DM nach b und d, errichte auf AM die ſenkrechte MG, und eben ſo auf Bb in M den Perpendikel ME, ſo iſt

10. in M der Kraft P an D (Nr. 2.) die Kraft $\frac{P.R}{AM}$ nach der Richtung MG gleichgeltend (§. 171. III. Zuſ.) das iſt

11. Der Radzahn drückt in M nach der Richtung MG auf den Triebſtock mit einer Kraft $= \frac{P.R}{AM}$

12. Man zerlege dieſe Kraft in zwey Seitenkräfte nach der Richtung MA, und der verlängerten Normal Md.

13. Erſtere Kraft nach $MA = \frac{P.R.\sin.dMG}{AM\sin.AMd}$ (Reine Mech. §. 53. VII. Zuſ.) wird durch die in A befeſtigte Axe des Rades aufgehoben, und vermehret dadurch die Zapfenreibung.

14. Leztere nach $Md = \frac{P.R.\sin.AMG}{AM.\sin.AMd} = \frac{P.R}{AM\sin.AMd}$ (Nr. 9.) $= \frac{P.R}{AM\sin.AMD}$ (Trigon. §. 291.) iſt wirkſam.

15. Im Dreyecke AMD iſt nun

$AM : AD = \sin.ADM : \sin.AMD$, mithin

$AM\sin.AMD = AD.\sin.ADM = R\sin.ADM$

dieſer Werth in der lezten Gleichung (Nr. 14.) ſubſtituirt, giebt

16. die Seitenkraft nach $Md = \frac{P.R}{R\sin.ADM} = \frac{P}{\sin.BDM}$.

17. Die Richtung Md iſt aber auf den Halbmeſſer BM des Trillings ſchief, man zerlege ſie abermal in zwey Seitenkräfte nach der Richtung des Halbmeſſers Mb, und der auf leztern ſenkrechten ME, ſo iſt

18. die Kraft nach $Mb = \frac{P.\cos.bMd}{\sin.BDM}$ (R. M. §. 53. IX. Zuſ.), und wird in B durch die befeſtigte Trillingsaxe aufgehoben, vermehret aber die Zapfenreibung.

19. Die Kraft nach $ME = \frac{P\sin.bMd}{\sin.BDM}$ drückt nun auf BM ſenkrecht, mithin iſt

20. ihr $Moment = \frac{P.r.\sin.bMd}{\sin.BDM}$

21. Nun iſt BM = BD = r, alſo
der Winkel BDM = BMD = bMd, mithin
sin. BDM = sin. bMd, folglich

22. $\frac{P.r.\sin.bMd}{\sin.BDM} = P.r$ wie Nr. 5, ſo daß alſo
für jede Stelle das Moment der Kraft unverändert bleibt, folglich die angegebene Form des Radzahns den Bedingungen entſpricht.

I. Zuſaz. Für einen unendlich großen Halbmeſſer des Rades, das iſt, wenn eine gerade gezähnte Stange einen Trilling in Bewegung ſezen ſoll, gilt die nemliche Aufloͤſung, nur verwandelt ſich die äuſſere Epicycloide DF in eine Cycloide (hoͤhere Geom. §. 358. I. Zuſ.).

II. Zuſaz. Bringt man die Dicke der cylindriſchen Triebſtoͤcke in Anſchlag, ſo bildet jeder Triebſtock im Querſchnitt einen Kreis, bekoͤmmt nun der Radzahn eine ſolche Krümmung nmo, daß ſolcher allemal den Umfang eines Triebſtockes in einem Puncte m berühret, welcher in die gezogene Sehne DM fällt, ſo bleiben ebenfalls die ſtatiſchen Momente für jede Lage ihrer Berührung unveränderlich; denn

die Curve nmo berühret immer nur (per hyp.) den Umfang des Triebſtockes in einem Punct, mithin entſpricht ihnen allemal eine gemeinſchaftliche Tangens (Geom. §. 111. II. Zuſ.), alſo auch eine gemeinſchaftliche Normal, da nun DM jedesmal durch den Mittelpunct M des Triebſtockes und der Construction gemäß durch den Berührungspunct m geht, ſo iſt ſolche die Normal für den Umfang des Triebſtockes, alſo auch der Curve nmo.

Zieht

Zieht man die gerade Linie Am, und durch m auf ſie die ſenkrechte mg, ſo iſt die auf den Punct m nach der Richtung mg reducirte Kraft $P = \frac{P.R}{Am}$ wie Nr. 10. Dieſe Kraft läßt ſich ebenfalls in zwey Seitenkräfte nach der Richtung $mA = \frac{P.R.sin.dmg}{Am.sin.Amd}$, die aber in A aufgehoben wird, und

nach der Richtung der Normal $md = \frac{P.R sin.Amg}{Am sin.Amd}$ $= \frac{P.R}{Am sin.AmD}$ wie Nr. 13 und 14. zerlegen.

Ferner iſt im Dreyecke AmD:

$Am : AD = sin.ADm : sin.AmD$, mithin $Am.sin.AmD = AD.sin.ADm = R sin.ADM = R sin.BDM$ folglich die Kraft nach der Richtung der Normal md oder $\frac{P.R}{Am sin.AmD} = \frac{P.R}{R sin.BDM} = \frac{P}{sin.BDM}$ wie N. 16. Nun liegt endlich der Punct M in der Richtung md dieſer Kraft, mithin iſt's gerade ſo, als wirkte ſie nach eben dieſer Richtung Md unmittelbar in M (R. Mech. §. 4. IV. Zuſ.), folglich gelten alle Schlüſſe Nr. 17-22, ſo daß alſo das Moment in m für den Trilling eben daſſelbe, wie im Punct D der Centrallinie, allemal $= P.r$ bleibt.

III. Zuſaz. Um die einem Radzahn nothwendige Krümmung nmo bey einer gegebenen Dicke der Triebſtöcke zu ertheilen (Fig. 94.), ſo gebe man anfänglich dem Triebſtock eine ſolche Lage, daß deſſen Mittelpunct in den Berührungspunct D der Centrallinie fällt, der Punct d, in welchem der Umfang des Triebſtockes den Umfang des Rades ſchneidet, iſt der Anfangspunct

der geſuchten Curve; — drehet man nun das Rad und den Trilling um einen beliebigen, aber gleichen Bogen, wodurch der Punct D am Rade nach N, der Punct d nach n, und der Mittelpunct des Triebſtocks nach M gelangt, und der Bogen DN = dem Bogen DM iſt, zieht in dieſer Lage die Sehne DM, ſo giebt ihr Durchſchnittspunct m mit dem Umfange des Triebſtockes einen zweyten Punct der geſuchten Curve nmo. Auf ähnliche Art kann man eine beliebige Anzahl ſolcher Puncte beſtimmen, und dadurch die Curve ſelbſt verzeichnen.

IV. Zuſaz. Da die Mittelpuncte der Triebſtöcke in dem Umfange des Trillings liegen, alſo um eine ihren Halbmeſſer ϱ gleiche Weite über denſelben hervorragen, ſo muß zwiſchen zweyen Radzähnen allemal eine ſolche Vertiefung innerhalb den Umfang des Rades gemacht werden, daß die Triebſtöcke ohne Stemmung eingreiffen können.

V. Zuſaz. Für den Trilling iſt deſſen Halbmeſſer die Entfernung des Mittelpunctes eines jeden Triebſtockes vom Mittelpuncte der Axe des Trillings, oder r = BD = BM. Für das Rad hingegen iſt deſſen Halbmeſſer die Entfernung der beyden Mittelpuncte A und B weniger dem Halbmeſſer des Trillings, oder R = AB - BD = AB - r = AD.

VI. Zuſaz. Soll der Trilling ein Stirnrad in Bewegung ſezen, ſo bleibt die ganze Vorrichtung unverändert, nur ergreifet jedesmal der Triebſtock den Radzahn in m vor der Centrallinie, und verläßt ſolchen wieder in d, wo nemlich der Mittelpunct des Triebſtockes in den Punct D der Centrallinie fällt. Da

dieſe Bewegung gegen die Faſern der Radzähne erfolgt, alſo eine größere Reibung verurſacht, ſo iſt ſie nicht ſo vortheilhaft, als in dem umgekehrten Falle, wo der Trilling vom Rade in Bewegung geſezet wird.

VII. Zuſaz. Bey der Verbindung eines Stirnrades mit einem Trilling, wenn M die Anzahl der Zähne am Rade, und m die Anzahl der Triebſtöcke bezeichnen, iſt wieder: $m : M = r : R$ wie §. 203. und der Winkel $DBM = \varphi = \frac{360^\circ}{m}$

VIII. Zuſaz. Aus den gegebenen Halbmeſſern R, r, ϱ des Sternrades, Trillings, und der Triebſtöcke (Fig. 93) läßt ſich die nothwendige Länge eines Radzahns beſtimmen, wenn ſolcher den ergriffenen Triebſtock hinter der Centrallinie in dem Momente bey m verlaſſen ſoll, wo der nächſtfolgende Zahn, den nächſtfolgenden Triebſtock, deſſen Mittelpunct in die Centrallinie bey D fällt, ergreifet. Denn $DBM = \varphi = \frac{360^\circ}{m}$; ferner iſt im gleichſchenklichten Dreyecke DBM,
$DM = 2.BD \sin.\frac{1}{2}\varphi$ (Trig. §. 327.) $= 2r\sin.\frac{1}{2}\varphi$, und
$Dm = DM - Mm = 2r\sin.\frac{1}{2}\varphi - \varrho$
Zieht man von B auf DM die ſenkrechte BC, ſo iſt der Winkel $BDM = BDm = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, mithin
$ADm = 180^\circ - BDm = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$, und
$\cos.\ ADm = -\sin.\frac{1}{2}\varphi$

Endlich iſt im Dreyecke AmD:
$Am^2 = AD^2 + Dm^2 - 2AD.Dm\cos.ADm$ (Trig. § 338. II.)
$= R^2 + (2r\sin.\frac{1}{2}\varphi - \varrho)^2 + 2R(2r\sin.\frac{1}{2}\varphi - \varrho)\sin.\frac{1}{2}\varphi$
wodurch Am, mithin auch die nothwendige Länge eines Zahnes $= Am - R$ beſtimmt iſt.

§. 212.

Aufgabe. (Fig. 93.)

Ein Stirnrad ſezet einen Trilling in Bewegung, man ſuchet die Größe F der Kraft, welche, auf den Umfang des Rades reducirt, der Reibung zwiſchen dem eingreifenden Radzahn und ergriffenen Getriebſtock das Gleichgewicht hält.

Auflöſung.

1. Der Eingriff geſchieht, wenn ſich der Mittelpunct des Triebſtockes in der Centrallinie bey D befindet, drehet ſich nun das Rad um den beliebigen Bogen DN, ſo wird auch der Punct D des Trillings einen eben ſo großen Bogen DM hinterlegen, und Zahn und Triebſtock ſich im Puncte m hinter der Centrallinie berühren.

2. Man verlängere die Centrallinie bis K, ziehe die geraden Linien AM, Am, und auf leztere die ſenkrechte mg, den Halbmeſſer des Trillings BM, die Sehnen KM, DM, ſo iſt der Winkel DMK = 90° (Geom. §. 72. III. Zuſ.), und der Berührungspunct m fällt in die Linie DM (§. 211. II. Zuſ.).

3. Der Winkel MKA = MKB = $\frac{1}{2}$ MBD (Geom. §. 72.).

4. Sezet man den Winkel MBD als eine während der Umdrehung veränderliche Größe = ω, ſo iſt
MKA = $\frac{1}{2}\omega$, und
BDM = 90° - $\frac{1}{2}\omega$, (Geom. §. 47. IV. Zuſ.), alſo

5. sin. MKA = sin. $\frac{1}{2}\omega$, und
sin. BDM = cos. $\frac{1}{2}\omega$.

6. Ferner iſt DM die dem Umfange des Triebſtockes, und Krümmung nmo des Radzahns im Berüh-

rungspuncte m gemeinſchaftliche Richtung der Normal (§. 211. II. Zuſ.), errichtet man alſo durch m auf Dm die ſenkrechte Ll, ſo iſt ſie die gemeinſchaftliche Tangens für den Zahn und Triebſtock.

7. Bezeichnet nun P′ jenen Theil der Kraft, welche am Umfange des Rades zur Bewegung des Trillings ohne Rückſicht auf die Reibung des Zahns und Triebſtocks nothwendig iſt, ſo iſt die Totalkraft

$$P = P' + F.$$

8. Durch die Totalkraft P entſteht am Berührungspunct m ein Druck nach der Richtung der Normal $md = \frac{P}{\sin. BDM}$ (§. 211. II. Zuſ.) $= \frac{P}{\cos. \frac{1}{2}\omega}$ (Nr. 5.), und dadurch

9. eine Reibung $= \frac{\mu P}{\cos. \frac{1}{2}\omega}$, wo μ den Reibungscoefficienten bezeichnet.

10. Wenn das Rad ſeine Umdrehung fortſezet, ſo bewegt ſich die gerade Linie Am nach der Richtung mg (Nr. 2.).

11. Zerlegt man dieſe Bewegung in zwey Seitenbewegungen nach den Richtungen der Normal md, und der Tangens ml (Reine Mechan. § 61.), ſo ſteht erſterer Bewegung die Reibung nicht entgegen, aber gegen leztere ſtemmet ſie ſich, und äuſſert ſich

12. als Kraft $= \frac{\mu . P}{\cos \frac{1}{2}\omega}$ (Nr. 9.) nach der entgegengeſezten Richtung mL (§. 56. I. Zuſ.).

13. Zerlegt man dieſe Kraft in zwey Seitenkräfte nach der Richtung ma, und der auf leztern ſenkrechten mχ, ſo wird

14. die Seitenkraft nach $ma = \frac{\mu . P}{\cos. \frac{1}{2}\omega} \sin. Lm\chi$ (Reine Mech. §. 53. IX. Zuſ.) durch die feſte Axe des

Rades in A aufgehoben, und vermehret daſelbſt die Zapfenreibung.

15. Leztere nach der Richtung $m\gamma = \frac{\mu . P}{\cos . \frac{1}{2}\omega} \cos . Lm\gamma$ bleibt wirkſam, und der Richtung der Kraft mg am Rade gerade entgegengeſezt.

16. Nun iſt $Lm\gamma + \gamma mD = 90^\circ$ (Nr. 6.) $= \gamma mD + DmA$ (Nr. 13.), alſo $Lm\gamma = DmA = AMD + MAm$ (Geom. §. 47. VII. Zuſ.).

Der Winkel MAm iſt allemal ſehr klein, man kann daher ohne merklichen Fehler
$Lm\gamma = AMD = AMK - DMK = AMK - 90^\circ$ (Nr. 2.) ſezen, mithin iſt

17. $\cos . Lm\gamma = \sin . AMK$.

18. Ferner iſt im Dreyecke AMK:
$AM : AK = \sin . AKM : \sin . AMK$, oder
$AM : AD + DK = \sin . \frac{1}{2}\omega : \cos . Lm\gamma$ (Nr. 5 und 17.), alſo

19. $\cos . Lm\gamma = \frac{(AD+DK)\sin . \frac{1}{2}\omega}{AM} = \frac{(R+2r)\sin . \frac{1}{2}\omega}{AM}$

wenn wieder R, r die Halbmeſſer des Stirnrades und des Trillings bezeichnen.

20. Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 15., ſo wird

$$\frac{\mu . P}{\cos . \frac{1}{2}\omega} \cos . Lm\gamma = \frac{\mu P(R+2r)\sin \frac{1}{2}\omega}{AM \cos . \frac{1}{2}\omega} = \frac{\mu P(R+2r)\text{tang} . \frac{1}{2}\omega}{AM}.$$

21. Das Moment dieſer Kraft in m iſt alſo

$$= Am . \frac{\mu P(R+2r(\text{tang} . \frac{1}{2}\omega}{AM} = \mu P (R+2r) \text{tang} . \frac{1}{2}\omega$$

indem Am von AM ſehr wenig unterſchieden iſt.

22. Soll nun mit dieſer Kraft am Umfange des Rades die Kraft F im Gleichgewichte ſtehen, ſo muß

ihr Moment F.R dem vorhergehenden gleich ſeyn, alſo wird

$$23.\quad F.R = \mu P (R + 2r)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega$$
$$= \mu (P' + F)(R + 2r)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega \quad (\text{Nr. } 7.)$$

$$F\left[R - \mu (R + 2r)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega\right] = \mu (R + 2r)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega\, P',$$

folglich

$$24.\quad F = \frac{\mu (R + 2r)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega}{R - \mu (R + 2r)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega}\, P'$$

I. Zuſaz. Bezeichnen m, M die Anzahl der Triebſtöcke, und Radzähne, ſo iſt $m : M = r : R$ (§. 211. VII. Zuſ.), mithin $R = \frac{r}{m} M$

Ferner: $2m : M = 2r : R$, alſo
$M + 2m : R + 2r = 2m : 2r = m : r$ (Arithm. §. 214. I. Zuſ.) folglich $R + 2r = (M + 2m)\,\frac{r}{m}$.

Sezet man dieſe Werthe in die Gleichung Nr. 24. ſo wird

$$F = \frac{\mu (M + 2m)\frac{r}{m}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega}{M\frac{r}{m} - \mu (M + 2m)\frac{r}{m}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega}\, P'$$

$$= \frac{\mu (M + 2m)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega}{M - \mu (M + 2m)\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega}\, P'$$

II. Zuſaz. Die Reibung zwiſchen den Zähnen und Triebſtöcken iſt alſo um ſo größer, je größer die Laſt P′ iſt, die am Trilling überwältiget werden muß, und je größer der Halbmeſſer des Trillings in Beziehung auf den Halbmeſſer des Rades, oder je größer die Anzahl der Triebſtöcke in Beziehung auf die Anzahl der Radzähne iſt.

III. Zuſaz. Während ſich ein Zahn und Triebſtock berühren, nimmt die Reibung mit dem Winkel ω

zu, das iſt, je weiter ſich der Zahn und Triebſtock von der Centrallinie entfernen, deſto größer wird die Reibung. In der Centrallinie, wo der Radzahn den Triebſtock ergreifet, iſt $\omega = 0$, alſo auch die Reibung $= 0$; am Ende der Berührung wo $\omega = \varphi = \frac{360°}{m}$ (§ 211 VI. Zuſ.) iſt ſie am größten.

IV. Zuſaz. Für $M = 52$, $m = 6$, $P' = 100$ ℔., und $\mu = \frac{1}{6}$ iſt $\varphi = \frac{360°}{m}$, $= \frac{360°}{6} = 60°$, alſo $\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\varphi = 30°$, folglich am Ende der Berührung

$$\begin{array}{ll} \log. (M + 2m) = \log. 64 & = 1{,}8061800 \\ \log. \text{tang}. 30° & = 9{,}7614394 - 10 \\ \hline \log. (M + 2m) \text{tang}. \frac{1}{2}\omega & = 1{,}5676194 \\ \log. \mu & = - 0{,}7781513 \\ \hline \log. \mu (M + 2m) \text{tang}. \frac{1}{2}\omega = & 0{,}7894681 \end{array}$$

mithin

$$\mu (M + 2m) \text{tang}. \tfrac{1}{2}\omega = 6{,}1584$$

$$M - \mu (M + 2m) \text{tang}. \tfrac{1}{2}\omega = 45{,}8416,$$

folglich

$$F = \frac{6{,}1584}{45{,}8416} P' = 0{,}13434\, P' = 13{,}434 \text{ ℔}.$$

V. Zuſaz. Durch die Seitenkraft nach der Richtung $mA = \frac{P.R \sin. dmg}{Am. \sin. Amd} = \frac{P \sin. dmg}{\sin. BDM}$ (§. 211. II. Zuſ.) entſteht gegen die Axe des Rades ein Druck, mithin an ihren Zapfen eine Reibung.

Sezet man die veränderlichen Centriwinkel $DBM = \omega$, $DAM = \zeta$, ſo iſt $\sin. BDM = \cos. \frac{1}{2}\omega$ (Nr. 5.).

$Amd = ADM + DAm$, und

$AMd = ADM + DAm + mAM$.

Nun iſt allemal mAM ſehr klein, ſo daß man

$Amd = AMd$, mithin

$dmg = Amd - Amg = Amd - 90° = AMd - 90° =$
$= AMd - AMG = dMG$ ſezen kann.

Ferner iſt: $dMG + dM\alpha = 90° = dM\alpha + \alpha MB$, mithin dMG, oder $dmg = \alpha MB = ABM + BAM = \omega + \zeta$, alſo $\sin. dmg = \sin. (\omega + \zeta)$, folglich der Druck auf die Axe des Rades, oder

$\frac{P. \sin. dmg}{\sin. BDM} = \frac{P. \sin. (\omega + \zeta)}{\cos. \frac{1}{2} \omega}$, und die Zapfenreibung am Rade $= \frac{\lambda P \sin. (\omega + \zeta)}{\cos. \frac{1}{2} \omega}$ iſt eine veränderliche Größe, welche mit der Entfernung der Berührungspuncte von der Centrallinie zunimmt.

VI. Zuſaz. Eben ſo verurſachet die Seitenkraft nach der Richtung $Mb = \frac{P. \cos. bMd}{\sin. BDM}$ (§. 211. Nr. 18.) einen Druck der Trillingszapfen gegen ihre Lager.

Nun iſt $bMd = BMD = BDM = 90° - \frac{1}{2}\omega$ (Nr. 4.); mithin $\cos. bMd = \sin. \frac{1}{2}\omega$, und $\sin. BDM = \cos. \frac{1}{2}\omega$, alſo $\frac{P. \cos. bMd}{\sin. BDM} = \frac{P \sin. \frac{1}{2}\omega}{\cos. \frac{1}{2}\omega} = P. \text{tang.} \frac{1}{2}\omega$, und die verurſachte Reibung an den Zapfen des Trillings $= \lambda P \text{ tang.} \frac{1}{2}\omega$ iſt ebenfalls eine veränderliche Größe.

VII. Zuſaz. Wird alſo ein Sternrad mit einem Trilling in Verbindung gebracht, ſo muß auſſer der Zapfenreibung, welche beym Rade und Trilling durch die Laſt, und dem Gewichte des Rades und Trillings entſpringt, die durch die Kraft P erzeugte Zapfenreibung am Rade (V. Zuſ.) und Getriebe (VI. Zuſ.) und endlich noch die Reibung zwiſchen dem eingreiffenden Radzahn und Triebſtock (I. Zuſ.) in Anſchlag gebracht werden.

Anmerk. Die bisher angeführte Anordnung hat allerdings große Vorzüge, allein, auſſer dem, daß wegen der veränderlichen Reibung während des Eingriffes doch eine kleine Ungleichförmigkeit der Bewegung nicht verhindert werden kann, ſo iſt die Ausführung der bisher angeführten Construction der Zähne äuſſerſt ſchwer; ich halte es daher für nüzlich, die in England gewöhnliche Form, welche mir Hr. Salinenrath von Reichenbach mittheilte, hier zu erklären, dieſe Form, wenn ſie ſchon nicht die Foderungen §. 196. II. Zuſ. befriedigt, gewähret doch einen ſehr ſchönen Eingriff, und da ſie aus bloßen Kreisbögen beſtehet, ſo iſt ſie leicht ausführbar.

§. 213.

Beſchreibung eines Stirnrades und Getriebes, deren Zähne ſich durch bloße Kreisbögen construiren laſſen. (Fig. 88.)

1. Der Bogen XDV ſtellet einen Theil des Umfanges vom Stirnrade, und AD den Halbmeſſer desſelben vor, mithin iſt jeder Radzahn ſo gebildet, daß deſſen oberer Theil DFIH über den Umfang hervorraget, und der untere Theil DCLH innerhalb den Umfang liegt.

2. Eben dieſes gilt von jedem Zahne des Getriebes, der obere Theil DGKM liegt über, und der untere Theil EDMN inner dem Umfange des Getriebes.

3. Zieht man am Umfange des Rades die Sehnen DH, HO, ſo iſt erſtere die Breite des Zahns, und leztere die Breite einer Zwiſchenweite, die einander gleich ſind.

4. Eben ſo iſt am Getriebe die Sehne oder Breite DM eines Zahnes, der Breite MS einer Zwiſchenweite gleich, und

5. die Zähne am Getriebe und ihre Zwiſchenwei- ten haben mit jenem am Rade gleiche Breite, das iſt, DH = HO = DM = MS.

6. Die gemeinſchaftliche Breite eines Rad- und Getriebzahns iſt auch ihre gemeinſchaftliche Höhe, ſo daß ac = df = DM = DH, und die eine Hälfte der- ſelben für den obern, die andere für den untern Theil eines Radzahns gehört, alſo ab = bc = $\frac{1}{2}$ DH, und eben ſo dc = cf = $\frac{1}{2}$ DM iſt.

7. Trägt man alſo auf dem Halbmeſſer Ab des Rades von b aus die Längen bc = ba = $\frac{1}{2}$ DH, und beſchreibet aus A mit Ab, Aa, Ac concentriſche Kreiſe, ſo bildet erſterer den Umfang des Rades XDV (Nr. 1.), und zwiſchen den beyden leztern ſtehen die Zähne des Rades, ſo daß

8. Aa der urſprüngliche, Ab der wahre, und Ac der Total-Halbmeſſer des Rades iſt. (§. 200.)

9. Trägt man eben ſo auf dem Halbmeſſer Be des Getriebes aus e die Längen de = ef = $\frac{1}{2}$ DM = $\frac{1}{2}$ DH auf (Nr. 6.), und beſchreibt aus B mit Be, Bd, Bf concentriſche Kreiſe, ſo bildet erſterer den Um- fang des Getriebes, und zwiſchen den beyden andern ſtehen die Zähne, ferner iſt

10. Bd der urſprüngliche, Be der wahre, und Bf der Total-Halbmeſſer des Getriebes.

11. Die Form eines Radzahns beſteht an dem un- tern Theil, aus den geraden Linien HL, DC, welche von H, D nach den Mittelpunct A vom Umfange des Rades bis an die Stirn deſſelben gezogen werden, und an dem obern Theil aus den Kreisbögen HI, DF,

welche aus D und H mit der Oeffnung DH verzeichnet ſind.

12. Ganz eben dieſelbe Form hat jeder Getriebzahn, den unteren Theil begränzen die geraden Linien DE, MN, von D, M gegen den Mittelpunct B zu, bis an die Stirn des Getriebes, und den obern Theil begränzen die aus D, und M mit der Oeffnung DM gezogenen Bögen MK, DG.

13. Bey dieſer Form der Radzähne ſind daher die Triebſtöcke am Trillinge nie cylindriſch.

I. Zuſaz. Durch den Halbmeſſer AD des Rades und durch die Breite DH eines Zahns iſt, nach der eben angeführten Beſchreibung, die Construction eines Radzahnes vollkommen beſtimmt. Denn man verzeichne mit AD einen Kreis, und trage auf ſelben von D aus die Sehne DH auf, halbiere den dadurch beſtimmten Bogen (Geom. §. 73.) durch den Halbmeſſer Ab, nehme auf leztern aus b die Längen bc = ba = $\frac{1}{2}$ DH, und beſchreibe noch mit Aa, Ac zwey Kreiſe (Nr. 7 und 8.), ziehe endlich nach A zu die geraden Linien DC, HL vom Umfange bis an die Stirn des Rades, und aus D, H mit der Oeffnung DH die Kreisbögen HI, DF (Nr. 11.), ſo iſt die Construction des Radzahns CDFIHL vollendet.

II. Zuſaz. Eben ſo iſt durch den Halbmeſſer BD des Getriebes, und Breite DM eines Zahns die ganze Form des leztern beſtimmt.

§. 214.

Aufgabe. (Fig. 88.)

Für ein Sternrad und Getrieb ſind

I. entweder ihre Halbmeſſer und Breite ihrer Zähne, oder

II. die Anzahl der Zähne nebſt ihrer Breite, oder

III. die Anzahl der Zähne nebſt der Centrallinie gegeben, man ſoll die zum Eingriff nothwendige Form der Zähne beſtimmen.

Aufloͤſung des I. Falles.

Durch den Halbmeſſer des Rades und Getriebes, nebſt der gemeinſchaftlichen Breite eines Zahns iſt nach §. 213. I und II. Zuſ. alles uͤbrige zur Construction nothwendige vollkommen beſtimmt.

Aufloͤſung des zweyten Falles.

1. Man ſeze der Kuͤrze wegen fuͤr das Rad

deſſen Halbmeſſer AD = Ab = R

die Anzahl der Zaͤhne = M

die Breite eines Radzahns, und die gleiche Breite einer Zwiſchenweite, das iſt, die Sehne DH = der Sehne HO = c

den Centriwinkel DAH = α, ſo iſt

2. Im gleichſchenklichten Dreyecke DAH

$\alpha = \frac{1}{2}DAO = \frac{1}{2}\,\frac{360^\circ}{M} = \frac{180^\circ}{M}$ durch M gegeben, ferner

3. AD : $\frac{1}{2}$ DH = 1 : sin. $\frac{1}{2}$ DAH (Trigon. §. 327.)
oder R : $\frac{1}{2}$ c = 1 : sin. $\frac{1}{2}\alpha$, mithin

4. $R = \frac{\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$ ebenfalls gegeben, alſo am Rade wie im erſten Falle alles beſtimmt.

5. Sezet man eben ſo am Getriebe

deſſen Halbmeſſer BD = r

die Anzahl der Zaͤhne = m

die Breite eines Zahns, welche allemal jener eines Radzahns gleich iſt (§. 213. Nr. 5.), alſo die Sehne DM = der Sehne DH = c, und den Centriwinkel DBM = β, ſo iſt

6. Ebenfalls im gleichſchenklichten Dreyecke DBM, $\beta = \frac{180^\circ}{m}$ alſo durch m bekannt, und

7. BD : $\frac{1}{2}$ DM = 1 : sin. $\frac{1}{2}$ DBM, das iſt:
r : $\frac{1}{2}$ c = 1 : sin. $\frac{1}{2}\beta$, mithin

8. $r = \frac{\frac{1}{2}c}{\sin.\frac{1}{2}\beta}$, ſo daß alſo auch am Getriebe wie im erſten Falle alles zur Construction nothwendige bekannt, mithin der IIte Fall aufgelöſet iſt.

Aufloſung des IIIten Falls.

9. Man ſeze die gegebene Centrallinie AB = AD + BD = R + r = a, ſo iſt

10. $R = \frac{\frac{1}{2}c}{\sin.\frac{1}{2}\alpha}$ (Nr. 4.)

$r = \frac{\frac{1}{2}c}{\sin.\frac{1}{2}\beta}$ (Nr. 8.), mithin

11. $$R + r = a = \frac{\frac{1}{2}c}{\sin.\frac{1}{2}\alpha} + \frac{\frac{1}{2}c}{\sin.\frac{1}{2}\beta}$$
$$= \frac{1}{2}c\left[\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}\alpha} + \frac{1}{\sin.\frac{1}{2}\beta}\right]$$
$$= \frac{1}{2}c\left[\frac{\sin.\frac{1}{2}\alpha + \sin.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\frac{1}{2}\alpha\,\sin.\frac{1}{2}\beta}\right], \text{ und}$$

12. $$c = \frac{2a\sin.\frac{1}{2}\alpha.\ \sin.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\frac{1}{2}\alpha + \sin.\frac{1}{2}\beta}$$

13. Da nun durch M, m die Winkel α, β, (Nr. 2 und 6.), ferner a unmittelbar gegeben ſind, ſo ſind dadurch die Breite eines Zahns c, und aus dieſer noch die Halbmeſſer R, r (Nr. 10.), folglich alle nothwendigen Data zur Construction wie im erſten Falle be-

ſtimmt, alſo die Aufgabe im dritten Falle ebenfalls aufgelöſet.

Zuſaz. Die Breite der Zähne, ſo wie die Dicke derſelben, alſo der Räder ſelbſt, hängt von der Gewalt ab, welcher ein Zahn Widerſtand leiſten muß, gewöhnlich nimmt man die Dicke 4 bis 6 mal ſo groß als die Breite.

IV. Abſchnitt.

Von der Verbindung eines Kammrades mit einem Getriebe oder Trilling.

§. 215.

Bedingungen der Anwendung eines Kammrades.

Die Kämme liegen nicht in der Ebene des Rades, ſondern ſind auf ſelbiger nach ſenkrechter, oder nach ſchiefer Richtung eingeſezet (§. 191. *a.*), mithin

a. fällt auch die Ebene des Kammrades nicht mit der Ebene des verbundenen Getriebes, oder Trillings zuſammen, und ihre Axen ſind nicht parallel.

b. Drehet ſich (Fig. 97.) das Kammrad um ſeine Axe VW, ſo bewegt ſich offenbar der von der Axe mehr entfernte Punct *z* eines Kamms mit einer größern Geſchwindigkeit, als der näher liegende *y* eben dieſes Kammes; ergreifet alſo

c. ein Kamm mit ſeiner Seitenfläche den Zahn eines Getriebes, oder den Stock eines Trillings, ſo erhalten die Berührungspuncte verſchiedene Geſchwindigkeiten, je nachdem dieſe Puncte verſchiedene Entfernungen von der Axe des Kammrades haben.

Zuſatz. Wenn (Fig. 97.) HDI ein Theil vom Umfange des Kammrades iſt, ſo heißt vom Kamme mnopwxyz die Fläche wxyz, mit welcher er die Ebene des Rades berührt, der Fuß, ferner mnop der Kopf, ps die Höhe oder Länge, wz die Breite, und yz die Dicke des Kamms, der unter HDI liegende Theil des Kamms entſteht nur dadurch, daß zur Verhütung der Stemmung noch ein Stück hinzukömmt, welches aber nie mit Getriebzahn oder Triebſtock in Berührung kömmt, folglich keiner weitern Unterſuchung bedarf, ſo daß eigentlich nur der über HDI liegende Theil, deſſen Höhe pr iſt, gegenwärtig in Betrachtung kömmt.

§. 216.

Aufgabe. (Fig. 95.)

Auf dem Umfange HBDIH eines unbeweglichen Kreiſes wälzet ſich ein anderer Kreis BOTB, welcher gegen den erſtern Kreis ſeine anfängliche Neigung unverändert beybehält, man ſoll die Linie conſtruiren, welche der Punct B des leztern Kreiſes beſchreibet, wenn nebſt den Halbmeſſern BA, BC, die unveränderliche Neigung CBA gegeben iſt.

Auflöſung.

1. Der beſchreibende Punct B des erzeugenden Kreiſes BOTB verzeichnet, während er ſich mit unveränderter Neigung am Umfange der Baſis nach der Richtung BDI fortwälzet, eine ſphäriſche Epicycloide BMS (höhere Geometr. §. 373.), die ſich

2. aus den gegebenen Halbmeſſern, und Neigungswinkel nach der gegebenen Anleitung (höhere Geom. §. 378.) verzeichnen läßt.

I. Zuſatz.

I. Zuſaz. Berühret der erzeugende Kreis die Baſis anfänglich in B′, und wälzet ſich nun bis B, ſo kömmt dadurch der beſchreibende Punct von B′ nach M′, und verzeichnet während ſeiner Bewegung das Stück B′M′ der ſphäriſchen Epicycloide; aus der Natur der wälzenden Bewegung erhellet zugleich, daß dabey allemal der hinterlegte Bogen B′B der Baſis, dem Bogen BM′ des erzeugenden Kreiſes gleich bleibt.

II. Zuſaz. Stellet man ſich das Stück BM einer ſolchen ſphäriſchen Epicycloide auf der Ebene des Grundkreiſes HBDIH, ferner, beyde Kreiſe ſo befeſtiget vor, daß ſie ſich bey unveränderter Neigung gegeneinander nur um ihre Mittelpuncte A, C drehen können, ſo wird die Curve BM, wenn ſich der Grundkreis um A von B gegen H zu drehet, den Punct B des erzeugenden Kreiſes ergreifen, und ihn vor ſich herſchieben, ſo, daß, während die Curve in die Lage B′M′ kömmt, der ergriffene Punct B des erzeugenden Kreiſes nach M′ gelangt, folglich der Bogen B′B = dem Bogen BM′ iſt;

III. Zuſaz. Ergreiffet umgekehrt bey eben dieſer Vorrichtung der Punct M′ des erzeugenden Kreiſes die Curve B′M′, und dreht ſich nun dieſer Kreis um ſeinen Mittelpunct C von M′ nach B zu, ſo wird er die Curve vor ſich herſchieben, und dadurch den Grundkreis um ſeinen Mittelpunct A von B′ nach B zu drehen, kömmt dabey der eingreiffende Punct M′ nach B, ſo kömmt die Curve in die Lage BM, und es iſt wieder der Bogen BB′ = dem Bogen BM′.

IV. Zuſaz. Errichtet man durch die Mittelpuncte A, C der beyden Kreiſe Perpendikel AF, CK auf ih-

re Ebenen, ſo ſchneiden ſie einander im Mittelpuncte K der Kugel, in deren Oberfläche die durch den Punct B des erzeugenden Kreiſes verzeichnete ſphäriſche Epicycloide fällt. (höhere Geometr. §. 373. II und III. Zuſ.), mithin ſind ſie die Axen dieſer Kugelkreiſe, (Geometr. §. 253. III. Zuſ.) ferner ſind, durch die Halbmeſſer derſelben und ihre Neigung, der Halbmeſſer der Kugel BK, und die Stücke AK, CK der Axen beſtimmt (höhere Geometr. §. 374 und 375.).

V. Zuſaz. Zieht man vom Puncte K nach allen Puncten des Umfanges vom erzeugenden Kreiſe gerade Linien, ſo entſteht ein gleichſeitiger Kegel, deſſen Grundfläche der erzeugende Kreis BOTB, und deſſen Spize der Kugelmittelpunct K iſt, von dieſem Kegel ſind nun, unter den Bedingungen der Aufgabe, der Halbmeſſer der Grundfläche, die Seite, und Axe (IV. Zuſ.), mithin alle Beſtimmungen bekannt.

VI. Zuſaz. Schneidet man (Fig. 96.) die Seite BK dieſes Kegels in beliebiger Entfernung von B zur Grundfläche parallel, ſo iſt der Querſchnitt botb ebenfalls ein Kreis (Geom. §. 249. I. Zuſ.); und der abgeſchnittene Theil bKt ein gleichſeitiger Kegel, von welchen alle Beſtimmungen bekannt ſind; denn offenbar iſt die Linie Bb, mithin auch bK = BK - Bb bekannt, und da BK : bK = BC : bc

= CK : cK (Geom. §. 83.), ſo ſind der Halbmeſſer der Grundfläche, Seite und Axe dieſes Kegels beſtimmet.

VII. Zuſaz. Zieht man in der Neigungsebene CBA durch b zu BA die Parallele ba, ſo ſchneidet ſie die Axe AK des Grundkreiſes BDI in a (Geometr. §. 45. II. Zuſ.), unter einen rechten Winkel; im Vier-

ecke abcK ſind nun die rechten Winkel a, c, ferner der Winkel K, und b = CBA, dann die beyden Seiten bc, cK (VI. Zuſ.) bekannt, woraus alſo auch noch die Seiten ab, und aK gefunden werden können (Polygonometrie §. 16.).

VIII. Zuſaz. Beſchreibet man in der durch b zum Grundkreiſe BDI gelegten Parallelebene aus a mit ab den Kreis hbdi, nimmt ſolchen als Grundkreis, auf deſſen Umfang ſich der erzeugende Kreis botb wälzet, ſo beſchreibt der Punct b eine ſphäriſche Epicycloide, die in der Oberfläche einer Kugel liegt, welche K zum Mittelpuncte, bK zum Halbmeſſer hat, wodurch dieſe Kugel vollkommen beſtimmt iſt, (VI. Zuſ.), ferner läßt ſich dieſe Epicycloide durch bc, ba, und dem Winkel cba wie Nr. 2. verzeichnen.

IX. Zuſaz. Von dieſer Epicycloide gelten auf ähnliche Art die im I–III. Zuſ. angeführten Eigenſchaften.

X. Zuſaz. Wälzet ſich die Grundfläche BOTB des Kegels BKT, als erzeugender Kreis, auf dem Umfange BDI des Grundkreiſes ſo, daß die Spize unverrückt in K, alſo die Neigung CBA bey der Umdrehung unverändert bleibt, ſo beſchreibet der Punct B während einer ganzen Umwälzung die ſphäriſche Epicycloide BMN, und der Punct b des Parallelkreiſes botb, welcher ſich gleichzeitig auf dem Umfang des Kreiſes bdi wälzet, die ſphäriſche Epicycloide bmn.

XI. Zuſaz. So wie nun ſtets die beſchreibenden Puncte B, b mit dem Punct K in einer einzigen geraden Linie bleiben, ſo ſind nothwendig die von beyden

Puncten gleichzeitig erzeugten Stücke BM, bm der beyden Epicycloiden immer ſo beſchaffen, daß die 3 Puncte M, m, K zuſammen in einer geraden Linie liegen.

XII. Zuſaz. Jeder Punct der geraden Linie Bb beſchreibt bey der Umwälzung des Kegels eine ſphäriſche Epicycloide von eben dieſer Beſchaffenheit, mithin die ganze Linie Bb eine krumme Fläche, oder Streifen, welcher zwiſchen den beyden äuſſerſten ſphäriſchen Epicycloiden BMN, und bmn enthalten, und ſo beſchaffen iſt, daß bey jeder von K nach einem beliebigen Punct M der erſtern Epicycloide gezogenen geraden Linie der auf die Breite des Streifens treffende Theil Mm ganz in dieſen Streifen fällt.

XIII. Zuſaz. Sind die beyden Parallelkreiſe HDI, und hdi durch die gemeinſchaftliche Axe AK ſo miteinander verbunden, daß ſie ſich nur um dieſe Axe drehen können, und verbindet eben ſo die gemeinſchaftliche Axe CK die beyden Parallelkreiſe BOTB, botb, ſo daß ſich auch dieſe nur um ihre Axe drehen laſſen, ſo entſtehen zwey abgekürzte Kegel, welche einander in der Seite Bb berühren, iſt nun auf der krummen Seitenfläche des erſtern der Streifen BMmb (XII. Zuſ.) befeſtiget, und ergreifet ſolcher, während ſich der abgekürzte Kegel HhiI um ſeine Axe AK drehet, die Seite Bb des andern abgekürzten Kegels, ſo ſchiebet er ſolche vor ſich her, und es gelten auf ähnliche Art die Zuſäze II und III.

§. 217.

Aufgabe.

Bey einem Kammrade und Trilling, deren Halbmeſſer, und Neigung ihrer beyden Ebenen gegeben ſind,

die für den Eingriff zweckmäßige Form der Kämme anzugeben, wenn man noch von der Breite der Triebſtöcke und Dicke der Kämme abſtrahirt.

Aufloͤſung. (Fig. 95.)

1. Man betrachte den Kreis HBDI des Kammrades als den Grundkreis, und jenen des Trillings BOTB als den erzeugenden Kreis, verzeichne

2. aus den gegebenen Halbmeſſern BA, BC und Neigungswinkel CBA die entſprechende ſphäriſche Epicycloide BM (§. 216.), ſo iſt dieſe Curve die zum Eingriffe taugliche Krümmung der Kämme.

Beweis.

3. Bey der Annahme, daß man noch von der Dicke der Kämme (§. 215. Zuſ.) abſtrahirt, betrachtet man eigentlich nur einen Querſchnitt, der in die Ebene des Trillings als erzeugenden Kreis fällt, mithin

4. die Seite eines Kammes als eine Linie;

5. Bey den Triebſtöcken iſt dieſer Querſchnitt ein Kreis, und wenn man von der Breite abſtrahirt, alſo den Radius dieſes Kreiſes Beziehung auf jenen des ganzen Getriebes als unbedeutend auſſer Acht läßt, ſo nimmt man einen ſolchen Querſchnitt für einen Punct.

6. Wird nun die Nr. 2. verzeichnete Epicycloide BM ſo auf dem Umfange des Kammrades befeſtiget, daß alle Puncte derſelben von K gleich weit entfernt ſind, ſo wird

7. bey dem Umdrehen des Kammrades um ſeine Axe AF, die Curve BM den Triebſtock in B ergreifen, und, während ſich erſteres von B bis B′ drehet, den Triebſtock nach M′ ſchieben, ſo daß allemal der Bogen

BB′ am Kammrade dem Bogen BM′ am Trillinge gleich iſt (§. 216. II. Zuſ.).

8. In gleichen Zeiten hinterlegen alſo die Puncte am Umfange des Rades und Trillings immer gleiche Räume, und dieſes gilt auch immer für die zunächſtfolgenden unendlich kleinen Zeittheilchen.

9. Iſt nun P die auf den Umfang des Kammrades reducirte Kraft, mit welcher ſolches um ſeine Axe gedreht wird, ſo würde am Umfange des Trillings für den Zuſtand des Gleichgewichtes eine gleich große Kraft Q erfodert (§. 14. II. Zuſ.), folglich

10. wirket bey der angegebenen Form der Kämme die Kraft P an jeder Stelle M′ der Berührung eines Kamms und Triebſtocks auf leztern mit eben derſelben Gewalt, oder ihr Moment bleibt immer unverändert, wodurch die Hauptfoderung eines zweckmäßigen Eingriffes (§. 196. II. Zuſ.) befriediget iſt.

I. Zuſaz. Bringt man die Dicke des Kamms in Anſchlag, ſo muß jeder Triebſtock Bb (Fig. 96.) ſo eine Lage erhalten, daß er verlängert die Axe des Kammrades in K ſchneidet, und die krumme Seitenfläche eines Kamms muß dem Streifen BMmb gleich, und eben dieſelbe Lage haben (§. 216. XII und XIII. Zuſ.), in dieſem Falle werden wieder die einander berührenden Stellen am Rade und Getriebe in gleichen Zeiten gleiche Räume durchlaufen, mithin die ſtatiſchen Momente der Kraft unverändert bleiben (Nr. 9 und 10.).

II. Zuſaz. Damit die Bewegung vor- und rückwärts gleichförmig erfolge, ſo giebt man den Kämmen auf jeder Seite eben dieſelbe Form, ſo ſtellet lLNn die eine, und lLQq die andere ihr congruente Seitenfläche eines Kammes vor.

III. Zuſaz. Die Form der Kämme bleibt eben dieſelbe, es mag vom Kammrad der Trilling, oder vom leztern erſteres in Bewegung geſezet werden (§. 216. III. Zuſ.).

IV. Zuſaz. Soll endlich (Fig. 97.) der Kamm des Rades den Triebſtock bey N wieder verlaſſen, ſobald die nächſtfolgenden einander in D berühren, ſo findet man die nothwendige Höhe NF durch folgende Construction; man verzeichne nemlich im Umfange BOTB des Trillings die den Triebſtöcken entſprechenden Querſchnitte oder Kreiſe, ziehe den Halbmeſſer BC, und die Sehne BM, welche den Umfang des Triebſtocks M in N ſchneidet, fälle aus N auf CB die ſenkrechte NE, ſo iſt EB = NF die geſuchte Höhe, damit endlich die Triebſtöcke zwiſchen den Kämmen gehörig ſich einſenken können, ohne auf der Stirn des Rades anzuſtoßen, ſo wird jeder Kamm noch um das Stück Ff, ſo daß Ff etwas größer als der Halbmeſſer MN vom Querſchnitte eines Triebſtocks iſt, verlängert. Vom Kammrade bildet daher zwar der Kreis HDI den wahren Umfang, aber da durch die angeführte Zugabe ein Theil der Kämme unter ſelbige zu liegen kömmt, ſo ſtellet hGLi den noch bleibenden Theil von der Maſſe des Kammrades vor.

V. Zuſaz. Der Trilling ſelbſt muß einen abgekürzten Kegel bilden, wo an dem Umfange der beyden Grundflächen BOTB, botb (Fig. 96.) die Triebſtöcke ſo eingeſezet ſind, daß ſie in K, wo ſich die Axen des Kammrades und Trillinges einander ſchneiden, verlängert, ebenfalls einander ſchneiden würden, (§. 216. XIII. Zuſ.). Selbſt jeder einzelne Triebſtock darf nicht cylindriſch ſeyn, ſondern er muß ebenfalls einen abge-

kürzten Kegel bilden, welcher verlängert in K ſeine Spize hat, ſo daß ſich jeder Triebſtock in K in einen Punct enden würde.

VI. Zuſaz. Wollte man bey der Bildung der Kämme im I. Zuſ. die Triebſtöcke nicht als Linien, ſondern als abgekürzte Kegel betrachten, ſo müßte man auf ähnliche Art wie §. 211. II. Zuſ. erſt eine zu BM mb parallele krumme Fläche als Seite des Kammes beſtimmen, welche den Triebſtock am Umfange berührte, während erſtere ſtets deſſen Axe berührt; da dieſe Construction äuſſerſt ſchwer und unſicher iſt, ferner der Umfang eines Triebſtocks in Beziehung auf den Umfang des Trillings immer nur unbeträchtlich iſt, ſo läßt man es lieber bey der im I. Zuſ. angenommenen Vorausſezung beruhen.

§. 218.

Aufgabe.

Die Größe F der Reibung, welche zwiſchen Kamm und Triebſtock ſtatt hat, zu beſtimmen.

Auflöſung.

1. Wenn P′ die auf den Umfang des Kammrades reducirte Totalkraft bezeichnet, welche ſowohl auf die Umdrehung des Trillings, als auf die Ueberwindung der Reibung zwiſchen den Kämmen und Triebſtöcken verwendet wird, ſo drücket

2. der Kamm mit ſeiner krummen Seitenfläche BMmb (Fig. 96.) gegen den ergriffenen Triebſtock Bb ſo, daß an jeder Stelle ihres Eingriffes dieſer Druck auf den Umfang des Trillings reducirt immer unveränderlich, alſo = P′ bleibt (§. 217. Nr. 9, 10. I. Zuſ.).

3. Dieſer Druck verbreitet ſich wegen dem Zuſammenhange oder Feſtigkeit des Triebſtockes auf deſſen ganze Länge Bb, mithin entſteht auch allemal an den Berührungspuncten eine entſprechende Reibung, die man ſich ebenfalls

4. auf dem Puncte B, wo die vereinigte Kraft P' wirket, reducirt vorſtellen kann, folglich

5. Kömmt bey gegenwärtiger Auflöſung vom Triebſtock nur der Punct B, und von der krummen Seitenfläche des Kamms die Curve BM in Betracht.

6. Der Kamm ergreiſe den Triebſtock in B, und ſchiebe ſolchen bis M' (Fig. 95.), ſo kömmt dadurch der Kamm, das iſt, die Curve BM, nach B'M', ſo daß dieſe Curve B'M' in der Oberfläche einer Kugel bleibt, die ihren Mittelpunct in K hat (§. 217.).

7. Berührt nun der erzeugende Kreis BOT die Baſis in B, und man legt durch B, M', K einen Kugelkreis, ſo ſteht ſolcher in M' auf dem Elemente der Curve M'μ ſenkrecht (höhere Geometr. § 379. I. Zuſ.).

8. Je größer nun der Halbmeſſer BK der Kugel iſt, deſto näher kömmt der Kreisbogen BεM' ſeiner Sehne (Geometr. §. 110. III. Zuſ.).

9. Bey einem Kammrade (Fig. 97.) ſind allemal der Abſtand zweyer Kämme voneinander, und die Höhe NF eines Kammes im Verhältniſſe zum Halbmeſſer BA dieſes Rades, alſo noch mehr im Verhältniſſe zum Halbmeſſer BK die Kugel ſehr klein, man kann daher

10. BεM als eine gerade Linie (Nr. 8) mithin als Sehne des Bogens BoM', BB' als Stückchen der Tangens des Kreiſes BOT, mithin auch B'M' als eine

Curve von einfacher Krümmung betrachten, die ebenfalls in der Ebene des erzeugenden Kreiſes BOT liegt.

11. Zur leichtern Ueberſicht ſtellet unter dieſer Annahme die ſämmtlichen Linien die 98ſte Figur vor.

12. Die Sehne BεM′ ſteht nun in M′ auf der Curve B′M′ ſenkrecht (Nr. 7.), iſt daher die Richtung der Normal,

13. zieht man die Sehne TM′, ſo iſt BM′T = 90° (Geom. §. 72. III. Zuſ.), folglich iſt

14. eben dieſe Sehne TM′ die Tangens der Curve B′M′ im Puncte M′.

15. Nun verzeichne man den Halbmeſſer CM′; und errichte durch M′ auf ihm die ſenkrechte M′G, ſo drückt

16. in M′ der Kamm B′M′ des Rades auf den Triebſtock nach der Richtung M′G mit der Kraft P′ (Nr. 2.).

17. Zerlegt man dieſe Kraft in 2 Seitenkräfte nach der Richtung des Halbmeſſers M′C, und der verlängerten Normal M′b, ſo wird

18. erſtere $= \frac{P' \sin. bM'G}{\sin. bM'C}$ (Reine Mech. §. 53. VII. Zuſ.) durch die feſte Axe des Trillings aufgehoben, vermehret aber die Zapfenreibung;

19. die Seitenkraft nach M′b $= \frac{P' \sin. GM'C}{\sin. bM'C}$ $= \frac{P}{\sin. bM'C}$ (Nr. 15.) iſt ſenkrecht auf die Curve B′M′, und verurſacht alſo eine Reibung $= \frac{\lambda P'}{\sin. bM'C}$ wenn λ den Reibungscoefficienten bezeichnet.

20. Nun beſteht die nächſtfolgende Bewegung darinn, daß der Triebſtock bey M′ fortgeſchoben, mit-

hin die Curve nach der Richtung der Tangens M′t an ſelbigen fortgleite, dieſer Bewegung widerſezet ſich die Reibung nach der entgegengeſezten Richtung, folglich muß zur Hebung derſelben an M′ nach der Richtung M′t eine Kraft $= \frac{\lambda P'}{\sin. bM'C}$ wirken.

21. Zerlegt man dieſe Kraft abermal in zwey Seitenkräfte, wovon die eine M′N zu BB′ parallel, die andere M′Q auf BB′ ſenkrecht ſteht, ſo wird

22. leztere Seitenkraft durch die feſte Ebene des Kammrades aufgehoben, vermehrt aber die Zapfenreibung,

23. erſtere Seitenkraft nach $M'N = \frac{\lambda P'}{\sin. bMC} \sin. tM'Q$ (Reine Mechan. §. 53. IX. Zuſ.) iſt die Kraft F, welche auf die Ueberwindung der Reibung am Umfange des Rades verwendet werden muß, oder es iſt

24. $F = \frac{\lambda . P'}{\sin. bM'C} \sin. t.M'Q$

25. Man ſeze den veränderlichen Centriwinkel $BCM' = \omega$, ſo iſt

26. im gleichſchenklichten Dreyecke BCM′ der Winkel $CBM' = CMB' = 90° - \frac{1}{2}\omega$

27. $M'BB' = \frac{1}{2}\omega$ (Geometr. §. 78. Zuſ.)

28. $tM'Q = tM'B - BMQ = 90° - (90° - M'BB')$ (N. 13.) $= M'BB' = \frac{1}{2}\omega$, (Nr. 27.), alſo

29. $\sin. tM'Q = \sin. \frac{1}{2}\omega$

30. $bM'C = 180° - CM'B = 180° - (90° - \frac{1}{2}\omega)$ (Nr. 26.) $= 90° + \frac{1}{2}\omega$, folglich

31. $\sin. bM'C = \cos. \frac{1}{2}\omega$

32. Sezet man aus Nr. 29 und 31. die Werthe in die Gleichung Nr. 24., ſo wird

$$33.\ F = \frac{\lambda . P'}{\cos . \frac{1}{2}\omega} \sin . \tfrac{1}{2}\omega = \lambda . P' \text{tang} . \tfrac{1}{2}\omega$$

I. Zuſaz. Sezet man die auf den Umfang des Kammrades reducirte Kraft, welche auf die Umdrehung des Trillings verwendet wird, oder, was einerley iſt, den Widerſtand des Trillings auf dieſen Umfang reducirt, = P, und die zur Ueberwindung der Reibung zwiſchen den Kamm und ergriffenen Triebſtock = F, alſo die auf den Umfang des Rades reducirte Totalkraft ((Nr. 1.), P' = P + F, ſo iſt aus Nr. 33.

$$F = \lambda\ (P + F) \text{tang} . \tfrac{1}{2}\omega = \lambda P \text{tang} . \tfrac{1}{2}\omega + \lambda F \text{tang} . \tfrac{1}{2}\omega,$$

$F(1 - \lambda \text{tang} . \frac{1}{2}\omega) = \lambda P \text{tang} . \frac{1}{2}\omega$, folglich $F = P . \dfrac{\lambda \text{tang} . \frac{1}{2}\omega}{1 - \lambda \text{tang} . \frac{1}{2}\omega}$

II. Zuſaz. Die Reibung hängt überhaupt von dem Wiederſtande P des ergriffenen Trillings ab, und iſt während der Berührung eines Kamms und Triebſtocks veränderlich, ſie nimmt mit dem Winkel ω = BCM' (Fig. 98.) zu.

§. 219.

Aufgabe. (Fig. 99.)

Den Umfang HBDI eines unbeweglichen Kreiſes berühren zwey Kreiſe BOTB, BRCB, die in einer Ebene liegen, in dem gemeinſchaftlichen Puncte B, ſo daß alſo beyde Kreiſe gegen den obigen Grundkreis einerley Neigung TBA = CBA haben, beyde Kreiſe wälzen ſich nun auf dem Umfang der Baſis HBDI mit gleicher Geſchwindigkeit, und unveränderter Neigung: man ſuchet die Beſchaffenheit jener Curven, welche von beyden Kreiſen jene Puncte beſchreiben, die anfänglich zuſammen in den Punct B der Baſis fallen, wenn der unveränderliche Neigungswinkel CBA, und

die Radien der Kreiſe, nemlich BA, BC, BG gegeben, und ſo beſtimmt ſind, daß BG = $\frac{1}{2}$ BC iſt.

Aufloͤſung.

1. In Beziehung des Kreiſes BOTB iſt lediglich alles wie §. 216. beſtimmt, mithin verzeichnet der beſchreibende Punct deſſelben eine ſphaͤriſche Epicycloide BMS, die ſich aus den gegebenen Halbmeſſern AB, BC, und der Neigung CBA conſtruiren laͤßt.

2. Auf aͤhnliche Art verzeichnet der beſchreibende Punct des kleinern Kreiſes BRCB eine ſphaͤriſche Epicycloide BmsN, die ſich aus der Neigung CBA, und den Halbmeſſern BA, BG nach §. 216. conſtruiren laͤßt.

3. Da ſich die beyden Kreiſe der Annahme gemaͤß auf der Baſis mit gleicher Geſchwindigkeit fortwaͤlzen, und da fuͤr BG = $\frac{1}{2}$ BC, auch die Peripherie BRCB = $\frac{1}{2}$ BOTB iſt (Geometr. §. 126. IV. Zuſ), ſo wird, waͤhrend der Kreis BOTB eine halbe Umwaͤlzung vollendet, mithin deſſen beſchreibender Punct die halbe ſphaͤriſche Epicycloide BMS verzeichnet, der kleinere Kreis BRCB eine ganze Umwaͤlzung, und deſſen beſchreibende Punct die ganze ſphaͤriſche Epicycloide BmsN vollenden.

4. Betrachtet man die Bewegung des Kreiſes BRCB relativ auf den Kreis BOTB, ſo waͤlzet ſich erſterer auf dem innern Umfang des leztern, und der beſchreibende Punct erzeugt alſo dadurch eine gewoͤhnliche Hypocycloide oder innere Epicycloide (hoͤhere Geometr. § 358. α. β.).

5. Da endlich der Annahme gemaͤß BG = $\frac{1}{2}$ BC, ſo bleibt der beſchreibende Punct des kleinern Kreiſes,

während ſich beyde Kreiſe wälzen, immer in der Richtung des durch den Anfangspunct B gezogenen Diameters BT, das heißt, während der Punct B am Umfange des kleinern Kreiſes BRCB die ſphäriſche Epicycloide BmsN verzeichnet, hat er in Beziehung auf den zugleich mitrollenden Kreis BOTB eine ſolche Lage, daß er die gerade Linie BCT durchläuft (höhere Geom. §. 362. II. Zuſ.), mithin

6. fällt an jeder Stelle der entſprechende Punct m der Epicycloide Bm mit einem Puncte des Halbmeſſers BC oder des Diameters BT zuſammen.

I. Zuſaz. Berühren die beyden erzeugenden Kreiſe anfänglich die Baſis in B′, und wälzen ſie ſich nun bis B, ſo kömmt dadurch der beſchreibende Punct am kleinern Kreiſe von B, bis m′ und verzeichnet während ſeiner Bewegung das Stück B′m′ ſeiner ſphäriſchen Epicycloide ſo, daß nach der Natur der wälzenden Bewegung der Bogen m′eB des erzeugenden Kreiſes dem Bogen B′B der Baſis gleich iſt.

II. Zuſaz. In eben dieſer Zeit gelangt aber der anfängliche Berührungspunct des Kreiſes BOTB von B′ nach M′, und der durch B′ gezogene Diameter in die Lage M′T′, und da der beſchreibende Punct am Kreiſe BRCB ſtets in der Richtung dieſes Diameters bleibt (Nr. 6.), ſo fällt der Punct m′ der Curve B′m′ mit einem Puncte dieſes Diameters M′T′ zuſammen.

III. Zuſaz. Wenn k der Mittelpunct der Kugel iſt, in deren Oberfläche die ſphäriſche Epicycloide B′m′μ fällt, und man legt durch die 3 Puncte B, m′, k einen Kugelkreis, ſo ſteht auf der Ebene dieſes größten Kugelkreiſes das Element m′μ der Curve B′m′μ

ſenkrecht (höhere Geometr. §. 379. I. Zuſ.), und da der Bogen $B\varepsilon m'$ ein ſehr kleiner Theil des ganzen Kugelkreiſes iſt, ſo fällt dieſer kleine Bogen mit ſeiner Sehne (Geom. §. 126.), alſo auch mit der Sehne des Bogens $B\varepsilon m'$ des erzeugenden Kreiſes BRCB zuſammen, folglich ſteht in m' das Element $\mu\, m'$ (Geometr. §. 162.), mithin die Curve $B'm'\mu$ auf dieſer Sehne $B\varepsilon m'$ ſenkrecht, alſo iſt leztere die Richtung der Normal; zieht man daher

IV. Zuſaz. die Sehne Cm', welche mit dem Diameter $M'T'$ zuſammenfällt (Nr. 6.), ſo iſt der Winkel $Bm'C = 90°$ (Geometr. §. 72. III. Zuſ.), folglich iſt Cm', alſo auch der Diameter $M'T'$ die Tangens der Curve $B'm'\mu$ in m'.

V. Zuſaz. Werden die in der Aufgabe feſtgeſezten Bedingungen dahin abgeändert, daß der Grundkreis HBDI ſowohl, als die beyden Kreiſe BOTB, BRCB, ſich bey unverrückter Neigung um ihre Mittelpuncte A, C, G drehen laſſen, ſo wird der Grundkreis HBDI, wenn er ſich um A gegen BH zu drehet, und dabey den gemeinſchaftlichen Berührungspunct B ergreifet, dieſelben ebenfalls in eine umdrehende Bewegung ſezen, wodurch ſie ſich zugleich auf dem Umfang der Baſis fortwälzen, und dabey die Puncte, welche anfänglich zuſammen die Baſis in B berührten, ſphäriſche Epicycloiden beſchreiben, die den bisher angeführten gleich und ähnlich ſind, von denen alſo alle bisher angeführten Säze gelten, mithin wird der durch den anfänglichen Berührungspunct B gezogene Halbmeſſer CB während der Bewegung ſtets in der Richtung der Tangens der vom kleinern Kreiſe BRCB verzeichneten ſphäriſchen Epicycloide bleiben.

VI. Zuſaz. Stellet man ſich unter eben dieſen Bedingungen in B eine ſolche vom kleinern Kreiſe BRCB erzeugte ſphäriſche epicycloidiſche Curve Bm auf der Baſis befeſtiget vor, und drehet ſich nun der Grundkreis wieder von B gegen H zu, ſo wird die Curve den ergriffenen Punct B des Kreiſes BRCB vor ſich herſchieben, und dadurch dieſen Kreis um ſeinen Mittelpunct G drehen, und da der ergriffene Punct zugleich immer im Halbmeſſer CB liegt, ſo wird auch derſelbe fortgeſchoben, und der Kreis BOTB in eine umdrehende Bewegung geſezet, kömmt nemlich die Curve in die Lage B′m′, ſo fällt der Halbmeſſer CB in die Richtung der Tangens CM′, und die im kleinern Kreiſe gezogene Sehne Bεm′ in die Richtung der Normal, und in wieferne ſich die beyden Kreiſe auf der Baſis fortwälzen, ſo ſind die Bögen BB′, BM′, Bεm′ einander gleich.

VII. Zuſaz. Ergreifet umgekehrt bey eben dieſer Vorrichtung der Halbmeſſer CM′ des Kreiſes BOTB die auf den Grundkreis befeſtigte epicycloidiſche Curve B′m′μ in m′ und drehet ſich gegen M′B zu, ſo ſchiebt er die ergriffene Curve vor ſich her, dadurch muß ſich nothwendig die Baſis um ihren Mittelpunct A, und in wieferne der angegriffene Punct m′ in dem Umfange des Kreiſes BRCB liegt, lezterer Kreis um ſeinen Mittelpunct G drehen, und zwar ſo, daß wenn der Halbmeſſer CM′ in die Lage CB vorgerückt iſt, die Curve nach Bm kömmt, m′ bis B rücket, und der Halbmeſſer CB die Tangens der Curve Bm bleibt. Endlich aus der wälzenden Bewegung der beyden Kreiſe auf der Baſis ergiebt ſich noch, daß die Bögen B′B, M′B, und m′εB gleich lang ſind.

VIII. Zu-

VIII. Zuſaz. Errichtet man durch die Mittelpuncte A, C auf die Ebenen der entſprechenden Kreiſe HBDI, und BOTB die Perpendikel AF, CK, ſo ſchneiden ſie ſich im Mittelpuncte K jener Kugel, in deren Oberfläche die ſphäriſche Epicycloide BMS (Nr. 1.) liegt. Eben ſo, errichtet man durch den Mittelpunct G auf der Ebene des Kreiſes BRCB einen Perpendikel Gk, ſo ſchneidet er AF im Mittelpuncte k jener Kugel, in deren Oberfläche die ſphäriſche Epicycloide BmsN liegt, beyder Kugeln Mittelpunct K, k liegen daher in der geraden Linie AF; ſo wie §. 216. IV. Zuſ. laſſen ſich aus den Halbmeſſern BA, BC und Neigung CBA der beyden Kugelkreiſe HBIH, BOTB die Stücke AK, CK ihrer Axen, und der Halbmeſſer BK ihrer Kugel angeben; und auf gleiche Art aus den Halbmeſſern BA, BG und Neigung BCA der Kugelkreiſe HBIH, BRCB, die Stücke Ak, Gk ihrer Axen, und der Halbmeſſer Bk der entſprechenden Kugel berechnen.

IX. Zuſaz. Zieht man von K nach allen Puncten der Peripherie BOTB, und eben ſo von k nach BRCB gerade Linien, ſo erhält man 2. gleichſeitige Kegel, in welchen aus den bisher angeführten alle Beſtimmungen bekannt ſind. (§. 216. V. Zuſ.).

X. Zuſaz. Schneidet man (Fig. 100.) die Seite BK des Kegels BKT in dem beliebigen Puncte b zur Grundfläche BOTB parallel, ſo kann man von dem abgeſchnittenen Kegel bKt, den Halbmeſſer bc ſeiner Grundfläche botb, die Axe cK, und Seite bK finden, legt man noch durch b zum Grundkreis HBDI eine Parallelebene, welche die Kugelaxe AF in a ſchnei-

det, und verzeichnet aus a in dieſer Ebene mit ab einen Kugelkreis hbdi, ſo iſt von dieſem der Halbmeſſer ab, und deſſen Entfernung vom Mittelpuncte der Kugel oder aK beſtimmt (§. 516. VI und VII. Zuſ.).

XI. Zuſaz. Der Axentriangel BKT des Kegels ſchneidet den Parallelkreis botb in dem Durchmeſſer bt, welcher zum Durchmeſſer BT des Kreiſes BOTB parallel iſt (höhere Geom. §. 271. I, V und VI. Zuſ.), nimmt man auf bt, die Länge bg $=\frac{1}{2}$ bt $=\frac{1}{2}$bc, und beſchreibt aus g mit gb in der Ebene des Querſchnittes botb den Kreis brcb, ſo iſt von dieſem Kreiſe deſſen Halbmeſſer bg, die Neigung cba $=$ CBA gegen den Kreis hbdi, und vom leztern der Halbmeſſer ba bekannt, woraus ſich wieder die ſphäriſche Epicycloide bmsd, welche der beſchreibende Punct b am Umfange des Kreiſes brcb bey der Umwälzung auf der Baſis hbdi erzeuget, verzeichnen läßt; errichtet man durch den Mittelpunct g auf der Ebene des erzeugenden Kreiſes den Perpendickel gx, ſo ſchneidet dieſer (VIII. Zuſ.) die Axe AK im Mittelpuncte x jener Kugel, in deren Oberfläche die erzeugte Epicycloide bmsd liegt, und deren Halbmeſſer bx iſt. Auf dieſe Curve laſſen ſich daher alle bisher angeführten Säze anwenden. So wie nemlich, während der Kreis BOTB eine halbe Umwälzung, alſo der Kreis BRCB bey gleicher Geſchwindigkeit eine ganze Umwälzung auf der Baſis HBDI vollendet, der beſchreibende Punct deſſelben die ſphäriſche Epicycloide BMSD verzeichnet (Nr. 3.) und dabey die ganze Länge des Durchmeſſers BT durchläuft (Nr. 4 und 5.), mithin CB ſtets in der Richtung der Tangens bleibt (III. Zuſ.); ſo wird der beſchreibende Punct am Umfange des Kreiſ

ſes brcb, während der Kreis botb auf der Baſis hbdi eine halbe Umwälzung vollendet, mit gleicher Geſchwindigkeit auf eben derſelben eine ganze vollenden, die ſphäriſche Epicycloide bmsd beſchreiben, und den Durchmeſſer bt durchlaufen, und leztere ſtets in der Lage der Tangens bleiben.

XII. Zuſaz. Sind die beyden Parallelkreiſe BOTB, botb durch die gemeinſchaftliche Axe CK verbunden, und vollenden nun gleichzeitig auf ihren Grundkreiſen eine halbe Umwälzung, ſo werden indeſſen die beyden Kreiſe BRCB, brcb auf eben dieſen Grundkreiſen, wenn die bisher angenommene Geſchwindigkeit bleibt, eine ganze Umwälzung vollenden, die ſphäriſchen Epicycloiden BMSD, bmsd beſchreiben, und dabey die Diameter BT, bt durchlaufen, und leztere immer in die Richtungen der Tangenten fallen.

XIII. Zuſaz. Nimmt man auf dem Diameter BT einen beliebigen Punct C, und zieht nach der Spitze K des Kegels BKT die gerade Linie CK, ſo ſchneidet ſie den Diameter bt in einem Puncte c, und zwar ſo, daß bc : BC = bt : BT iſt.

Denn da bt parallel mit BT (XI. Zuſ.), ſo ſchneidet CK den Diameter bt in irgend einem Puncte (Geometr. §. 45. II. Zuſ.), und ferner wird (Geometr. §. 92.) bc : BC = bK : BK, und

bt : BT = bK : BK, mithin

bc : BC = bt : BT; und

XIV. Zuſaz. Umgekehrt, nimmt man auf den Durchmeſſern BT, bt die Stücke BC, bc proportionirt, ſo liegt c in der geraden Linie CK.

XV. Zuſaz. Bey den im XII. Zuſ angenommenen Bedingungen behalten die beyden Diameter bt, BT während der Umwälzung ihrer Kreiſe immer ihre parallele Lage gegeneinander; ſind daher die Stücke, z. B. BG, bg den ganzen Diametern proportionirt, ſo bleibt g immer in der geraden Linie GK.

XVI. Zuſaz. Während die beſchreibenden Puncte der Kreiſe BRCB, brcb die ganzen ſphäriſchen Epicycloiden BMSD, bmsd verzeichnen, durchlaufen ſie die ganzen Durchmeſſer BT, bt (XII. Zuſ.), und während obige Puncte die halben Epicycloiden BMS, bms beſchreiben, hinterlegen ſie die Halbmeſſer BC, bc, mithin entſprechen überhaupt zweyen gleichzeitig beſchriebenen epicycloidiſchen Bögen BM, bm auf den Durchmeſſern hinterlegte Stücke BG, bg, welche den ganzen Durchmeſſern proportionirt ſind, ſo daß
bg : BG = bt : BT (Arith. § 267.) mihin liegt g in der geraden Linie GK (XV. Zuſ.), und da

XVII. Zuſaz. bey der Umwälzung M mit G, und m mit g zuſammenfällt, ſo liegt auch m in der geraden Linie MK.

XVIII. Zuſaz. Würde man zwiſchen B und b irgend in einem Puncte β einen ähnlichen Querſchnitt (X Zuſ.) machen, ſo würde auf ähnliche Art auf ſolchen alles wie auf botc paſſen, und da dieſes für jeden Punct gilt, ſo iſt die durch alle dieſe Puncte von B bis b, während der Umwälzung ihrer entſprechenden Parallelkreiſe verzeichnete krumme Fläche BMmb ſo beſchaffen, daß für jeden Punct M, alle zwiſchen M und m liegenden Puncte derſelben in die gerade Linie MK fallen.

XIX. Zuſatz. Sind die beyden parallelen Grundkreiſe HBDI, hbdi, und die Querſchnitte BOTB, botb durch ihre Axen AF, CK ſo befeſtiget, daß leztere Kreiſe gegen erſtere ihre Neigung unverändert behalten, wenn ſie ſich um ihre Axen drehen, ſo erhält man zwey abgekürzte Kegel, welche einander in der Seite Bb berühren; wird ferner über Bb auf der krummen Seitenfläche des abgekürzten Kegels HhiI die der bisher angeführten Anleitung gemäß erzeugte ſphäriſch-epicycloidiſche Fläche BMmb befeſtiget, und innerhalb dem Umfang des andern abgekürzten Kegels zwiſchen den Halbmeſſer BC, bc die feſte Ebene BGgb gelegt, ſo wird die krumme Fläche BMmb, während ſich der abgekürzte Kegel HhiI um ſeine Axe AF drehet, das Trapez BGgb ergreifen, und dadurch den abgekürzten Kegel BTtb ebenfalls um ſeine Axe CK drehen; ſo wie nun für jede Stelle die Halbmeſſer CB, cb in Beziehung auf die Curven BM, bm ſtets die Tangenten ſind (VI und VII. Zuſ.), und einander in Puncten M, m berühren, welche in der geraden Linie MK liegen (XVI und XVII. Zuſ.), ſo wird die krumme Fläche BMmb das Trapez ſtets in einer geraden Linie berühren, die verlängert durch K geht; endlich da ſich durch dieſe Umdrehung der Kegel BTtb nothwendig auf der Seitenfläche des Kegels HhiI wälzen muß, ſo ſind die Bögen, welche Puncte am Umfange des Kreiſes HBDI, und BOTB gleichzeitig hinterlegen, einander gleich.

§. 220.

Aufgabe.

Bey einem Kammrade, und Getriebe, deren Lage gegeneinander, ſo wie ihre Halbmeſſer gegeben ſind,

die für den Eingriff zweckmäßige Form der Kämme und Zähne anzugeben.

Auflöſung.

1. Man verzeichne aus dem gegebenen Halbmeſſer des Kammrades, z. B. AB (Fig. 100.) den Grundkreis HBDI, und

2. aus eben dieſem Halbmeſſer AB, und jenem des Getriebes CB, nebſt der bekannten Lage oder Neigung CBA beſtimme man die Linien AK, BK, CK (§. 216. IV. Zuſ.), mithin den Mittelpunct K jener Kugel, in deren Oberfläche die vom Puncte B durch Umwälzung des Getriebes BOTB erzeugte ſphäriſche Epicycloide liegen würde, oder die Spitze des gleichſeitigen Kegels BKT.

3. Nun nehme man $BG = \frac{1}{2} BC$, und verzeichne aus G mit dem Halbmeſſer BG in der Ebene des Getriebes BOTB den Kreis BRCB, ſo wie aus den Halbmeſſern BA, BG, und der gegebenen Neigung CBA das Stück BM einer ſphäriſchen Epicycloide, welcher HBDI (Nr. 1.) als Grundkreis, und BRCB als Erzeugungskreis entſpricht (§. 219. Nr. 2.).

4. Ferner ziehe man die gerade Linie BK, nehme auf ihr Bb der erforderlichen Dicke eines Kamms, und Getriebzahns gleich;

5. über Bb beſtimme man aus der Curve BM (Nr. 3.) die Fläche BMmb ſo, daß für jeden Punct M der Curve BM das der Dicke eines Kamms entſprechende Stück Mm in die gerade Linie MK fällt, ſo iſt die angegebene Fläche BMmb die geſuchte krumme Seitenfläche für jeden Kamm des Rades.

6. Endlich iſt aus dem Halbmeſſer des Getriebes BC, dem Halbmeſſer AB des Kammrades, und ihrer Neigung CBA die Größe und Lage des ganzen Kegels BKT (Nr. 2.), mithin durch Bb auch jene des abgekürzten Kegels BTtb, oder Getriebes gegeben.

7. Legt man durch Bb und dem Mittelpunct C eine Ebene, ſo giebt das Trapez BGgb die geſuchte Seitenfläche eines Getriebzahns (XIX. Zuſ.).

Beweis.

8. Aus Nr. 5 und 7. erhellet, daß die Kämme auf der Ebene des Kammrades oder der Seite Bb des abgekürzten Kegels HhiI ſtehen, und die Zähne des Getriebes hingegen innerhalb dem Umfang deſſelben, das iſt, innerhalb dem abgekürzten Kegel BTtb liegen;

9. drehet ſich nun das Kammrad um ſeine Axe AF nach der Seite BH zu, ſo wird die Seite BM mb des Kammes in Bb die Seitenfläche BGgb des Getriebzahns ergreifen, und vor ſich herſchieben,

10. und während der Bewegung immer in geraden Linien berühren, in deren Verlängerung jedesmal K liegt (§. 219. XIX Zuſ.), folglich iſt

11. die Bewegung dieſer Flächen oder Zähne gegeneinander wälzend, mithin die Reibung dabey am geringſten.

12. Ferner bekömmt dadurch das Getrieb auf dem Umfange HBI des Kammrades eine wälzende Bewegung, wodurch jeder Punct des Getriebumfanges mit einem Puncte am Umfange des Kammrades in gleichen Zeiten gleiche Bögen hinterlegt, und da auch in den nächſtfolgenden unendlich kleinen Zeittheilchen eben dieſes gilt, ſo wird

13. Für die Kraft P am Umfange des Rades, am Umfange des Getriebes für den Zuſtand des Gleichgewichtes eine gleiche Kraft Q erfodert (§. 14. II. Zuſ.), folglich

14. wirket die Kraft an jeder Stelle der Berührung ſtets gleichförmig, ſo daß alſo dadurch, und aus Nr. 11. die angegebene Form (Nr. 5 und 7) den Foderungen § 196. II. Zuſ.) entſpricht, mithin der Aufgabe gemäß iſt.

I. Zuſaz. Soll das Kammrad vom Getriebe in Bewegung geſezet werden, ſo bleibt eben dieſelbe Form, nur erfolgt die Bewegung nach der entgegengeſezten Richtung.

II. Zuſaz. Damit in jedem Falle die Bewegung vor- und rückwärts gleichförmig erfolge, ſo giebt man den Kämmen und Zähnen auf jeder Seite einerley Form, ſo ſind die beyden Seitenflächen QqlL, NnlL einander congruent, deutlichere Anſchauung gewährt für das Kammrad und deſſen Getrieb die 101ſte Figur.

III. Zuſaz. Soll endlich der Kamm (Fig. 101.) den Getriebzahn bey M wieder verlaſſen, ſobald am Umfange der beyden Räder bey B eine neue Berührung der nächſtfolgenden Zähne anfängt, ſo iſt MF die für jeden Kamm, mithin auch für jeden Getriebzahn nothwendige Höhe. Um dieſe zu beſtimmen, ziehe man den Halbmeſſer CB des Getriebes, ſo iſt durch die Anzahl der Zähne die Breite eines Zahns ſammt ſeiner Zwiſchenweite, mithin der Bogen BN, und dadurch die Lage des Halbmeſſers CN gegeben; nun halbiere man BC in G, und beſchreibe aus G mit BG den Kreis BRCB, ſo liegt der Berührungspunct M

der beyden Zähne zugleich im Umfange dieſes Kreiſes, und im Halbmeſſer CN (§. 219. VI und VII. Zuſ.), mithin in ihrem Durchſchnittspuncte, folglich iſt deſſen Lage gegeben; fällt man daher aus M auf CB, den Perpendickel ME, ſo iſt dadurch EB = MF, das iſt, die nothwendige Höhe des Kammes und Getriebzahns beſtimmt.

IV. Zuſaz. Damit ſich endlich die Zähne des Getriebes zwiſchen die Kämme gehörig einſenken können, ſo wird zwiſchen den Kämmen noch eine Vertiefung am Kammrade gemacht, wodurch alſo die Kämme eine unter dem Umfange HBI liegende Verlängerung erhalten, ſo wie die Zähne am Getriebe auſſerhalb dem Umfang deſſelben einen kleinen abgerundeten Zuſaz bekommen.

§. 221.

Aufgabe.

Bey der §. 220. angegebenen Form eines Kamms, und Getriebzahns die Reibung zwiſchen denſelben zu beſtimmen.

Aufloſung.

1. Die Berührung zwiſchen der Seitenfläche des Kammes BMmb (Fig. 100) und jener eines Getriebzahns BGgb geſchieht allemal in einer geraden Linie, in deren Verlängerung K liegt (§. 219. XIX. Zuſ.);

2. auf dieſer Linie iſt jedesmal der Druck verbreitet, welchen der Kamm gegen den ergriffenen Zahn äuſſert,

3. reduciret man dieſen Druck, oder, was einerley iſt, die Kraft, wodurch ſolcher entſteht, auf einen Punct z. B. B der Berührungslinie, ſo kömmt bey der Unter-

ſuchung am Kamme nur jene Curve Bm (Fig. 99.); welche der Kreis BRCB bey der Umwälzung beſchreibt, und bey dem Getriebzahn nur der Halbmeſſer CB; welchen dieſer Punct dabey durchläuft, (§. 219. Nr. 3 und 6) in Betrachtung.

4. Ergreifet nun der Kamm Bm den Radzahn BG, und ſchiebt ſolchen vor ſich her, bis erſterer in die Lage B′m′, und lezterer in die Lage GM′ kömmt, ſo liegen

5. der Kreis BRCB, mithin auch der Punct B; und der Berührungspunct m′ der Zähne (§. 219. I. Zuſ.) in der Ebene des Kreiſes BOTB.

6. In Beziehung auf die Kugel, in deren Oberfläche die Curve $B'm'\mu$ fällt, ſind nun dieſe Curve ſelbſt, und der Bogen BB′ ſehr klein, folglich

7. kann man den Bogen BB′ als ein Stückchen der gemeinſchaftlichen Tangens der Kreiſe HBDI und BOTB, und $B'm'\mu$ als eine Curve von einfacher Krümmung betrachten, die beyde in der Ebene des Kreiſes BOTB liegen, ſo daß

8. die Sehne Bm′ in die Richtung der Normal, und die Sehne Cm′ in die Richtung der Tangens der Curve $B'm'\mu$ bey m′ fällt. (§. 219. III und IV. Zuſ.).

9. Unter dieſer Annahme nun, wenn P′ die auf den Umfang des Kammrades reducirte Totalkraft bezeichnet, mit welcher (Fig. 102.) ſich dieſes Rad um ſeine Axe drehet, alſo in B auf den ergriffenen Radzahn drückt, ſo iſt

10. P′.CB das Moment derſelben in Beziehung auf das Getrieb, und da dieſes während der Umdrehung ſtets unveränderlich bleibt (§. 220. Nr. 13.), ſo

iſt in m′ eine Kraft $= \frac{P'.CB}{Cm'}$ der Kraft P′ an B gleich⸗geltend (§. 3.).

11. Sezet man den während der Umdrehung ver⸗änderlichen Winkel $BCm' = BCM' = \omega$, ſo iſt

12. der Winkel $B'Bm = \omega$ (Geometr. §. 78. Zuſ.)

13. Ferner im rechtwinklichten Dreyecke Bm′C
$BC : Cm' = 1 : \cos.\,\omega$, mithin

14. $\frac{BC}{Cm'} = \frac{1}{\cos.\,\omega}$

15. Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 10., ſo wird in m′ die Kraft, folglich die Größe des Druckes nach der Normal $m'b = \frac{P'}{\cos.\,\omega}$, mithin

16. wenn λ den Reibungscoefficienten bezeichnet, die durch dieſen Druck in m′ erzeugte Reibung $= \frac{\lambda P'}{\cos.\,\omega}$

17. Während ſich das Kammrad von B gegen H zu drehet, alſo B nach B′ rücket, ſo hat die Curve B′m′μ auf dem Halbmeſſer des Getriebes, oder Seite des Zahns den Bogen m′B′ hinterlegt, mithin

18. äuſſert ſich die Friction als Hinderniß nach der entgegengeſezten Richtung, das iſt, nach der Tan⸗gens m′C (Nr. 8.).

19. Dieſes Hinderniß zu überwältigen, iſt daher in m′ am Kammrade eine Kraft $= \frac{\lambda P'}{\cos.\,\omega}$ (Nr. 16.); nach der Richtung m′c erfoderlich.

20. Man zerlege dieſe Kraft in 2 Seitenkräfte nach der auf BB′ ſenkrechten Richtung m′Q und nach der zu BB′ parallelen, alſo auf m′Q ſenkrechten Rich⸗tung m′N, ſo iſt

21. erſtere $= \frac{\lambda P'}{\cos \omega} \cos.\ c\,m'\,Q$ (Reine Mechan. §. 53. IX. Zuſ.), wird aber in Q durch die befeſtigte Ebene des Kammrades aufgehoben, vermehret zwar die Zapfenreibung, gehöret aber nicht zur gegenwärtigen Unterſuchung der Reibung zwiſchen den Zähnen.

22. Die Kraft nach $m'N = \frac{\lambda P'}{\cos \omega} \sin.\ c\,m'\,Q$ iſt nun die Größe der Kraft, welche am Umfange des Kammrades zur Ueberwindung erforderlich iſt, ſezet man ſolche $= F$, ſo iſt

23. $F = \frac{\lambda P'}{\cos.\ \omega} \sin.\ c\,m'Q.$

24. Ferner iſt der Winkel

$$c\,m'Q = 90^\circ - Q\,m'B = 90^\circ - (90^\circ - B'B\,m')$$
$$= B'B\,m' = \omega \text{ (Nr. 12.), mithin}$$
$$\sin.\ c\,m'Q = \sin.\ \omega$$

25. Sezet man dieſen Werth in die Gleichung Nr. 23., ſo wird

26. $F = \frac{\lambda P'}{\cos.\ \omega} \sin.\ \omega = P'.\ \lambda \tang.\ \omega$

I. Zuſaz. Bezeichnet P jenen Theil der Totalkraft, welcher auf die Bewegung der übrigen Laſt erfoderlich iſt, ſo wird $P' = P + F$, mithin Nr. 26.

$$F = (P + F)\,\lambda \tang.\ \omega = P.\lambda \tang.\ \omega + F.\lambda \tang.\ \omega$$
$$F\,(1 - \lambda \tang.\ \omega) = P.\lambda \tang.\ \omega, \text{ folglich}$$
$$F = P.\ \frac{\lambda \tang.\ \omega}{1 - \lambda \tang.\ \omega}$$

II. Zuſaz. Die Größe der Reibung zwiſchen Kamm und Zahn hängt alſo von der Größe der Laſt P ab, welche am Getriebe überwältiget werden muß, und iſt bey eben derſelben Laſt während des Angriffes noch veränderlich, und vom Winkel $\omega = BCM'$ abhängig.

Anmerk. Es leuchtet für ſich ein, daß die Conſtruction eines Kammrades und Getriebes nach der bisher angegebenen epicycloidiſchen Form der Zähne bey aller Geſchicklichkeit und Sorgfalt des Unternehmers ſehr ſchwer, und doch noch unvollkommen ſeyn wird, ich hielt es daher für nützlich, wie bey dem Stirnrade §. 213 und 214., auch bey dem Kammrade eine in England übliche, von Titl. Hrn. Salinenrathe von Reichenbach mir mitgetheilte, bloß auf Kreisbögen beruhende Conſtruction der Kämme und Zähne zu erklären.

§. 222.

Aufgabe. (Fig. 101.)

Für zwey Räder, deren Axen nicht parallel ſind, ſondern ſich einander ſchneiden, die Form der Zähne mittels bloßer Kreisbögen anzugeben, wenn von den Rädern ihre Halbmeſſer AB, CB, die Anzahl der Zähne, mithin die Breite bc eines Zahns, und deſſen Dicke ag, ferner der Winkel K, unter welchem ſich die Axen ſchneiden, gegeben ſind.

Aufloſung.

1. Im rechtwinklichten Dreyecke BAK (Fig. 99 und 101.), welches der Radius BA, die von B nach dem Durchſchnittspunct K gezogene gerade Linie BK mit dem Stücke AK der Axe bildet, iſt:

$BK : BA = 1 : \sin. K$, mithin

2. $BK = \dfrac{BA}{\sin. K}$ aus den gegebenen bekannt.

3. Soll man nun am Rade einen Zahn, z. B. abefcdgl (Fig. 101.) conſtruiren, ſo ziehe man von K nach dem Umfang des Rades HDI die gerade Linie $KD = KB$ (Nr. 2.), und trage

4. zu beyden Seiten die halbe Zahnbreite $Db = Dc$ am Umfange HI auf.

5. Durch D errichte man auf bc einen Perpendikel, und nehme ebenfalls Dm = Dn der halben Breite eines Zahns gleich, ſo daß die Höhe nm = der Breite bc wird.

6. Stellet man ſich durch m und n zu HDI Parallelkreiſe h′di′, hefi, vor, deren Mittelpuncte alſo ebenfalls in der Axe des Rades liegen, ſo ſind,

7. in Beziehung auf dieſe Kugelkreiſe, die Linien mn, bc (Nr. 5.) ſehr klein, und fallen daher mit den Bögen der Kugel zuſammen, und umgekehrt der zwiſchen m, n und eben ſo b, c enthaltene kleine Bogen läßt ſich als Stückgen der entſprechenden Tangens betrachten, ſo daß alſo

8. jeder Zahn eine abgekürzte Conoide, oder vielmehr Pyramide bildet, welche im Mittelpuncte K der Kugel ihre Spitze, und die größere Grundfläche in dem zwiſchen den Parallelkreiſen h′i′, hi eingeſchloſſenen Streifen der Kugel-Oberfläche hat;

9. In dieſem Streifen verzeichne man mit dem Halbmeſſer bc aus b und c die Kreisbögen cd, ba; und fälle auf HI aus eben dieſen Puncten b, c die ſenkrechten be, cf, ſo iſt cbamdcf die entſprechende größere Grundfläche für jeden Radzahn.

10. Zieht man von einem beliebigen Punct a dieſer Baſis nach K eine gerade Linie aK, und trägt auf ihr die gegebene Dicke ag eines Zahns auf, ſo giebt der durch g gelegte, zur größern Baſis parallele, Querſchnitt die kleinere Grundfläche des Zahns, man erhält alſo

11. die gehörige Form derſelben, und dadurch jene des ganzen Zahns, wenn man auf jeder Seite die

Fläche, z. B. agle ſo conſtruirt, daß allemal von jeder geraden Linie, die man von einem Puncte, z. B. a am Umfange der äuſſern Grundfläche nach K zieht, das der Dicke entſprechende Stück ag in dieſe Seitenfläche fällt (Geometr. §. 232. *a*.).

12. Ganz eine ähnliche Form bekömmt jeder Zahn am entſprechenden Getriebe, eben dieſelbe Breite und Höhe = bc, eben dieſelbe Dicke = ag; jeder Getriebzahn beſteht aus einer abgekürzten Conoide, die ihre Spitze in K, und ihre größere Grundfläche auf der Kugeloberfläche hat, deren Halbmeſſer KB = KD (Nr. 2) iſt, der Umfang dieſer Grundfläche läßt ſich nun ganz nach der Anleitung §. 213. verzeichnen, hingegen wird

13. die innere kleinere Grundfläche, und die Seitenflächen vollkommen wie am Rade nach Nr. 11. beſtimmet.

Zuſaz. Am Rade alſo ſowohl als am Getriebe bekommen die Zähne eine ſolche Lage und Form, daß der eine kreisförmig abgerundete Theil auf dem Umfange ſteht, und über ſelben hervorraget, der andere geradlinigte Theil hingegen am Rade unterhalb, und am Getriebe innerhalb dem Umfange zu liegen kömmt.

§. 223.

Aufgabe. (Fig. 103.)

Aus der Anzahl, Breite und Dicke der Zähne zweyer Räder, deren Axen ſich unter einem gegebenen Winkel K ſchneiden, die zum Eingriff nothwendige Vorrichtung zu beſtimmen.

Auflöſung.

1. Sezet man von dem gröſſern Rade deſſen Halbmeſſer AB = R, die Anzahl der Zähne = N, und ihre Breite = M, ſo iſt der Abſtand zweyer Zähne, das iſt, die Breite nebſt ihrer Zwiſchenweite:

$$2M = \frac{2R\pi}{N}, \text{ oder } M = \frac{R.\pi}{N}, \text{ mithin}$$

2. $R = AB = \frac{M.N}{\pi}$ bekannt.

3. Eben ſo, wenn für das kleinere Rad oder Getrieb deſſen Halbmeſſer CB = r, die Anzahl der Zähne = n, ſo iſt, indem zum Eingriff eine gleiche Breite der Zähne und Zwiſchenweite an beyden Rädern nothwendig, $2M = \frac{2r\pi}{n}$, $M = \frac{r\pi}{n}$, mithin

4. $r = CB = \frac{M.n}{\pi}$ ebenfalls bekannt.

5. Soll nun ein Eingriff beyder Räder möglich seyn, ſo müſſen ſich die Umfänge irgendwo z. B. in B berühren;

6. zieht man durch B die Durchmeſſer BI, BT, ſo ſtehen ſie auf der gemeinſchaftlichen Tangens beyder Kreiſe (Geom. §. 111. II Zuſ.) ſenkrecht, ſo daß alſo CBA der Neigungswinkel derſelben iſt.

7. Ferner ſteht BT auf der Axe XY in C ſenkrecht, iſt alſo der gegebene Winkel K der beyden Axen ſpitzig, ſo ſchneiden ſich CT, KV verlängert in F. (Geometr. §. 44.), ſo daß alſo

8. CFK = 90° - CKF = 90° - CBA, mithin CBA = FBA = K iſt.

9. Im

9. Im rechtwinklichten Dreyecke BAF iſt nun:

$BF : BA = 1 : \cos. FBA$, das iſt:

$BF : R = 1 : \cos. K$ (Nr. 2 und 8.), mithin

10. $BF = \frac{R}{\cos. K}$, folglich

11. $CF = BF - BC = \frac{R}{\cos. K} - r$ (Nr. 4 und 10.)

$$= \frac{R - r \cos. K}{\cos. K}.$$

12. Ferner iſt:

$BA : AF = 1 : \text{tang. } ABF$, d. i.

$R : AF = 1 : \text{tang. } K$, mithin

13. $AF = R \text{ tang. } K = \frac{R \sin. K}{\cos. K}$

14. Im rechtwinklichten Dreyecke FCK;

$FK : CF = 1 : \sin. K$, oder

$FK : \frac{R - r\cos. K}{\cos. K} = 1 : \sin. K$ (Nr. 11.), alſo

15. $FK = \frac{R - r \cos. K}{\sin. K \cos. K}$

16. Ferner; $KC : CF = 1 : \text{tang. } K$, oder

$KC : \frac{R - r \cos. K}{\cos. K} = 1 : \frac{\sin. K}{\cos. K}$, mithin

17. $CK = \frac{R - r\cos. K}{\sin. K}$

18. $AK = AF - FK = \frac{R \sin. K}{\cos. K} - \frac{R - r\cos. K}{\sin. K \cos. K}$

(Nr. 13 und 15.)

$$= \frac{R \sin. K^2 - R + r\cos. K}{\sin. K \cos. K}$$

$$= \frac{r\cos. K - R (1 - \sin. K^2)}{\sin. K \cos. K}$$

$$= \frac{r\cos. K - R \cos. K^2}{\sin. K \cos. K}$$ (Trigon. §. 296.);

folglich

19. $AK = \frac{r - R \cos. K}{\sin. K}$

20. Da nun aus dem gegebenen Stücken die beyden Halbmeſſer der Räder (Nr. 2 und 4.) bekannt, und die Breite und Dicke der Zähne gegeben ſind, ſo kann man endlich auch für beyde Räder ihre Zähne conſtruiren (§. 222.), ſo daß nun die ganze Vorrichtung vollkommen beſtimmt, mithin die Aufgabe aufgelöſet iſt.

I. Zuſaz. So lange, wie in der Figur 103. angenommen iſt, K ſpizig bleibt, ſo bleibt sin. K und cos. K poſitiv, mithin da allemal $\cos. K < 1$ und der Annahme gemäß $r < R$ (Nr. 3.), ſo iſt (Nr. 17.)

$CK = \frac{R - r \cos. K}{\sin. K}$ allemal poſitiv, hingegen

$AK = \frac{r - R \cos. K}{\sin. K}$ (Nr. 19.) wird gleich Null, poſitiv oder negativ, das iſt, der Punct K fällt mit A zuſammen, oder liegt auf der obern Seite des Kreiſes, gegen F zu wie Fig. 103., oder fällt unter dem Kreis BI gegen W zu, je nachdem r entweder gleich, oder größer, oder kleiner als R cos. K iſt.

II. Zuſaz. Wenn $K = 90°$, ſo iſt $\sin. K = 1$, und $\cos. K = 0$, alſo wie Fig. 101.

$CK = R = AB$, und $AK = r = CB$.

III. Zuſaz. Wenn $K > 90°$, ſo bleibt sin. K poſitiv, aber cos. K wird negativ, folglich bleibt CK, ſowohl alſo AK (I. Zuſ.) poſitiv, das heißt, ſie behalten die in der Figur 103. angenommene Lage.

IV. Zuſaz. Für $CKF = 180°$, iſt endlich $\cos. K = -1$ und $\sin. K = 0$, mithin

$CK = \infty$, und $AK = \infty$, das iſt, die Axen ſind parallel, und die beyden Räder erhalten alſo die gewöhn-

liche Form der Stirnräder (§. 197.), ſo daß alſo die Auflöſungen §. 213 und 214. als Auflöſungen für ſpecielle Fälle unter gegenwärtiger allgemeiner Auflöſung enthalten ſind.

V. Abſchnitt.

Von der Schraube ohne Ende.

§. 224.

Erklärung. (Fig. 104 und 105.)

Wenn eine Schraube in die Zähne eines Stirnrades eingreifet, und, indem ſie um ihre Spindelaxe AB gedrehet wird, das Stirnrad in Bewegung ſezet, ſo heißt dieſe Vorrichtung eine Schraube ohne Ende (Cochlea infinita).

I. Zuſaz. Wenn in D die Schraube den Radzahn ergreifet, und bis in E fortſchiebet, und dann verläßt, ſo erfolget in D ein neuer Eingriff, und da dieſe Bewegung ſtets wiederholt wird, mithin, ſo lange ſich die Schraube drehet, nie ein Ende nimmt, ſo bekam dieſe Verbindung die angeführte Benennung der Schraube ohne Ende.

II. Zuſaz. Der Eingriff erfodert, daß Schraubengänge genau in die Zwiſchenräume der Radzähne paſſen, daß folglich die Zähne die Form der Schraubengewinde haben müſſen, wie bey einer Schraubenmutter (§. 149. *d*.).

III. Zuſaz. Da bey der Schraube ohne Ende die Spindel unverrückt ihre Lage behält, und durch

Umdrehen derſelben um ihre Axe die eingreifenden Gänge die ergriffenen Radzähne nach der zur Spindelaxe parallelen Richtung vor ſich her ſchieben, ſo verhält ſich alles wie bey der Verbindung einer unbeweglichen männlichen mit einer beweglichen weiblichen Schraube (§. 152. IX. Zuſ.)

§. 225.

Erklärungen.

Die Schraube ohne Ende dient

a. als Hebwerkzeug (Fig. 104.), wenn vermittels eines Hebels, welcher durch die Spindel geſteckt wird, oder vermittels der Kurbeln Aa, Bb eine Kraft die Schraube drehet, und dadurch eine an der Welle des Rades befeſtigte Laſt Q in Bewegung ſezet, die Schraube bekömmt gewöhnlich, ſo wie die Radwelle, eine horizontale, mithin das Rad eine verticale Lage;

b. als Werkzeug ſehr ſanfte, kleine Bewegungen des Rades und der damit verbundenen Vorrichtungen hervorzubringen, um dadurch einem Inſtrumente jede beliebige und dabey feſte Lage zu geben (Fig. 105), oder endlich

c. als Werkzeug nicht nur ſehr kleine, gleichförmige Bewegungen hervorzubringen, ſondern auch die Größe derſelben mit aller Schärfe zu beſtimmen, als Micrometer (§ 152. X. Zuſ.).

Zuſaz. Jede dieſer Modificationen erfodert, daß die Gewinde der Schraube und des Rades genau ineinander paſſen, und die beyden leztern Werkzeuge erheiſchen noch in'sbeſondere, daß dieſe Gewinde alle einander ganz gleich, und die Abſtände derſelben, das iſt, die Höhen der Schraubengänge ſehr klein ſeyen.

§. 226.

Aufgabe. (Fig. 104.)

Bey einer Schraube ohne Ende, die als Hebwerkzeug (§. 225. *a.*) eingerichtet iſt, ſind nebſt der Laſt alle Dimenſionen und Beſtimmungen der ganzen Vorrichtung gegeben, man ſoll die Gröſse der Kraft angeben, die, am Hebelsarm der Schraube angebracht, der geſammten Laſt ſo das Gleichgewicht hält, daſs ſie bey geringſter Zunahme die Laſt in Bewegung ſezet.

Auflöſung.

1. Die gegenwärtige Vorrichtung der Schraube ohne Ende iſt eine Verbindung der beyden einfachen Maſchinen eines Haſpels, und einer Schraube.

2. Behält man alle bey dem Haſpel §. 173. angenommenen Bezeichnungen bey, ſo iſt die am Umfange des Rades zum Gleichgewicht erfoderliche Kraft

$$P' = \frac{r(Q+nk)e\lambda[Q+M+(n+s)k] + d^m(a+b(Q+nk))}{R - e\lambda}$$

(§. 174. I. Zuſ.).

3. Dieſe Laſt P′ muſs nun durch die Schraube nach der zur Axe parallelen Richtung bey erfolgter Ueberwucht in Bewegung geſezet werden.

4. Behält man alſo die §. 151 und 152. feſtgeſezten Bezeichnungen bey, ſo iſt die zum Gleichgewichte am Ende des Hebelarms erfoderliche Kraft

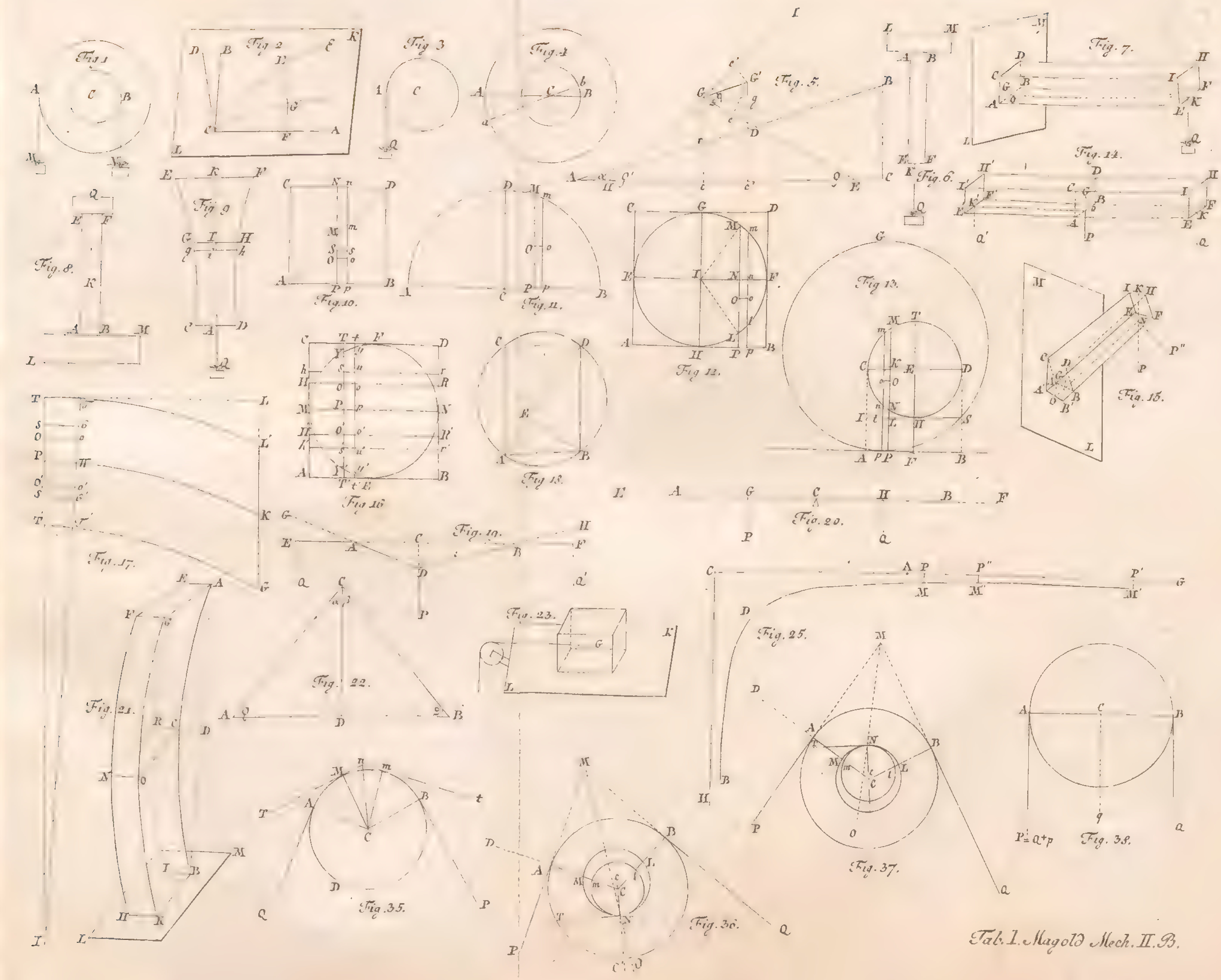
$$P = \frac{\varrho P'(a+2\lambda R\pi)}{f[2R\pi - a\lambda]}$$ (§. 152. III. und IX. Zuſ.), oder

5. $$P = \frac{\varrho a Q[\text{tang } O+\lambda]}{f.\,2R\pi[1-\lambda\,\text{tang. } O]\,\text{tang.} O}$$ (§. 152. I. Zuſ.)

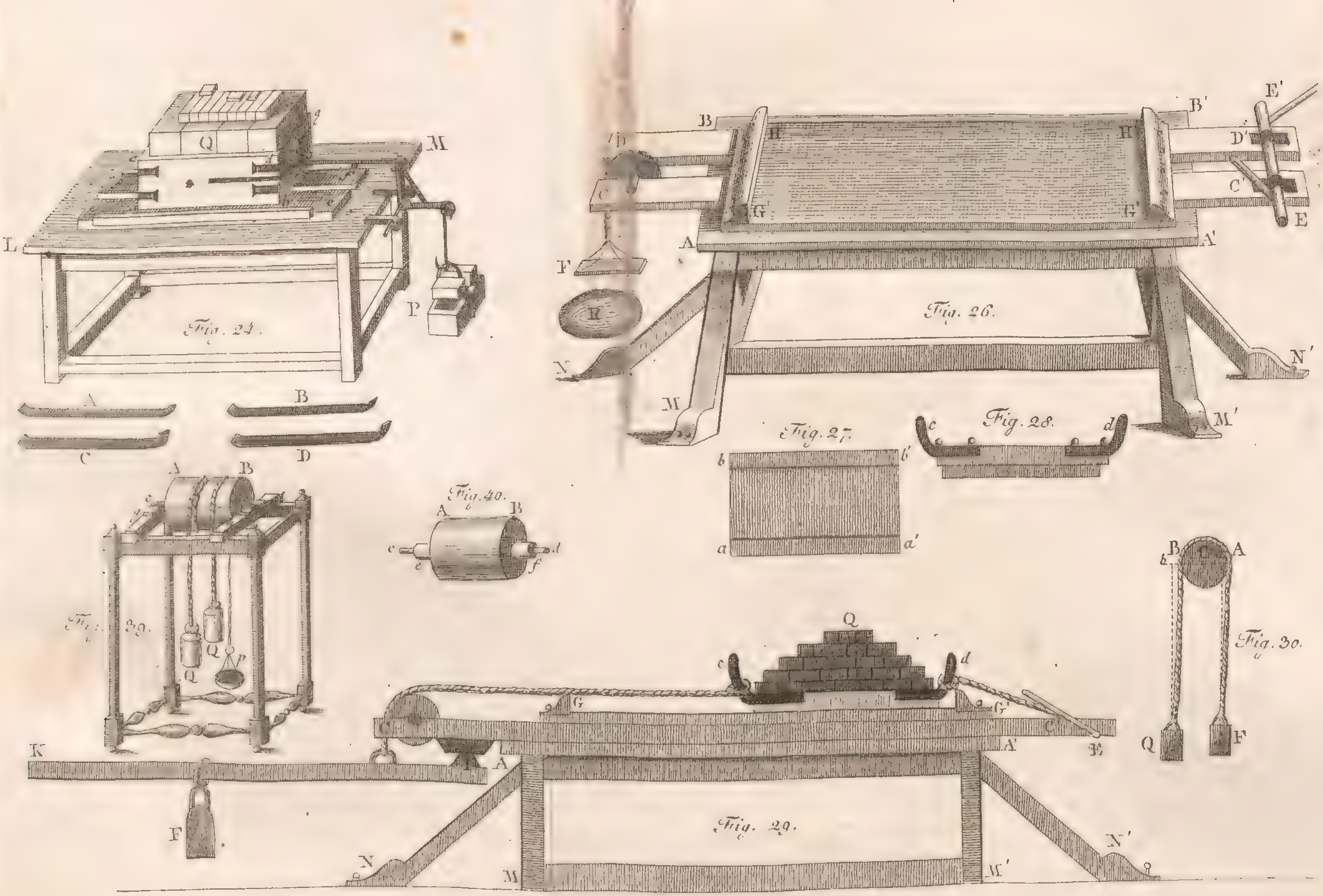
je nachdem die Schraube vier- oder dreyſeitig iſt, wo-

zu noch die Zapfenreibung der Spindel geſchlagen werden müßte, die aber als unbedeutend weggelaſſen werden kann.

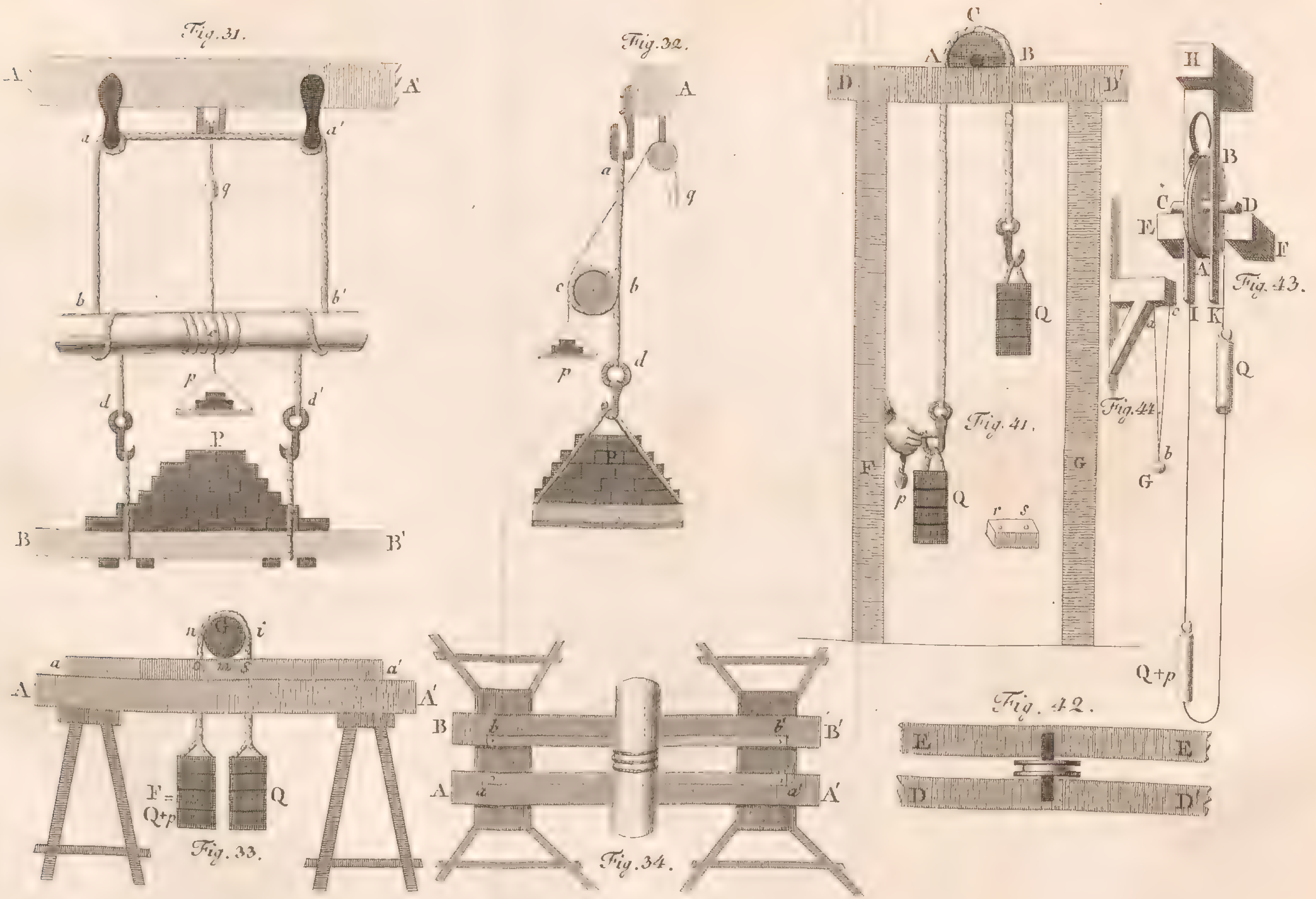
Zuſaz. Da die Bewegung der Laſt äuſſerſt langſam iſt, ſo bedient man ſich der Schraube ohne Ende vorzüglich in jenen Fällen, wo eine ſehr groſse Laſt nur überwältiget, und durch einen ſehr kleinen Raum bewegt werden darf.



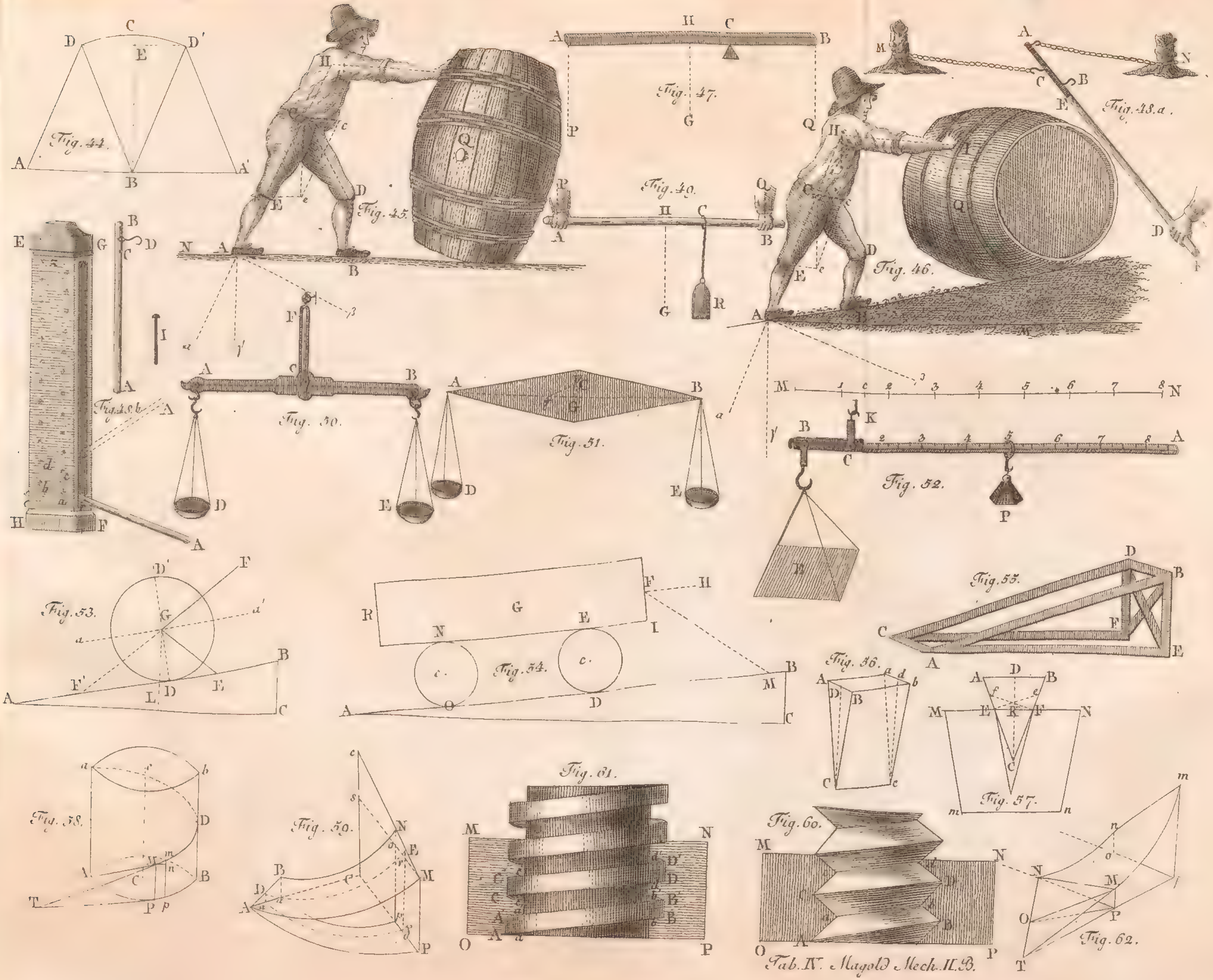
Tab. I. Magold Mech. II. B.



Tab. II. Magold Mech. II. B.



Tab. III. Magold Mech. II. B.



Tab. IV. Magold Mech. II. B.

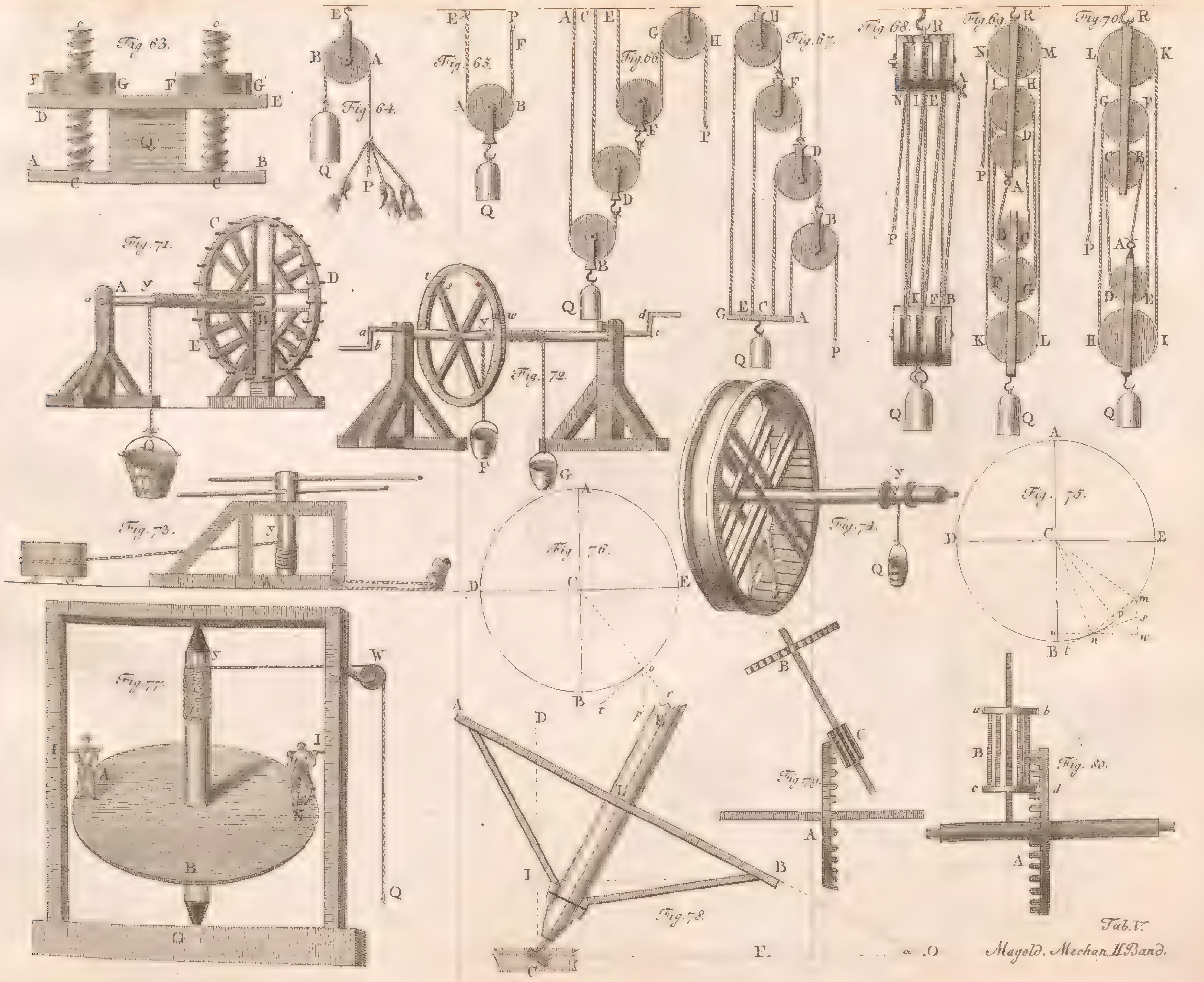
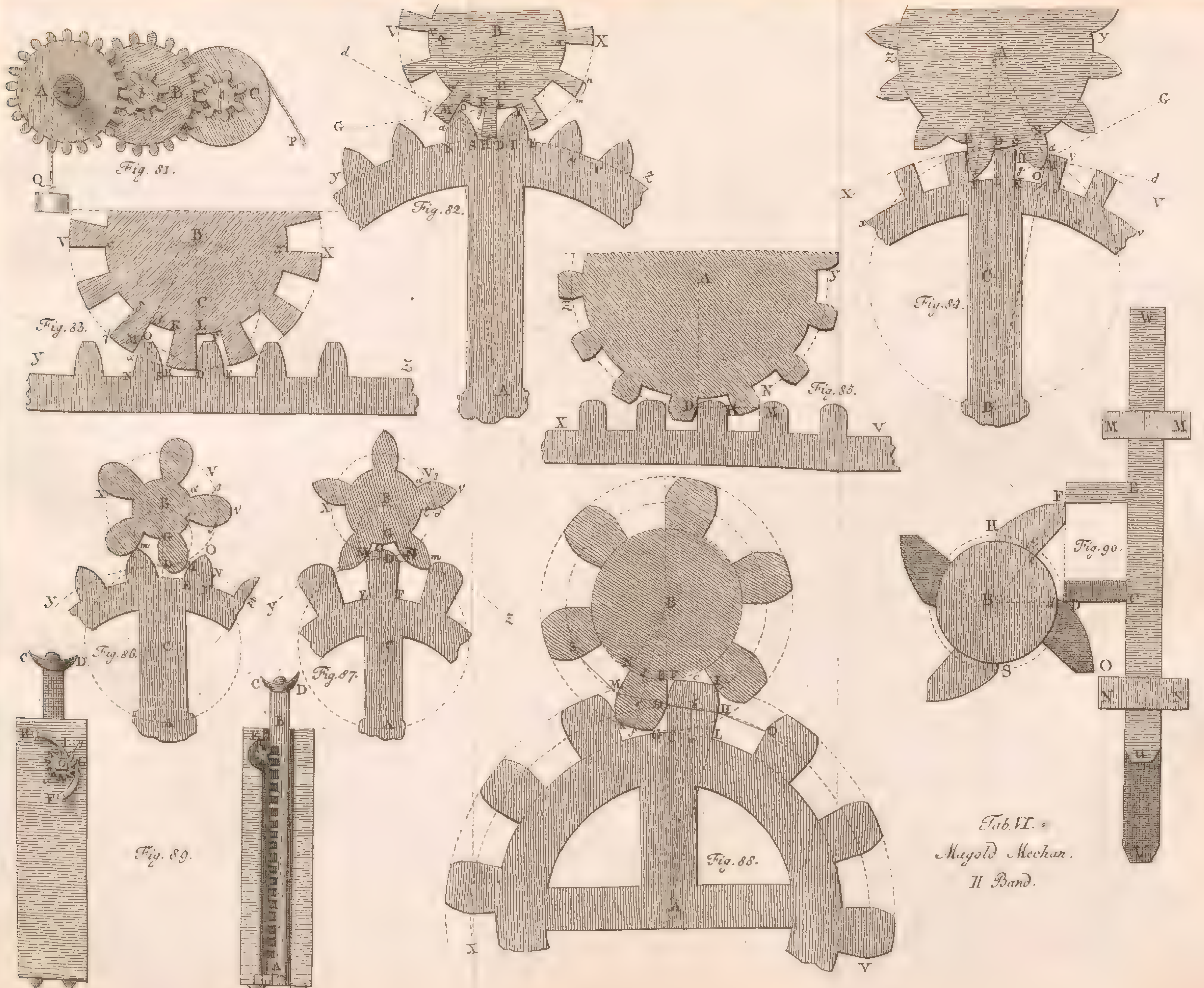
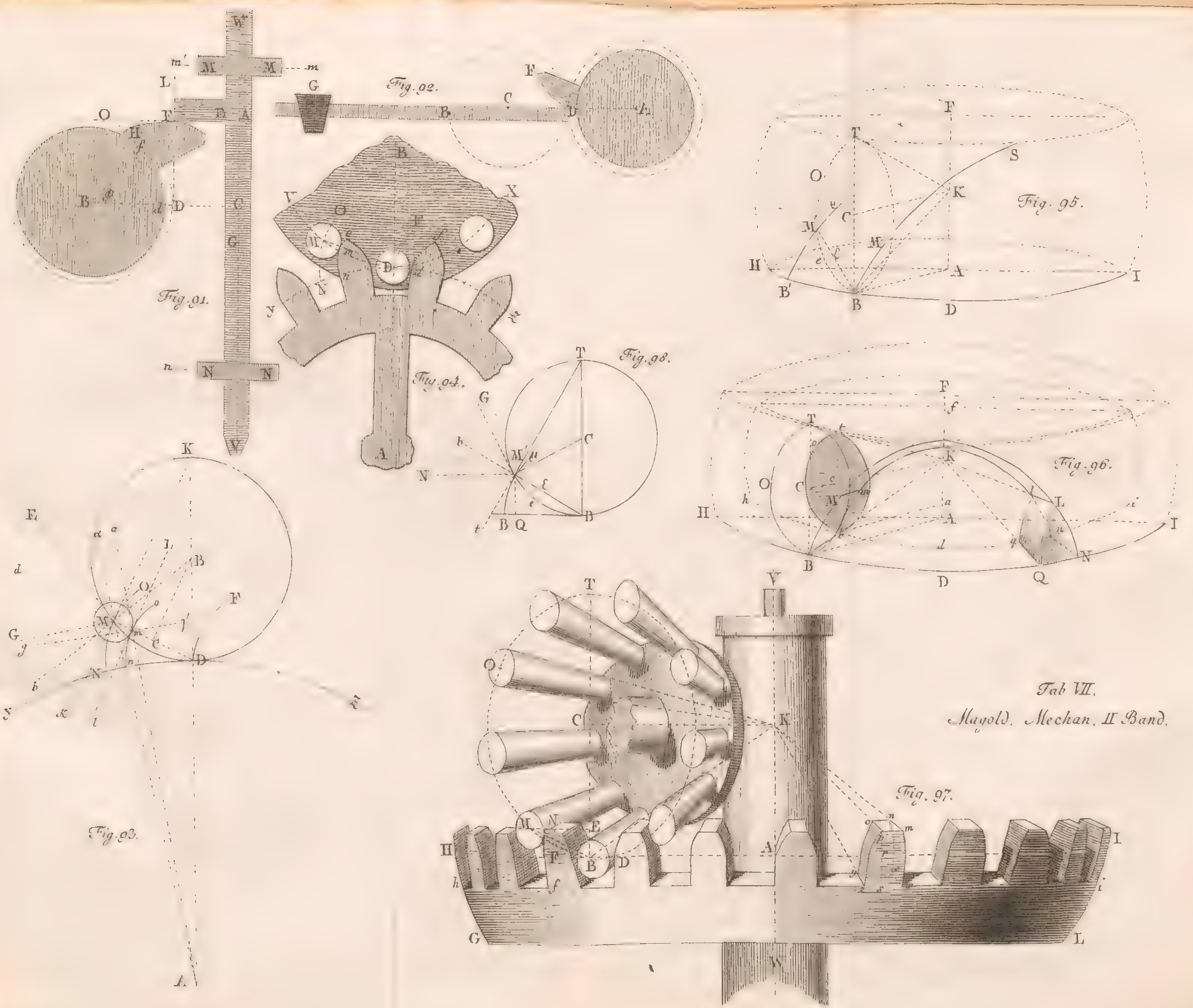


Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Tab. V.
Magold. Mechan. II Band.



Tab. VI.
Magold Mechan.
II Band.



Tab VII.
Magold. Mechan. II Band.

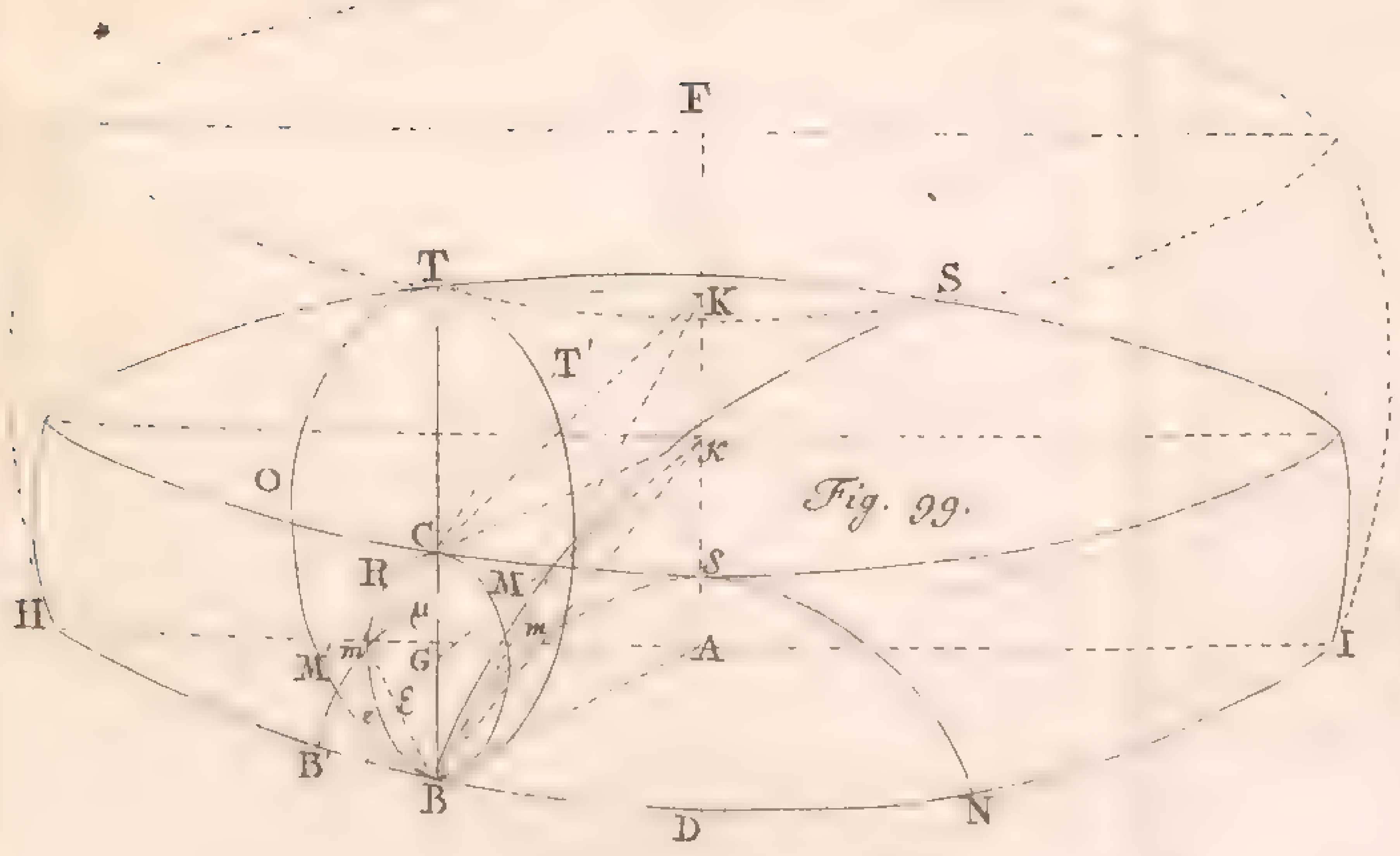


Fig. 99.

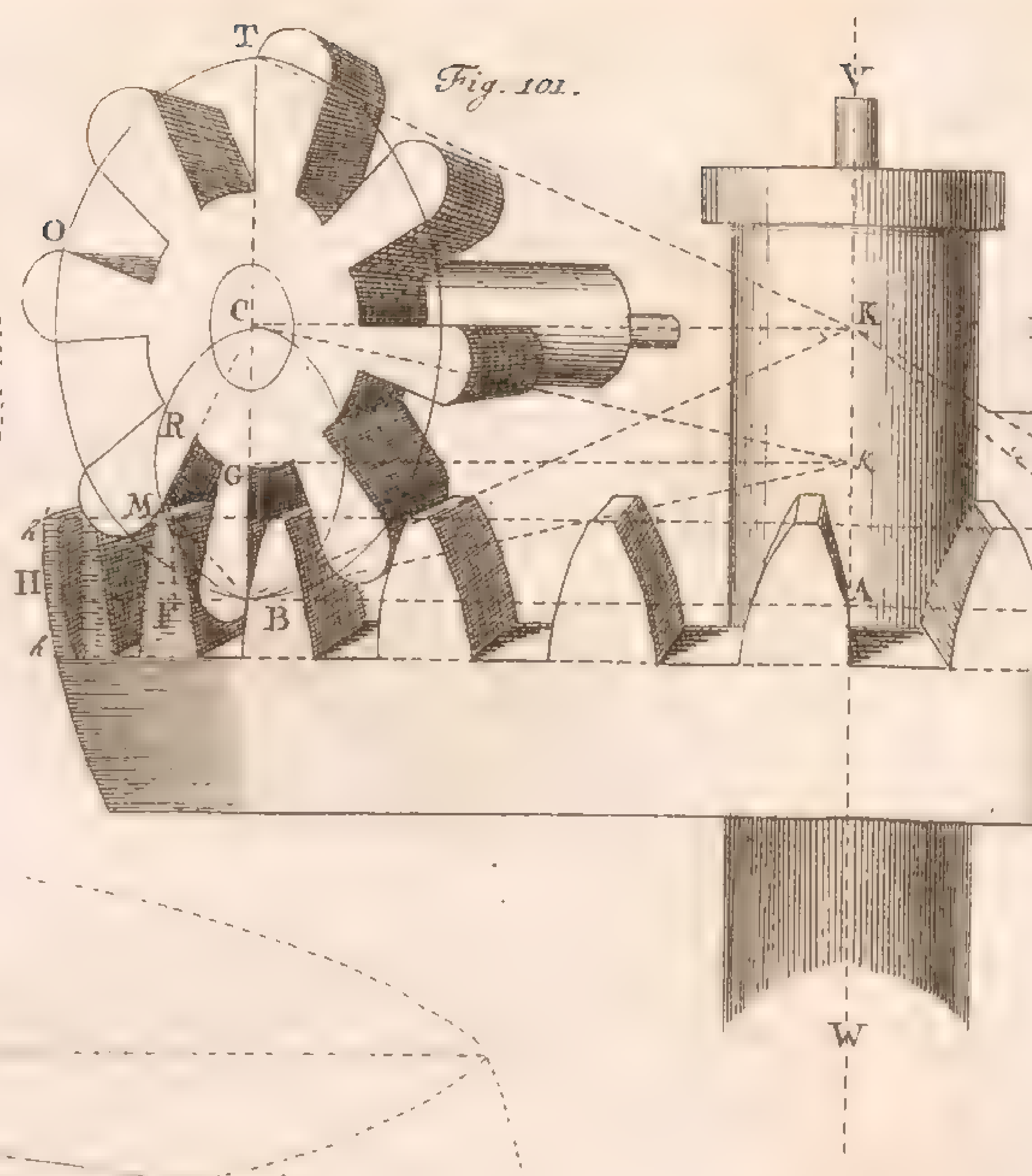


Fig. 101.

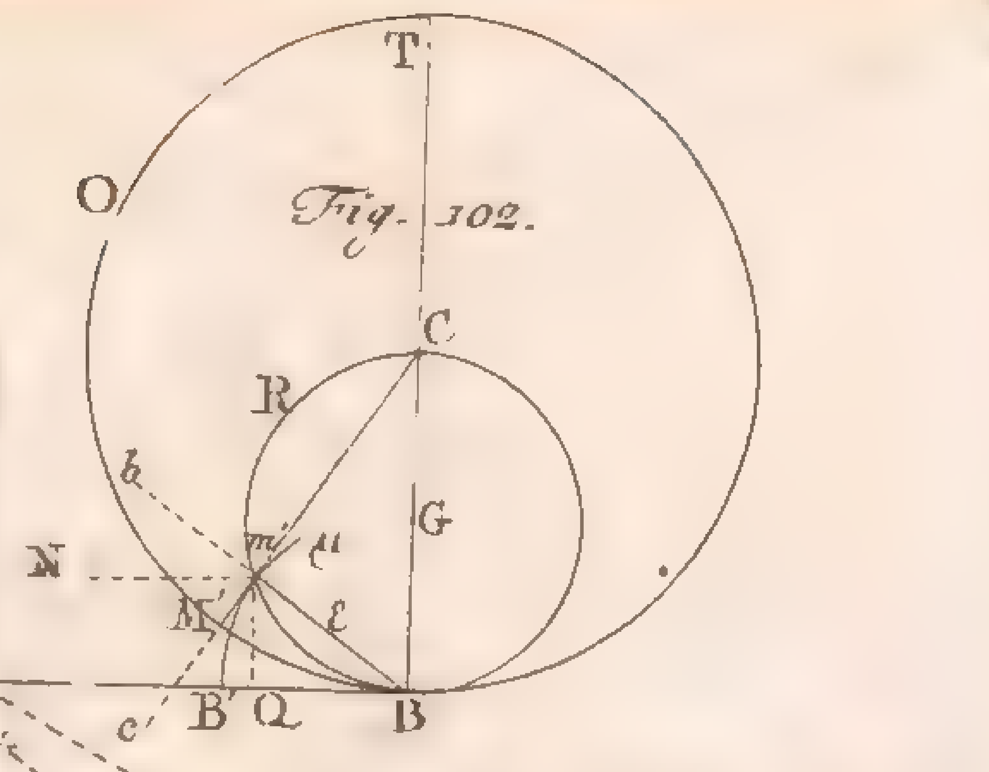


Fig. 102.

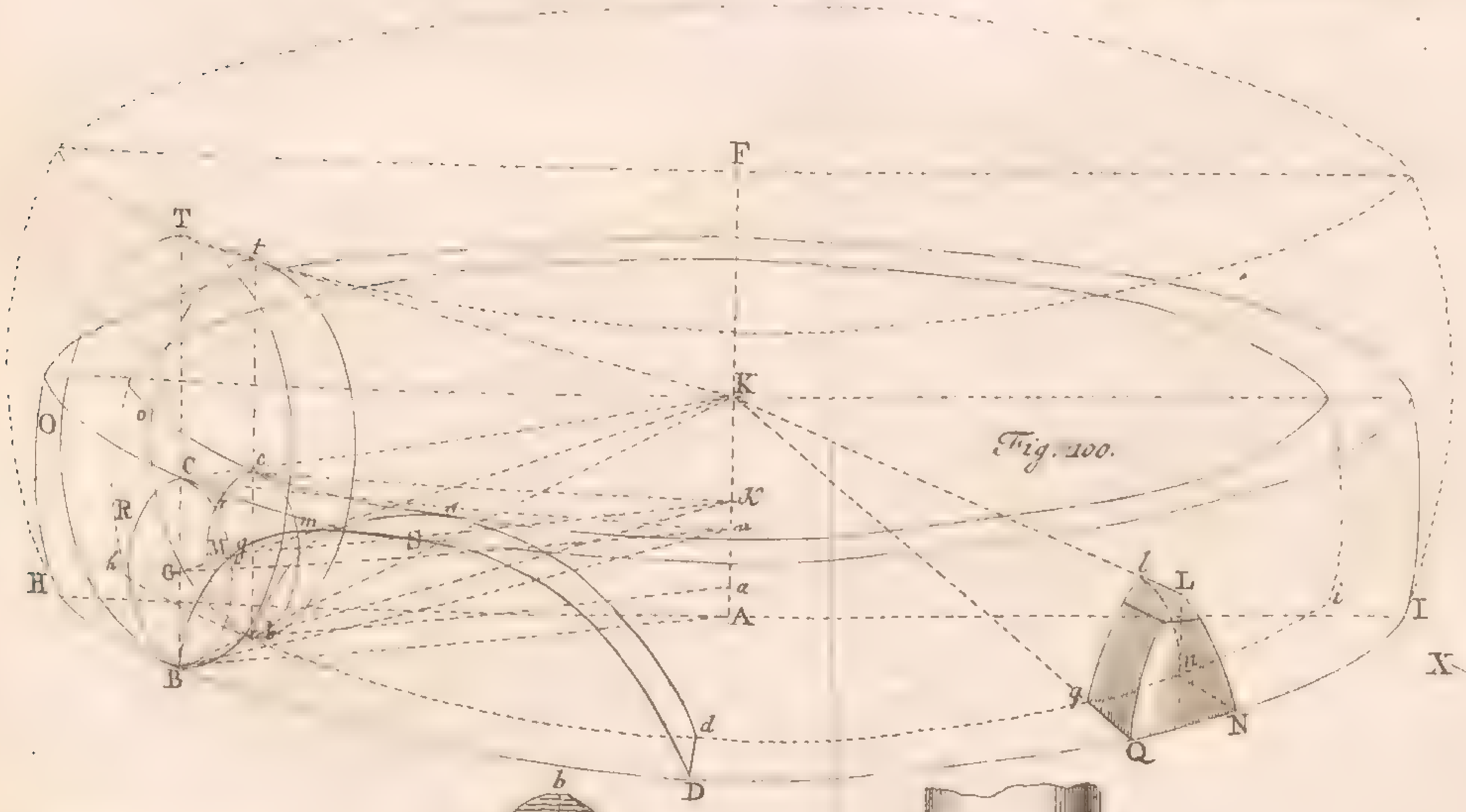


Fig. 100.

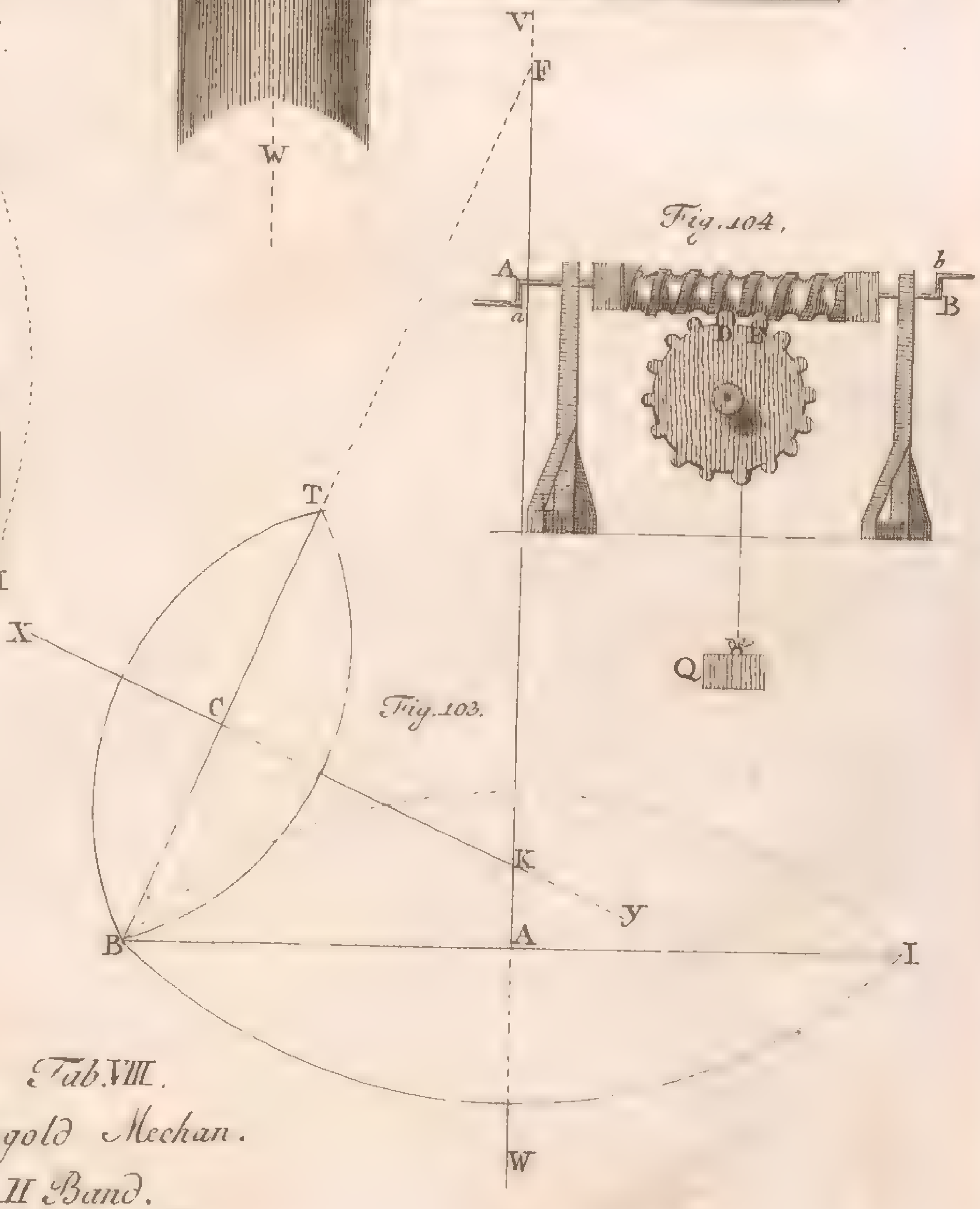


Fig. 103.

Fig. 104.

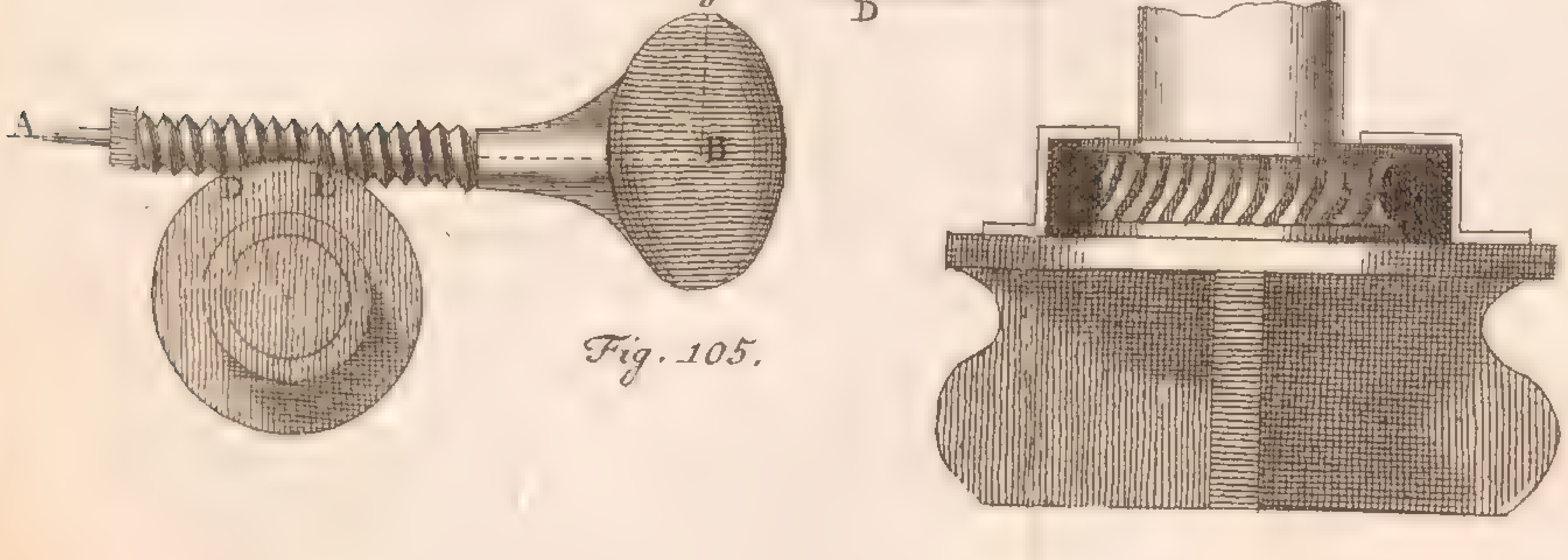


Fig. 105.

Tab. VIII.
Magold Mechan.
II Band.

Tab. II.

17. Bl. mit Tab.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Magold, Maurus,

Lehrbuch der Mechanik fester Körper

Bd.: 2

München 1813

Math.u. 117-5
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594114-8